Vol. 43 (2023)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

李 color 三系的上同调和 Nijenhuis 算子

张婉莹, 曹 燕
(哈尔滨理工大学理学院数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 本文研究了李 color 三系的上同调结构和 Nijenhuis 算子的问题. 利用李三系的上同调和 Nijenhuis 算子的研究方法, 构造出李 color 三系的上边界算子, 获得了李 color 三系的单参数形式形变. 推广了线性映射生成无穷小形变的充分必要条件, 同时证明了由一个李 color 三系的 Nijenhuis 算子产生的形变是平凡的.

关 键 词: 李 color 三系; 表示; 上同调; 形变; Nijenhuis 算子
MR(2010) **主题分类号**: 17B75; 17A60; 17B10; 17B56 **中 图 分 类 号**: O152.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2023)01-0057-14

1 引言

作为李三系和李超三系的推广, 李 color 三系的性质得到了广泛研究. 2007 年, 文献 [1] 给出李 color 三系的概念. 文献 [2] 研究了李 color 三系的幂零理想. 文献 [3] 探究了李 color 三系的 Frattini 子系的定义和性质. 文献 [4] 讨论了李 color 三系的型心. 文献 [5, 6] 探讨了李 color 三系的导子、广义导子和拟导子. 文献 [7] 研究了分裂李 color 三系.

Yamaguti 在文献 [8] 中提出了李三系的表示与上同调理论. 文献 [9] 利用上同调研究了李三系的形变和扩张理论. 目前, 文献 [10, 11] 讨论了 δ-Jordan 李三系的上同调和 Hom- 李三系的 Nijenhuis 算子. 文献 [12] 刻画了李超三系的上同调和 Nijenhuis 算子. 文献 [13] 探究了 Hom- 李超三系的上同调和形变. 于是想到将上同调理论推广到李 color 三系上. 本文研究李 color 三系的上同调和 Nijenhuis 算子, 并讨论其形变.

2 李 color 三系的上同调

定义 2.1[1] 设 G 是交换群, $\mathbb{K}$ 是任意域. 若 $\forall\,\alpha,\beta,\gamma\in G$, 下列等式均成立 :

$$\varepsilon(\alpha,\beta)\varepsilon(\beta,\alpha)=1,\ \ \varepsilon(\alpha,\beta+\gamma)=\varepsilon(\alpha,\beta)\varepsilon(\alpha,\gamma),\ \ \varepsilon(\alpha+\beta,\gamma)=\varepsilon(\alpha,\gamma)\varepsilon(\beta,\gamma),$$

则称映射 $\varepsilon: G\times G\to\mathbb{K}\backslash\{0\}$ 为 G 的斜对称双特征标 (或交换因子).

如果存在 V 的一簇子空间 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in G}$, 满足 $V=\oplus_{\gamma\in G}V_\gamma$, 则称线性空间 V 为 G-阶化的. 对于 G-阶化向量空间中的齐次元素 a, b, c, 用 $|a|,|b|,|c|\in G$ 表示它们的次数. 为简便, 用 $\varepsilon(a,b)$ 代表 $\varepsilon(|a|,|b|)$, 用 $\varepsilon(a,b+c)$ 代表 $\varepsilon(|a|,|b|+|c|)$, 以此类推. 此外, 符号 $\varepsilon(a,b)$ 若出现均默认 a,b 是 V 的齐次元素.

*收稿日期: 2021-10-28 **接收日期**: 2021-12-21
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11801121); 黑龙江省自然科学基金资助 (QC2018006); 黑龙江省普通高校基本科研业务费资助 (LGYC2018JC002).
作者简介: 张婉莹 (1997–), 女, 山西省运城市, 硕士, 主要研究方向: 李代数.
通讯作者: 曹燕

定义 2.2[1] 设 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的一个 G-阶化向量空间. 若 T 上有三元运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]:T\times T\times T\to T$ 满足 :

$$[a,b,c]=-\varepsilon(a,b)[b,a,c], \tag{2.1}$$

$$\varepsilon(c,a)[a,b,c]+\varepsilon(a,b)[b,c,a]+\varepsilon(b,c)[c,a,b]=0, \tag{2.2}$$

$$[a,b,[c,d,e]]=[[a,b,c],d,e]+\varepsilon(a+b,c)[c,[a,b,d],e]+\varepsilon(a+b,c+d)[c,d,[a,b,e]], \tag{2.3}$$

$\forall\, a,b,c,d,e\in T$, 则称 T 是李 color 三系.

如果三线性映射 $f:(T,[\cdot,\cdot,\cdot])\to(T',[\cdot,\cdot,\cdot]')$ 是 G-阶化向量空间上的映射, 且满足 $f([a,b,c])=[f(a),f(b),f(c)]'$, 则称 f 是李 color 三系的同态.

定义 2.3 设 T 是李 color 三系, V 为域 $\mathbb{K}$ 上的 G-阶化向量空间. 若有双线性映射 $\theta:T\otimes T\to \mathrm{End}(V)$, $\forall\, a,b,c,d\in T$ 满足 :

$$\begin{aligned}&\varepsilon(a+b,c+d)\theta(c,d)\theta(a,b)-\varepsilon(a,b)\varepsilon(a+c,d)\theta(b,d)\theta(a,c)\\&-\theta(a,[b,c,d])+\varepsilon(a,b+c)D(b,c)\theta(a,d)=0,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon(a+b,c+d)\theta(c,d)D(a,b)-D(a,b)\theta(c,d)\\&+\theta([a,b,c],d)+\varepsilon(a+b,c)\theta(c,[a,b,d])=0,\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}&D([a,b,c],d)+\varepsilon(a+b,c)D(c,[a,b,d])-D(a,b)D(c,d)\\&+\varepsilon(a+b,c+d)D(c,d)D(a,b)=0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $D(a,b)=\varepsilon(a,b)\theta(b,a)-\theta(a,b)$, 则称 (V,θ) 是 T 的表示, V 为 T- 模.

例 2.4 设 T 是李 color 三系. 定义 $\theta:T\otimes T\to \mathrm{End}(T)$ 为

$$\theta(a,b)(x)=\varepsilon(a+b,x)[x,a,b],\;\; D(a,b)=\varepsilon(a,b)\theta(b,a)-\theta(a,b),$$

易证 $D(a,b)(x)=[a,b,x]$, T 为 T- 模, 称 (T,θ) 是 T 的伴随表示.

命题 2.5 设 T 是李 color 三系, (V,θ) 是 T 的一个表示. 则 $T\oplus V$ 是李 color 三系.

证 定义三线性积 $[\cdot,\cdot,\cdot]:(T\oplus V)\otimes(T\oplus V)\otimes(T\oplus V)\to T\oplus V$ 为

$$[(a,u),(b,v),(c,w)]=([a,b,c],\varepsilon(a,b+c)\theta(b,c)(u)-\varepsilon(b,c)\theta(a,c)(v)+D(a,b)(w)),$$

$\forall\,(a,u),(b,v),(c,w)\in T\oplus V$, 其中 $|(a,0)|=|a|$, $|(0,u)|=|u|$, $D(a,b)=\varepsilon(a,b)\theta(b,a)-\theta(a,b)$.

由于 T 是李 color 三系, 易证 (2.1) 式成立. $\forall\,(a,u),(b,v),(c,w)\in T\oplus V$, 有如下计算

$$\begin{aligned}&-\varepsilon(a,b)[(b,v),(a,u),(c,w)]\\=\;&-\varepsilon(a,b)([b,a,c],\varepsilon(b,a+c)\theta(a,c)(v)-\varepsilon(a,c)\theta(b,c)(u)+D(b,a)(w))\\=\;&(-\varepsilon(a,b)[b,a,c],-\varepsilon(b,c)\theta(a,c)(v)+\varepsilon(a,b+c)\theta(b,c)(u)-\varepsilon(a,b)D(b,a)(w))\\=\;&([a,b,c],\varepsilon(a,b+c)\theta(b,c)(u)-\varepsilon(b,c)\theta(a,c)(v)+D(a,b)(w))\\=\;&[(a,u),(b,v),(c,w)],\end{aligned}$$

所以 (2.1) 式成立.

利用 (2.2) 式, 有以下计算

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon(c,a)[(a,u),(b,v),(c,w)]+\varepsilon(a,b)[(b,v),(c,w),(a,u)]+\varepsilon(b,c)[(c,w),(a,u),(b,v)] \\
= \; & (\varepsilon(c,a)[a,b,c]+\varepsilon(a,b)[b,c,a]+\varepsilon(b,c)[c,a,b],\Omega),
\end{aligned}
$$

其中:

$$
\begin{aligned}
\Omega = \; & \varepsilon(a,b)\theta(b,c)(u)-\varepsilon(c,a)\varepsilon(b,c)\theta(a,c)(v)+\varepsilon(c,a)D(a,b)(w) \\
& +\varepsilon(b,c)\theta(c,a)(v)-\varepsilon(a,b)\varepsilon(c,a)\theta(b,a)(w)+\varepsilon(a,b)D(b,c)(u) \\
& +\varepsilon(c,a)\theta(a,b)(w)-\varepsilon(b,c)\varepsilon(a,b)\theta(c,b)(u)+\varepsilon(b,c)D(c,a)(v) \\
= \; & \varepsilon(a,b)\theta(b,c)(u)+(\varepsilon(a,b)D(b,c)(u)-\varepsilon(b,c)\varepsilon(a,b)\theta(c,b)(u)) \\
& +\varepsilon(b,c)\theta(c,a)(v)+(\varepsilon(b,c)D(c,a)(v)-\varepsilon(c,a)\varepsilon(b,c)\theta(a,c)(v)) \\
& +\varepsilon(c,a)\theta(a,b)(w)+(\varepsilon(c,a)D(a,b)(w)-\varepsilon(a,b)\varepsilon(c,a)\theta(b,a)(w)) \\
= \; & \varepsilon(a,b)\theta(b,c)(u)-\varepsilon(a,b)\theta(b,c)(u)+\varepsilon(b,c)\theta(c,a)(v)-\varepsilon(b,c)\theta(c,a)(v) \\
& +\varepsilon(c,a)\theta(a,b)(w)-\varepsilon(c,a)\theta(a,b)(w) \\
= \; & 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon(c,a)[(a,u),(b,v),(c,w)]+\varepsilon(a,b)[(b,v),(c,w),(a,u)]+\varepsilon(b,c)[(c,w),(a,u),(b,v)] \\
= \; & (0,0).
\end{aligned}
$$

利用 (2.3) 式, $\forall\,(a,u),(b,v),(c,w),(d,m),(e,n)\in T\oplus V$. 计算如下

$$
\begin{aligned}
& [[(a,u),(b,v),(c,w)],(d,m),(e,n)]+\varepsilon(a+b,c)[(c,w),[(a,u),(b,v),(d,m)],(e,n)] \\
& +\varepsilon(a+b,c+d)[(c,w),(d,m),[(a,u),(b,v),(e,n)]] \\
= \; & ([[a,b,c],d,e]+\varepsilon(a+b,c)[c,[a,b,d],e]+\varepsilon(a+b,c+d)[c,d,[a,b,e]],\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3) \\
= \; & ([a,b,[c,d,e]],\Pi_4)=[(a,u),(b,v),[(c,w),(d,m),(e,n)]].
\end{aligned}
$$

其中:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 = \; & \varepsilon(a+b+c,d+e)\varepsilon(a,b+c)\theta(d,e)\theta(b,c)(u)-\varepsilon(a+b+c,d+e)\varepsilon(b,c)\theta(d,e)\theta(a,c)(v) \\
& +\varepsilon(a+b+c,d+e)\theta(d,e)D(a,b)(w)-\varepsilon(d,e)\theta([a,b,c],e)(m)+D([a,b,c],d)(n); \\
\Pi_2 = \; & -\varepsilon(a+b+d,e)\varepsilon(a,b+d)\varepsilon(a+b,c)\theta(c,e)\theta(b,d)(u) \\
& +\varepsilon(a+b+d,e)\varepsilon(b,d)\varepsilon(a+b,c)\theta(c,e)\theta(a,d)(v) \\
& +\varepsilon(c,a+b+d+e)\varepsilon(a+b,c)\theta([a,b,d],e)(w) \\
& -\varepsilon(a+b+d,e)\varepsilon(a+b,c)\theta(c,e)D(a,b)(m)+\varepsilon(a+b,c)D(c,[a,b,d])(n); \\
\Pi_3 = \; & \varepsilon(a+b,c+d)\varepsilon(a,b+e)D(c,d)\theta(b,e)(u)-\varepsilon(a+b,c+d)\varepsilon(b,e)D(c,d)\theta(a,e)(v) \\
& +\varepsilon(a+b,c+d)\varepsilon(c,a+b+d+e)\theta(d,[a,b,e])(w) \\
& -\varepsilon(a+b,c+d)\varepsilon(d,a+b+e)\theta(c,[a,b,e])(m)+\varepsilon(a+b,c+d)D(c,d)D(a,b)(n); \\
\Pi_4 = \; & \varepsilon(a,b+c+d+e)\theta(b,[c,d,e])(u)-\varepsilon(b,c+d+e)\theta(a,[c,d,e])(v) \\
& +\varepsilon(c,d+e)D(a,b)\theta(d,e)(w)-\varepsilon(d,e)D(a,b)\theta(c,e)(m)+D(a,b)D(c,d)(n).
\end{aligned}
$$

定义 2.6 设 T 是李 color 三系, V 为 T- 模. 若 n- 线性映射 $f: T\times T\times\cdots\times T\to T$ 满足:

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x,y,\cdots,x_n)=-\varepsilon(x,y)f(x_1,x_2,\cdots,y,x,\cdots,x_n)$,

(2) $\varepsilon(z,x)f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-3},x,y,z)+\varepsilon(x,y)f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-3},y,z,x)+\varepsilon(y,z)f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-3},z,x,y)=0$,

则称 f 为 T 的 n- 上链. 记 $C^n(T,V)$ 是全体 n- 上链的集合, $\forall\, n\geq 1$.

定义 2.7 设 T 是李 color 三系, V 为 T- 模. 对于 $n=1,2,3,4$, 上边界算子 $d^n: C^n(T,V)\to C^{n+2}(T,V)$ 的定义如下:

• 如果 $f\in C^1(T,V)$, 则

$$\begin{aligned}&d^1f(x_1,x_2,x_3)\\=\;&\varepsilon(f+x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)f(x_1)-f([x_1,x_2,x_3])\\&-\varepsilon(f,x_1+x_3)\varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)f(x_2)+\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(x_3).\end{aligned}$$

• 如果 $f\in C^2(T,V)$, 则

$$\begin{aligned}&d^2f(y,x_1,x_2,x_3)\\=\;&\varepsilon(f+y+x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)f(y,x_1)-f(y,[x_1,x_2,x_3])\\&-\varepsilon(f+y,x_1+x_3)\varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)f(y,x_2)+\varepsilon(f+y,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(y,x_3).\end{aligned}$$

• 如果 $f\in C^3(T,V)$, 则

$$\begin{aligned}&d^3f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\=\;&\varepsilon(f+x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)f(x_1,x_2,x_3)\\&-\varepsilon(f+x_1+x_2,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)f(x_1,x_2,x_4)\\&-\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(x_3,x_4,x_5)+\varepsilon(f+x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)f(x_1,x_2,x_5)\\&+f([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)-f(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)f(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)\\&+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)f(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]).\end{aligned}$$

• 如果 $f\in C^4(T,V)$, 则

$$\begin{aligned}&d^4f(y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\=\;&\varepsilon(f+y+x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)f(y,x_1,x_2,x_3)\\&-\varepsilon(f+y+x_1+x_2,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)f(y,x_1,x_2,x_4)\\&-\varepsilon(f+y,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(y,x_3,x_4,x_5)\\&+\varepsilon(f+y+x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)f(y,x_1,x_2,x_5)+f(y,[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)\\&-f(y,x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)f(y,x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)\\&+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)f(y,x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]).\end{aligned}$$

定理 2.8 设 T 是李 color 三系, V 为 T- 模. 则上边界算子 d^n 满足 $d^{n+2}d^n=0$, $n=1,2$.

证 由上边界算子的定义知, $d^3d^1=0$ 可得到 $d^4d^2=0$. 于是只需验证 $d^3d^1=0$.

$$
\begin{aligned}
& d^3(d^1f)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\
= & \varepsilon(f+x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)(d^1f)(x_1,x_2,x_3)\\
& -\varepsilon(f+x_1+x_2,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)(d^1f)(x_1,x_2,x_4)\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)(d^1f)(x_3,x_4,x_5)\\
& +\varepsilon(f+x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)(d^1f)(x_1,x_2,x_5)+(d^1f)([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)\\
& -(d^1f)(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)(d^1f)(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)\\
& +\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)(d^1f)(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5])\\
= & \varepsilon(f+x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)(\varepsilon(f+x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)f(x_1)\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_3)\varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)f(x_2)+\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(x_3)-f([x_1,x_2,x_3]))\\
& -\varepsilon(f+x_1+x_2,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)(\varepsilon(f+x_1,x_2+x_4)\theta(x_2,x_4)f(x_1)\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_4)\varepsilon(x_2,x_4)\theta(x_1,x_4)f(x_2)+\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(x_4)-f([x_1,x_2,x_4]))\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)(\varepsilon(f+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)f(x_3)-f([x_3,x_4,x_5])\\
& -\varepsilon(f,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)f(x_4)+\varepsilon(f,x_3+x_4)D(x_3,x_4)f(x_5))\\
& +\varepsilon(f+x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)(\varepsilon(f+x_1,x_2+x_5)\theta(x_2,x_5)f(x_1)\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_5)\varepsilon(x_2,x_5)\theta(x_1,x_5)f(x_2)-f([x_1,x_2,x_5])+\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f(x_5))\\
& +\varepsilon(f+x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)f([x_1,x_2,x_3])-f([[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5])\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_2+x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta([x_1,x_2,x_3],x_5)f(x_4)\\
& +\varepsilon(f,x_1+x_2+x_3+x_4)D([x_1,x_2,x_3],x_4)f(x_5)-(-f([x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]])\\
& +\varepsilon(f+x_1,x_2+x_3+x_4+x_5)\theta(x_2,[x_3,x_4,x_5])f(x_1)+\varepsilon(f,x_1+x_2)D(x_1,x_2)f([x_3,x_4,x_5])\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_3+x_4+x_5)\varepsilon(x_2,x_3+x_4+x_5)\theta(x_1,[x_3,x_4,x_5])f(x_2))\\
& +\varepsilon(x_1+x_2,x_3)(\varepsilon(f+x_3,x_1+x_2+x_4+x_5)\theta([x_1,x_2,x_4],x_5)f(x_3)-f([x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5])\\
& -\varepsilon(f,x_3+x_5)\varepsilon(x_1+x_2+x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)f([x_1,x_2,x_4])\\
& +\varepsilon(f,x_1+x_2+x_3+x_4)D(x_3,[x_1,x_2,x_4])f(x_5))\\
& +\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)(\varepsilon(f+x_3,x_1+x_2+x_4+x_5)\theta(x_4,[x_1,x_2,x_5])f(x_3)\\
& -\varepsilon(f,x_1+x_2+x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_1+x_2+x_5)\theta(x_3,[x_1,x_2,x_5])f(x_4)\\
& +\varepsilon(f,x_3+x_4)D(x_3,x_4)f([x_1,x_2,x_5])-f([x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]]))\\
= & \varepsilon(f+x_1,x_2+x_3+x_4+x_5)\Lambda_1f(x_1)-\varepsilon(f+x_2,x_3+x_4+x_5)\varepsilon(f,x_1)\Lambda_2f(x_2)\\
& +\varepsilon(f,x_1+x_2+x_4+x_5)\varepsilon(x_3,x_4+x_5)\Lambda_3f(x_3)-\varepsilon(f,x_1+x_2+x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\Lambda_4f(x_4)\\
& +\varepsilon(f,x_1+x_2+x_3+x_4)\Lambda_5f(x_5).
\end{aligned}
$$

其中:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1 = & \varepsilon(x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)\theta(x_2,x_3)-\varepsilon(x_2,x_3)\varepsilon(x_2+x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)\theta(x_2,x_4)\\
& -\theta(x_2,[x_3,x_4,x_5])+\varepsilon(x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)\theta(x_2,x_5)=0;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \varepsilon(x_1+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)\theta(x_1,x_3)-\varepsilon(x_1,x_3)\varepsilon(x_1+x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)\theta(x_1,x_4)\\ &\quad -\theta(x_1,[x_3,x_4,x_5])+\varepsilon(x_1,x_3+x_4)D(x_3,x_4)\theta(x_1,x_5)=0;\\ \Lambda_3 &= \varepsilon(x_1+x_2,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)D(x_1,x_2)-D(x_1,x_2)\theta(x_4,x_5)\\ &\quad +\theta([x_1,x_2,x_4],x_5)+\varepsilon(x_1+x_2,x_4)\theta(x_4,[x_1,x_2,x_5])=0;\\ \Lambda_4 &= \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_5)\theta(x_3,x_5)D(x_1,x_2)-D(x_1,x_2)\theta(x_3,x_5)\\ &\quad +\theta([x_1,x_2,x_3],x_5)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)\theta(x_3,[x_1,x_2,x_5])=0;\\ \Lambda_5 &= D([x_1,x_2,x_3],x_4)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)D(x_3,[x_1,x_2,x_4])\\ &\quad -D(x_1,x_2)D(x_3,x_4)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)D(x_1,x_2)=0.\end{aligned}$$

由此可得 $d^3(d^1f)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=0$, 即 $d^3d^1=0$.

若 $d^nf=0, n=1,2,3,\cdots$, 则称 $f\in C^n(T,V)$ 为 n- 余循环, 记 $Z^n(T,V)$ 是 n- 余循环构成的子空间, $B^n(T,V)=d^{n-2}C^{n-2}(T,V)$, 其中 $n\geq 3$. 由 $d^{n+2}d^n=0$ 知, $B^n(T,V)$ 是 $Z^n(T,V)$ 的子空间, 于是可定义李 color 三系 T 的 n- 阶上同调为 $H^n(T,V)=Z^n(T,V)/B^n(T,V)$.

3 李 color 三系的单参数形式形变

设 T 是李 color 三系, $\mathbb{K}[[t]]$ 是以 t 为变量的形式幂级数环. 假设 $T[[t]]$ 是 T 上的一组形式级数.

定义 3.1 设 T 是李 color 三系, 则 T 的单参数形式形变是一组幂级数 $f_t: T\times T\times T\to T[[t]]$ 为

$$f_t(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i\geq 0}F_i(x_1,x_2,x_3)t^i=F_0(x_1,x_2,x_3)+F_1(x_1,x_2,x_3)t+F_2(x_1,x_2,x_3)t^2+\cdots,$$

其中每个 F_i 是 $\mathbb{K}$- 三线性映射, $F_i: T\times T\times T\to T$, $F_0(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]$, 满足以下条件 :

$$f_t(x_1,x_2,x_3)=-\varepsilon(x_1,x_2)f_t(x_2,x_1,x_3), \tag{3.1}$$

$$\varepsilon(x_3,x_1)f_t(x_1,x_2,x_3)+\varepsilon(x_1,x_2)f_t(x_2,x_3,x_1)+\varepsilon(x_2,x_3)f_t(x_3,x_1,x_2)=0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}f_t(x_1,x_2,f_t(x_3,x_4,x_5)) =& f_t(f_t(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5)\\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)f_t(x_3,f_t(x_1,x_2,x_4),x_5)\\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)f_t(x_3,x_4,f_t(x_1,x_2,x_5)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

注 式 (3.1) — (3.3) 等价于 $(i,j\leq n,\ n=0,1,2,\cdots)$

$$F_i(x_1,x_2,x_3)=-\varepsilon(x_1,x_2)F_i(x_2,x_1,x_3), \tag{3.4}$$

$$\varepsilon(x_3,x_1)F_i(x_1,x_2,x_3)+\varepsilon(x_1,x_2)F_i(x_2,x_3,x_1)+\varepsilon(x_2,x_3)F_i(x_3,x_1,x_2)=0, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=n}F_i(x_1,x_2,F_j(x_3,x_4,x_5)) =& \sum_{i+j=n}(F_i(F_j(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5)\\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)F_i(x_3,F_j(x_1,x_2,x_4),x_5)\\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)F_i(x_3,x_4,F_j(x_1,x_2,x_5)).\end{aligned} \tag{3.6}$$

进一步, 式 (3.6) 等价于 $\sum_{i+j=n} F_iF_j = 0$, 其中

$$\begin{aligned} & F_iF_j(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \\ = & -F_i(x_1,x_2,F_j(x_3,x_4,x_5)) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)F_i(x_3,F_j(x_1,x_2,x_4),x_5) \\ & +F_i(F_j(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)F_i(x_3,x_4,F_j(x_1,x_2,x_5)). \end{aligned}$$

当 $n=1$, 式 (3.6) 等价于 $F_0F_1+F_1F_0=0$;
当 $n\geq 2$, 式 (3.6) 等价于 $-(F_0F_n+F_nF_0)=F_1F_{n-1}+F_2F_{n-2}+\cdots+F_{n-1}F_1$.
由 $F_0(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]$, 则有

$$\begin{aligned} & F_0F_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \\ = & -F_0(x_1,x_2,F_1(x_3,x_4,x_5)) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)F_0(x_3,F_1(x_1,x_2,x_4),x_5) \\ & +F_0(F_1(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)F_0(x_3,x_4,F_1(x_1,x_2,x_5)) \\ = & -[x_1,x_2,F_1(x_3,x_4,x_5)] + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)[x_3,F_1(x_1,x_2,x_4),x_5] \\ & +[F_1(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5] + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)[x_3,x_4,F_1(x_1,x_2,x_5)] \\ = & -D(x_1,x_2)F_1(x_3,x_4,x_5) - \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)F_1(x_1,x_2,x_4) \\ & +\varepsilon(x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)F_1(x_1,x_2,x_3) \\ & +\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)F_1(x_1,x_2,x_5). \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} & F_1F_0(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \\ = & -F_1(x_1,x_2,F_0(x_3,x_4,x_5)) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)F_1(x_3,F_0(x_1,x_2,x_4),x_5) \\ & +F_1(F_0(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)F_1(x_3,x_4,F_0(x_1,x_2,x_5)) \\ = & -F_1(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)F_1(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5) \\ & +F_1([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)F_1(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]). \end{aligned}$$

于是

$$(F_0F_1+F_1F_0)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = d^3F_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).$$

由 $F_0F_1+F_1F_0=0$ 可得 $d^3F_1=0$, 也可得 $-d^3F_n=F_1F_{n-1}+F_2F_{n-2}+\cdots+F_{n-1}F_1$. 此时称 F_1 为 f_t 的无穷小形变.

定义 3.2 设 T 是李 color 三系, 若存在 $\mathbb{K}[[t]]$- 模形式同构

$$\phi_t(x)=\sum_{i\geq 0}\phi_i(x)t^i : (T[[t]],f_t)\to (T[[t]],f_t'),$$

其中 $\phi_0=\mathrm{id}_T$, $\phi_i: T\to T$ 为 $\mathbb{K}$- 线性映射, 满足

$$\phi_tf_t(x_1,x_2,x_3)=f_t'(\phi_t(x_1),\phi_t(x_2),\phi_t(x_3)),\ \forall\, x_1,x_2,x_3\in T,$$

则称 T 的两个单参数形式形变 f_t 和 f_t' 是等价的, 记为 $f_t\sim f_t'$.

特别地, 如果 $F_1=F_2=\cdots=0$, 则称 $f_t=F_0$ 为零形变. 如果 $f_t\sim F_0$, 则称 f_t 为微小形变. 如果每一个单参数形式形变 f_t 均为微小的, 则称 T 为解析刚性李 color 三系.

定理 3.3 设 $f_t=\sum_{i\geq 0}F_i(x_1,x_2,x_3)t^i$ 与 $f_t^{'}=\sum_{i\geq 0}F_i^{'}(x_1,x_2,x_3)t^i$ 为 T 的两个等价的单参数形式形变. 则微小形变 F_1 和 $F_1^{'}$ 属于同一个上同调 $H^3(T,T)$.

证 假设 F_1 和 $F_1^{'}$ 等价, 则存在 $\mathbb{K}[[t]]$- 模同构 $\phi_t(x)=\sum_{i\geq 0}\phi_i(x)t^i$ 使得

$$\sum_{i\geq 0}\phi_i\left(\sum_{j\geq 0}F_j(x_1,x_2,x_3)t^j\right)t^i=\sum_{i\geq 0}F_i^{'}\left(\sum_{k\geq 0}\phi_k(x_1)t^k,\sum_{l\geq 0}\phi_l(x_2)t^l,\sum_{m\geq 0}\phi_m(x_3)t^m\right)t^i,$$

进一步, 有

$$\sum_{i+j=n}\phi_i(F_j(x_1,x_2,x_3))t^{i+j}=\sum_{i+k+l+m=n}F_i^{'}(\phi_k(x_1),\phi_l(x_2),\phi_m(x_3))t^{i+k+l+m}.$$

特别地

$$\sum_{i+j=1}\phi_i(F_j(x_1,x_2,x_3))t=\sum_{i+k+l+m=1}F_i^{'}(\phi_k(x_1),\phi_l(x_2),\phi_m(x_3))t.$$

比较上式两边的系数得

$$\begin{aligned}&F_1(x_1,x_2,x_3)+\phi_1([x_1,x_2,x_3])\\=\;&F_1^{'}(x_1,x_2,x_3)+[\phi_1(x_1),x_2,x_3]+[x_1,\phi_1(x_2),x_3]+[x_1,x_2,\phi_1(x_3)],\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}&F_1(x_1,x_2,x_3)-F_1^{'}(x_1,x_2,x_3)\\=\;&[\phi_1(x_1),x_2,x_3]+[x_1,\phi_1(x_2),x_3]+[x_1,x_2,\phi_1(x_3)]-\phi_1([x_1,x_2,x_3])\\=\;&\varepsilon(x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)\phi_1(x_1)-\varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)\phi_1(x_2)+D(x_1,x_2)\phi_1(x_3)-\phi_1([x_1,x_2,x_3])\\=\;&d^1\phi_1(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

因此 $F_1-F_1^{'}=d^1\phi_1\in B^3(T,T)$.

定理 3.4 设 T 是李 color 三系, 若 $H^3(T,T)=0$, 则 T 是解析刚性的.

证 设 f_t 是 T 的单参数形变, 假设 $f_t=F_0+\sum_{i\geq n}F_it^i$. 则 $-d^3F_n=F_1F_{n-1}+F_2F_{n-2}+\cdots+F_{n-1}F_1=0$. 由 $H^3(T,T)=0$ 知, $F_n\in Z^3(T,T)=B^3(T,T)$, 即存在 $g_n\in C^1(T,T)$ 使得 $F_n=d^1g_n$.

令 $\phi_t=\mathrm{id}_T-g_nt^n$, 则

$$\begin{aligned}&\phi_t(\mathrm{id}_T+g_nt^n+g_n^2t^{2n}+g_n^3t^{3n}+\cdots)\\=\;&(\mathrm{id}_T-g_nt^n)(\mathrm{id}_T+g_nt^n+g_n^2t^{2n}+g_n^3t^{3n}+\cdots)\\=\;&(\mathrm{id}_T+g_nt^n+g_n^2t^{2n}+g_n^3t^{3n}+\cdots)-(g_nt^n+g_n^2t^{2n}+g_n^3t^{3n}+\cdots)\\=\;&\mathrm{id}_T.\end{aligned}$$

同理可证 $(\mathrm{id}_T+g_nt^n+g_n^2t^{2n}+g_n^3t^{3n}+\cdots)\phi_t=\mathrm{id}_T$. 因此 $\phi_t:(T[[t]],f_t)\to(T[[t]],f_t^{'})$ 是线性同构. 考虑另一个单参数形变

$$f_t^{'}(x_1,x_2,x_3)=\phi_t^{-1}f_t(\phi_t(x_1),\phi_t(x_2),\phi_t(x_3)).$$

显然, $f_t \sim f_t^{'}$. 假设 $f_t^{'} = \sum_{i\geq 0} F_i^{'} t^i$. 则

$$(\mathrm{id}_T - g_n t^n)\left(\sum_{i\geq 0} F_i^{'}(x_1,x_2,x_3)t^i\right) = \left(F_0 + \sum_{i\geq n} F_i t^i\right)(x_1 - g_n(x_1)t^n, x_2 - g_n(x_2)t^n, x_3 - g_n(x_3)t^n),$$

即

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\geq 0} F_i^{'}(x_1,x_2,x_3)t^i - \sum_{i\geq 0} g_n F_i^{'}(x_1,x_2,x_3)t^{i+n}\\
=\ & F_0(x_1,x_2,x_3) - \{F_0(g_n(x_1),x_2,x_3) + F_0(x_1,g_n(x_2),x_3) + F_0(x_1,x_2,g_n(x_3))\}t^n\\
&+\{F_0(g_n(x_1),g_n(x_2),x_3) + F_0(x_1,g_n(x_2),g_n(x_3)) + F_0(g_n(x_1),x_2,g_n(x_3))\}t^{2n}\\
&+F_0(g_n(x_1),g_n(x_2),g_n(x_3))t^{3n} + \sum_{i\geq n} F_i(x_1,x_2,x_3)t^i\\
&-\sum_{i\geq n}\{F_i(g_n(x_1),x_2,x_3) + F_i(x_1,g_n(x_2),x_3) + F_i(x_1,x_2,g_n(x_3))\}t^{i+n}\\
&+\sum_{i\geq n}\{F_i(g_n(x_1),g_n(x_2),x_3) + F_i(x_1,g_n(x_2),g_n(x_3)) + F_i(g_n(x_1),x_2,g_n(x_3))\}t^{i+2n}\\
&-\sum_{i\geq n} F_i(g_n(x_1),g_n(x_2),g_n(x_3))t^{i+3n}.
\end{aligned}$$

于是

$$F_0^{'}(x_1,x_2,x_3) = F_0(x_1,x_2,x_3) = [x_1,x_2,x_3],$$
$$F_1^{'}(x_1,x_2,x_3) = F_2^{'}(x_1,x_2,x_3) = \cdots = F_{n-1}^{'}(x_1,x_2,x_3) = 0,$$

和

$$\begin{aligned}
&F_n^{'}(x_1,x_2,x_3) - g_n([x_1,x_2,x_3])\\
=\ & F_n(x_1,x_2,x_3) - [g_n(x_1),x_2,x_3] - [x_1,g_n(x_2),x_3] - [x_1,x_2,g_n(x_3)]\\
=\ & F_n(x_1,x_2,x_3) - \varepsilon(x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)g_n(x_1) + \varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)g_n(x_2) - D(x_1,x_2)g_n(x_3).
\end{aligned}$$

于是

$$F_n^{'}(x_1,x_2,x_3) = F_n(x_1,x_2,x_3) - d^1 g_n(x_1,x_2,x_3) = 0.$$

可得 $f_t^{'} = F_0 + \Sigma_{i\geq n+1} F_i^{'} t^i$. 由归纳法, 有 $f_t \sim F_0$, 故 T 是解析刚性的.

4 李 color 三系的 Nijenhuis 算子

设 T 是李 color 三系, $\psi: T\times T\times T \to T$ 是三线性映射. 考虑线性算子的 λ- 参数簇:

$$[x_1,x_2,x_3]_\lambda = [x_1,x_2,x_3] + \lambda\psi(x_1,x_2,x_3), \tag{4.1}$$

其中 $x_1,x_2,x_3 \in T$, λ 为变量.

若 T 对式 (4.1) 定义的运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]_\lambda$ 构成李 color 三系, 记为 T_λ, 则称 ψ 生成 λ- 参数李 color 三系 T 的无穷小形变.

定理 4.1 设 T 是李 color 三系, 则 T_λ 是李 color 三系当且仅当

(1) ψ 在 T 上定义李 color 三系 ;

(2) ψ 是 T 的 3- 余循环.

证 ($\Rightarrow$) 若 T_λ 是李 color 三系, 则 $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in T$, 有

$$[x_1,x_2,x_3]_\lambda = [x_1,x_2,x_3] + \lambda\psi(x_1,x_2,x_3) = -\varepsilon(x_1,x_2)[x_2,x_1,x_3] + \lambda\psi(x_1,x_2,x_3),$$
$$[x_1,x_2,x_3]_\lambda = -\varepsilon(x_1,x_2)[x_2,x_1,x_3]_\lambda = -\varepsilon(x_1,x_2)[x_2,x_1,x_3] - \varepsilon(x_1,x_2)\lambda\psi(x_2,x_1,x_3).$$

于是

$$\psi(x_1,x_2,x_3) = -\varepsilon(x_1,x_2)\psi(x_2,x_1,x_3). \tag{4.2}$$

由于

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& \varepsilon(x_3,x_1)[x_1,x_2,x_3]_\lambda + \varepsilon(x_1,x_2)[x_2,x_3,x_1]_\lambda + \varepsilon(x_2,x_3)[x_3,x_1,x_2]_\lambda \\ =\;& \varepsilon(x_3,x_1)[x_1,x_2,x_3] + \varepsilon(x_3,x_1)\lambda\psi(x_1,x_2,x_3) + \varepsilon(x_1,x_2)[x_2,x_3,x_1] + \varepsilon(x_1,x_2)\lambda\psi(x_2,x_3,x_1) \\ &+\varepsilon(x_2,x_3)[x_3,x_1,x_2] + \varepsilon(x_2,x_3)\lambda\psi(x_3,x_1,x_2) \\ =\;& \varepsilon(x_3,x_1)[x_1,x_2,x_3] + \varepsilon(x_1,x_2)[x_2,x_3,x_1] + \varepsilon(x_2,x_3)[x_3,x_1,x_2] \\ &+\lambda(\varepsilon(x_3,x_1)\psi(x_1,x_2,x_3) + \varepsilon(x_1,x_2)\psi(x_2,x_3,x_1) + \varepsilon(x_2,x_3)\psi(x_3,x_1,x_2)), \end{aligned}$$

可得

$$\varepsilon(x_3,x_1)\psi(x_1,x_2,x_3) + \varepsilon(x_1,x_2)\psi(x_2,x_3,x_1) + \varepsilon(x_2,x_3)\psi(x_3,x_1,x_2) = 0. \tag{4.3}$$

令 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in T$, 考虑下面等式

$$\begin{aligned} [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_\lambda]_\lambda =& [[x_1,x_2,x_3]_\lambda,x_4,x_5]_\lambda + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)[x_3,[x_1,x_2,x_4]_\lambda,x_5]_\lambda \\ &+ \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_\lambda]_\lambda, \end{aligned} \tag{4.4}$$

式 (4.4) 左端等价于

$$\begin{aligned} & [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5] + \lambda\psi(x_3,x_4,x_5)]_\lambda \\ =\;& [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5] + \lambda\psi(x_3,x_4,x_5)] + \lambda\psi(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5] + \lambda\psi(x_3,x_4,x_5)) \\ =\;& [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]] + \lambda([x_1,x_2,\psi(x_3,x_4,x_5)] + \psi(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])) \\ &+\lambda^2\psi(x_1,x_2,\psi(x_3,x_4,x_5)), \end{aligned}$$

式 (4.4) 右端等价于

$$\begin{aligned} & [[x_1,x_2,x_3] + \lambda\psi(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5]_\lambda + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)[x_3,[x_1,x_2,x_4] + \lambda\psi(x_1,x_2,x_4),x_5]_\lambda \\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5] + \lambda\psi(x_1,x_2,x_5)]_\lambda \\ =\;& [[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5] + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)[x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5] \\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]] \\ &+\lambda\{[\psi(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5] + \psi([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3)[x_3,\psi(x_1,x_2,x_4),x_5] \\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)\psi(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)[x_3,x_4,\psi(x_1,x_2,x_5)] \\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)\psi(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5])\} + \lambda^2\{\psi(\psi(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5) \\ &+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)\psi(x_3,\psi(x_1,x_2,x_4),x_5) + \varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)\psi(x_3,x_4,\psi(x_1,x_2,x_5))\}. \end{aligned}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}&[x_1,x_2,\psi(x_3,x_4,x_5)]+\psi(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])\\=&[\psi(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5]+\psi([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)[x_3,\psi(x_1,x_2,x_4),x_5]\\&+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)\psi(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)[x_3,x_4,\psi(x_1,x_2,x_5)]\\&+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)\psi(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]),\end{aligned}\tag{4.5}$$

和

$$\begin{aligned}&\psi(x_1,x_2,\psi(x_3,x_4,x_5))\\=&\psi(\psi(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)\psi(x_3,\psi(x_1,x_2,x_4),x_5)\\&+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)\psi(x_3,x_4,\psi(x_1,x_2,x_5)).\end{aligned}\tag{4.6}$$

由式 (4.2), 式 (4.3) 和式 (4.6) 知 ψ 在 T 上定义李 color 三系.

利用 $\theta(a,b)(x)=\varepsilon(a+b,x)[x,a,b]$ 和 $D(a,b)(x)=[a,b,x]$, 式 (4.5) 可写为

$$\begin{aligned}0=&-D(x_1,x_2)\psi(x_3,x_4,x_5)-\psi(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])\\&+\varepsilon(x_1+x_2+x_3,x_4+x_5)\theta(x_4,x_5)\psi(x_1,x_2,x_3)+\psi([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)\\&-\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_5)\varepsilon(x_4,x_5)\theta(x_3,x_5)\psi(x_1,x_2,x_4)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3)\psi(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)\\&+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)D(x_3,x_4)\psi(x_1,x_2,x_5)+\varepsilon(x_1+x_2,x_3+x_4)\psi(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5])\\=&d^3\psi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).\end{aligned}$$

因此 $d^3\psi=0$.

($\Leftarrow$) 若 ψ 满足条件 (1) 和 (2), 易证 T_λ 是李 color 三系.

定义 4.2 设 T 是李 color 三系, 若存在线性映射 $N:T\to T$, 使得 $\varphi_\lambda=\mathrm{id}+\lambda N:T_\lambda\to T$ 满足

$$\varphi_\lambda[x_1,x_2,x_3]_\lambda=[\varphi_\lambda x_1,\varphi_\lambda x_2,\varphi_\lambda x_3],\tag{4.7}$$

则称形变 N 是平凡的. 其中 $x_1,x_2,x_3\in T$, λ 为变量.

易知, 等式 (4.7) 左端等价于

$$[x_1,x_2,x_3]+\lambda\{\psi(x_1,x_2,x_3)+N[x_1,x_2,x_3]\}+\lambda^2N\psi(x_1,x_2,x_3),$$

等式 (4.7) 右端等价于

$$\begin{aligned}&[x_1,x_2,x_3]+\lambda\{[Nx_1,x_2,x_3]+[x_1,Nx_2,x_3]+[x_1,x_2,Nx_3]\}\\&+\lambda^2\{[Nx_1,Nx_2,x_3]+[x_1,Nx_2,Nx_3]+[Nx_1,x_2,Nx_3]\}+\lambda^3[Nx_1,Nx_2,Nx_3],\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\psi(x_1,x_2,x_3)\\=&[Nx_1,x_2,x_3]+[x_1,Nx_2,x_3]+[x_1,x_2,Nx_3]-N[x_1,x_2,x_3]\\=&\varepsilon(x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)Nx_1-\varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)Nx_2+D(x_1,x_2)Nx_3-N[x_1,x_2,x_3]\\=&d^1N(x_1,x_2,x_3),\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$N\psi(x_1,x_2,x_3)=[Nx_1,Nx_2,x_3]+[x_1,Nx_2,Nx_3]+[Nx_1,x_2,Nx_3], \tag{4.9}$$

$$[Nx_1,Nx_2,Nx_3]=0. \tag{4.10}$$

由式 (4.8) 和式 (4.9), 可得

$$\begin{aligned}N^2[x_1,x_2,x_3]=&N[Nx_1,x_2,x_3]+N[x_1,Nx_2,x_3]+N[x_1,x_2,Nx_3]\\&-[Nx_1,Nx_2,x_3]-[x_1,Nx_2,Nx_3]-[Nx_1,x_2,Nx_3].\end{aligned} \tag{4.11}$$

记

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]_N, \tag{4.12}$$

则式 (4.9) 等价于

$$N[x_1,x_2,x_3]_N=[Nx_1,Nx_2,x_3]+[x_1,Nx_2,Nx_3]+[Nx_1,x_2,Nx_3]. \tag{4.13}$$

定义 4.3 若式 (4.10) 和式 (4.11) 成立, 则称线性算子 $N:T\to T$ 为 Nijenhuis 算子.

定理 4.4 设 N 是 T 的 Nijenhuis 算子, 则 T 的形变可由以下定义得到

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=\varepsilon(x_1,x_2+x_3)\theta(x_2,x_3)Nx_1-\varepsilon(x_2,x_3)\theta(x_1,x_3)Nx_2+D(x_1,x_2)Nx_3-N[x_1,x_2,x_3].$$

并且, 该形变是平凡的.

证 显然 $\psi=dN$ 且 $d\psi=d^2N=0$, 因此 ψ 是 T 的 3- 余循环. 下面证明式 (2.3) 成立. 考虑式 (4.8), 式 (4.12) 和式 (4.13), 推得

$$\begin{aligned}
&\psi(x_1,x_2,\psi(y_1,y_2,y_3))\\
=\ &[x_1,x_2,[Ny_1,y_2,y_3]+[y_1,Ny_2,y_3]+[y_1,y_2,Ny_3]-N[y_1,y_2,y_3]]_N\\
=\ &[x_1,x_2,[Ny_1,y_2,y_3]]_N+[x_1,x_2,[y_1,Ny_2,y_3]]_N+[x_1,x_2,[y_1,y_2,Ny_3]]_N\\
&-[x_1,x_2,N[y_1,y_2,y_3]]_N\\
=\ &[Nx_1,x_2,[Ny_1,y_2,y_3]]+[x_1,Nx_2,[Ny_1,y_2,y_3]]+[x_1,x_2,N[Ny_1,y_2,y_3]]\\
&-N[x_1,x_2,[Ny_1,y_2,y_3]]+[Nx_1,x_2,[y_1,Ny_2,y_3]]+[x_1,Nx_2,[y_1,Ny_2,y_3]]\\
&+[x_1,x_2,N[y_1,Ny_2,y_3]]-N[x_1,x_2,[y_1,Ny_2,y_3]]+[Nx_1,x_2,[y_1,y_2,Ny_3]]\\
&+[x_1,Nx_2,[y_1,y_2,Ny_3]]+[x_1,x_2,N[y_1,y_2,Ny_3]]-N[x_1,x_2,[y_1,y_2,Ny_3]]\\
&-[Nx_1,x_2,N[y_1,y_2,y_3]]-[x_1,Nx_2,N[y_1,y_2,y_3]]-[x_1,x_2,N^2[y_1,y_2,y_3]]\\
&+N[x_1,x_2,N[y_1,y_2,y_3]]\\
=\ &[Nx_1,x_2,[Ny_1,y_2,y_3]]+[x_1,Nx_2,[Ny_1,y_2,y_3]]-N[x_1,x_2,[Ny_1,y_2,y_3]]\\
&+[Nx_1,x_2,[y_1,Ny_2,y_3]]+[x_1,Nx_2,[y_1,Ny_2,y_3]]-N[x_1,x_2,[y_1,Ny_2,y_3]]\\
&+[Nx_1,x_2,[y_1,y_2,Ny_3]]+[x_1,Nx_2,[y_1,y_2,Ny_3]]-N[x_1,x_2,[y_1,y_2,Ny_3]]\\
&-[Nx_1,x_2,N[y_1,y_2,y_3]]-[x_1,Nx_2,N[y_1,y_2,y_3]]+N[x_1,x_2,N[y_1,y_2,y_3]]\\
&+[x_1,x_2,[Ny_1,Ny_2,y_3]]+[x_1,x_2,[Ny_1,y_2,Ny_3]]+[x_1,x_2,[y_1,Ny_2,Ny_3]],
\end{aligned}$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
& \psi(\psi(x_1,x_2,y_1),y_2,y_3) \\
= \; & [[Nx_1,x_2,y_1],Ny_2,y_3]+[[Nx_1,x_2,y_1],y_2,Ny_3]-N[[Nx_1,x_2,y_1],y_2,y_3] \\
& +[[x_1,Nx_2,y_1],Ny_2,y_3]+[[x_1,Nx_2,y_1],y_2,Ny_3]-N[[x_1,Nx_2,y_1],y_2,y_3] \\
& +[[x_1,x_2,Ny_1],Ny_2,y_3]+[[x_1,x_2,Ny_1],y_2,Ny_3]-N[[x_1,x_2,Ny_1],y_2,y_3] \\
& -[N[x_1,x_2,y_1],Ny_2,y_3]-[N[x_1,x_2,y_1],y_2,Ny_3]+N[N[x_1,x_2,y_1],y_2,y_3] \\
& +[[Nx_1,Nx_2,y_1],y_2,y_3]+[[Nx_1,x_2,Ny_1],y_2,y_3]+[[x_1,Nx_2,Ny_1],y_2,y_3],
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
& \psi(y_1,\psi(x_1,x_2,y_2),y_3) \\
= \; & [Ny_1,[Nx_1,x_2,y_2],y_3]+[y_1,[Nx_1,x_2,y_2],Ny_3]-N[y_1,[Nx_1,x_2,y_2],y_3] \\
& +[Ny_1,[x_1,Nx_2,y_2],y_3]+[y_1,[x_1,Nx_2,y_2],Ny_3]-N[y_1,[x_1,Nx_2,y_2],y_3] \\
& +[Ny_1,[x_1,x_2,Ny_2],y_3]+[y_1,[x_1,x_2,Ny_2],Ny_3]-N[y_1,[x_1,x_2,Ny_2],y_3] \\
& -[Ny_1,N[x_1,x_2,y_2],y_3]-[y_1,N[x_1,x_2,y_2],Ny_3]+N[y_1,N[x_1,x_2,y_2],y_3] \\
& +[y_1,[Nx_1,Nx_2,y_2],y_3]+[y_1,[Nx_1,x_2,Ny_2],y_3]+[y_1,[x_1,Nx_2,Ny_2],y_3],
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
& \psi(y_1,y_2,\psi(x_1,x_2,y_3)) \\
= \; & [Ny_1,y_2,[Nx_1,x_2,y_3]]+[y_1,Ny_2,[Nx_1,x_2,y_3]]-N[y_1,y_2,[Nx_1,x_2,y_3]] \\
& +[Ny_1,y_2,[x_1,Nx_2,y_3]]+[y_1,Ny_2,[x_1,Nx_2,y_3]]-N[y_1,y_2,[x_1,Nx_2,y_3]] \\
& +[Ny_1,y_2,[x_1,x_2,Ny_3]]+[y_1,Ny_2,[x_1,x_2,Ny_3]]-N[y_1,y_2,[x_1,x_2,Ny_3]] \\
& -[Ny_1,y_2,N[x_1,x_2,y_3]]-[y_1,Ny_2,N[x_1,x_2,y_3]]+N[y_1,y_2,N[x_1,x_2,y_3]] \\
& +[y_1,y_2,[Nx_1,Nx_2,y_3]]+[y_1,y_2,[Nx_1,x_2,Ny_3]]+[y_1,y_2,[x_1,Nx_2,Ny_3]],
\end{aligned}
$$

易知 $N\in C^1(T)$, 由式 (2.3), 式 (4.13) 和定理 4.1 可得

$$
\begin{aligned}
& \psi(x_1,x_2,\psi(y_1,y_2,y_3))-\psi(\psi(x_1,x_2,y_1),y_2,y_3) \\
& -\varepsilon(x_1+x_2,y_1)\psi(y_1,\psi(x_1,x_2,y_2),y_3)-\varepsilon(x_1+x_2,y_1+y_2)\psi(y_1,y_2,\psi(x_1,x_2,y_3)) \\
= \; & 0.
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] 张庆成. 李 color 代数及其相关问题研究 [D]. 长春: 东北师范大学博士学位论文, 2007.
[2] 贾志鹏, 张庆成. 李 color 三系的幂零理想 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2011, 49(4): 674–678.
[3] 张健, 曹燕. 李 color 三系的 Frattini 子系的性质 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(15): 274–277.

[4] 张健, 曹燕. 李 color 三系的型心 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2018, 35(1): 22–25.

[5] 张健, 曹燕. 李 color 三系的导子、广义导子和拟导子 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2018, 50(3): 13–16.

[6] 曹燕. 李 color 三系的拟导子 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2019, 57(4): 849–852.

[7] Cao Yan, Zhang Jian, Cui Yunan. On split Lie color triple systems[J]. Open Mathematics, 2019, 17(1): 267–281.

[8] Yamaguti K. On the cohomology space of Lie triple system[J]. Kumamoto Journal of Science Ser A, 1960, 5: 44–52.

[9] Kubo F, Taniguchi Y. A controlling cohomology of the deformation theory of Lie triple systems[J]. Journal of Algebra, 2004, 278(1): 242–250.

[10] Ma Lili, Chen Liangyun. On Jordan Lie triple systems[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2017, 65(4): 731–751.

[11] 马丽丽, 王晓燕, 吕莉娇. Hom- 李三系的 Nijenhuis 算子 [J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(13): 230–235.

[12] 郭双建. 李超三系的上同调和 Nijenhuis 算子 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2020, 2020(4): 1–11.

[13] 郭双建. Hom- 李超三系的上同调和形变 [J]. 华中师范大学学报 (自然科学版), 2020, 54(5): 758–765.

COHOMOLOGY AND NIJENHUIS OPERATORS OF LIE COLOR SYSTEMS

ZHANG Wan-ying, CAO Yan

(*School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China*)

Abstract: In this paper, we study the cohomology structure and the Nijenhuis operator of the Lie color triple systems. Using the cohomology of the Lie triple systems and the study of the Nijenhuis operator, the upper boundary operator of the Lie color triple systems is constructed, and the one-parameter formal deformation of the Lie color triple systems is given. The sufficient and necessary conditions for linear maps to generate infinitesimal transformations are generalized, while the deformation produced by the Nijenhuis operator of a Lie color triple systems is proved to be trivial.

Keywords: Lie color triple system; representation; cohomology; deformation; Nijenhuis operator

2010 MR Subject Classification: 17B75; 17A60; 17B10; 17B56