Vol. 42 (2022)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类固定时刻线性脉冲微分方程解的存在唯一性

李宝麟, 宋国鑫
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了一类固定时刻线性脉冲微分方程解的存在唯一性问题, 利用广义常微分方程理论, 证明了此类脉冲微分方程初值问题解的整体存在唯一性定理, 推广了具有逐段连续系数的线性脉冲微分方程解的整体存在唯一性结果.

关键词: 线性脉冲微分方程; Kurzweil 积分; 广义常微分方程; 存在唯一性
MR(2010) **主题分类号:** 34A12; 34A37; 26A39 **中图分类号:** O175.12
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2022)06-0549-13

1 引言

脉冲现象是一种瞬时突变现象, 在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的, 其数学模型往往可归结为脉冲微分系统, 其最突出的特点是能够充分考虑到瞬间突发现象对系统状态的影响. 对于脉冲时刻固定的脉冲微分系统, 大量的研究工作已取得一系列重要成果 [1][2]. 文献 [1], [2] 主要应用 Riemann 积分与经典常微分方程的理论研究脉冲微分方程. 对于齐次线性脉冲微分方程

$$\begin{cases} x' = P(t)x, & t \neq t_i,\ i \in \mathbb{Z}, \\ \Delta x|_{t=t_i} = C_i x, & i \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

文献 [2] 考察了其解的存在唯一性与基解矩阵的存在性, 并得出了非齐次线性脉冲微分方程

$$\begin{cases} x' = P(t)x + Q(t), & t \neq t_i,\ i \in \mathbb{Z}, \\ \Delta x|_{t=t_i} = C_i x + g_i, & i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

的常数变易公式, 其中

$$\Delta x|_{t=t_i} = \lim_{t \to t_i^+} x(t) - x(t_i),\ i \in \mathbb{Z},$$

函数 $P : \mathbb{R} \to L(\mathbb{C}^n)$ 与 $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ 均在 $\mathbb{R}\backslash\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 上连续, $L(\mathbb{C}^n)$ 为复 $n \times n$ 矩阵全体, $\mathbb{C}^n$ 为复 n 维欧氏空间, $\mathbb{Z}$ 为整数集, $\{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset L(\mathbb{C}^n)$, $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}^n$, 数列 $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 严格递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

Kurzweil 于 1957 年提出的广义常微分理论为脉冲微分方程的研究提供了新方法, 文献 [3] 在函数 $f : \overline{B} \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 关于第二变元具有某些不连续性质的条件下局部地讨论了非线性脉冲微分方程

$$\begin{cases} x' = f(x, t)\ a.e.\ \text{于}\ [a, b]\backslash\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}, \\ \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x(t_i)),\ i = 1, 2, \cdots, k \end{cases}$$

*收稿日期: 2021-02-01 接收日期: 2021-05-24
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11761063).
作者简介: 李宝麟 (1963–), 男, 甘肃天水, 教授, 主要研究方向: 常微分方程与动力系统.

与一类广义常微分方程之间的等价关系, 其中算子 $I_i:\overline{B}\to\mathbb{R}^n$ 连续, $i=1,2,\cdots,k$,

$$\Delta x|_{t=t_i}=\lim_{t\to t_i^+}x(t)-x(t_i),\ i=1,2,\cdots,k,$$

$$a\le t_1<t_2<\cdots<t_k\le b,$$

$\overline{B}=\{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|\le C\}$, $C>0$, $\mathbb{R}^n$ 为实 n 维欧氏空间, $\|\cdot\|$ 表示其欧氏范数. 利用上述等价关系及广义常微分方程解关于初值与参数的可微性定理, 文献 [4] 研究了脉冲微分方程解关于初值与参数的可微性. 文献 [5] 将文献 [3] 中广义常微分方程的适定性结果推广至一般 Banach 空间中的广义常微分方程, 并将所得结论应用于无限滞后型脉冲泛函微分方程, 讨论其解的局部存在唯一性及解相对于初值与参数的连续依赖性.

作为整数阶脉冲微分方程的推广, 分数阶脉冲微分方程已受到广泛关注, 这一领域的研究现已取得了诸多新成果, 文献 [6], [7] 利用非线性泛函分析理论分别研究了一类在无界区间上具有可列多个脉冲时刻的分数阶脉冲微分方程解的存在性与一类分数阶脉冲微分方程边值问题正解的存在唯一性. 文献 [8] 研究了一类分数阶脉冲微分方程解的振动性, 并举出相应的算例验证所得结果.

本文将弱化文献 [2] 中函数 P 与 Q 连续的条件, 推广文献 [3] 中的结论, 在整个无界区间 $[t_0,+\infty)$ 上建立线性脉冲微分方程初值问题 (IVP)

$$\begin{cases} x'=P(t)x+Q(t)\ a.e.\ \text{于}\ [t_0,+\infty)\backslash\{t_i\}_{i=1}^{\infty},\\ \Delta x|_{t=t_i}=\lim\limits_{t\to t_i^+}x(t)-x(t_i)=C_ix(t_i),\ i\in\mathbb{N}_+,\\ x(t_0)=x_0. \end{cases}\tag{1.1}$$

与一类广义线性常微分方程初值问题之间的等价关系, 并研究 IVP(1.1) 解的整体存在唯一性, 其中函数 $P:[t_0,+\infty)\to L(\mathbb{R}^n)$ 与 $Q:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 局部 Lebesgue 可积, $L(\mathbb{R}^n)$ 表示实 n 阶方阵全体, $\mathbb{N}_+$ 为正整数集, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}\subset L(\mathbb{R}^n)$, 数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}\subset(t_0,+\infty)$ 严格递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$.

本文共分为三部分, 第二部分介绍文中所用到的基本概念及引理; 第三部分利用 Kurzweil 积分与广义常微分方程理论证明 IVP(1.1) 与一类广义线性常微分方程初值问题之间存在等价关系, 并建立 IVP(1.1) 解的整体存在唯一性定理.

2 预备知识

本节将简要介绍 Kurzweil 积分, 广义常微分方程与正则函数的相关定义和结论.

在本文后续讨论中仍设 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ 为实 n 维欧氏空间, 且 $L(\mathbb{R}^n)$ 为实 n 阶方阵全体, 其中 $\|\cdot\|$ 为欧氏范数, 并对任意 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in L(\mathbb{R}^n)$, 规定 $\|A\|_1=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$.

称有限集 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),\ i=1,2,\cdots,k\}$ 为区间 $[a,b]$ 的一个分划, 如果

$$a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=b,$$

$$\alpha_{i-1}\le\tau_i\le\alpha_i,\ i=1,2,\cdots,k.$$

给定正值函数 $\delta:[a,b]\to(0,+\infty)$, 称 $[a,b]$ 的分划 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),\ i=1,2,\cdots,k\}$ 是 $\delta-$ 精细的, 如果对每个 $i=1,2,\cdots,k$ 都有 $[\alpha_{i-1},\alpha_i]\subset(\tau_i-\delta(\tau_i),\tau_i+\delta(\tau_i))$.

另外, 由文献 [3] 引理 1.4, 若给定区间 $[a,b]$ 与正值函数 $\delta:[a,b]\to(0,+\infty)$, 则 $[a,b]$ 一定存在 $\delta-$ 精细分划 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),\ i=1,2,\cdots,k\}$.

定义 2.1 [3] 称函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 在区间 $[a,b]$ 上 Kurzweil 可积, 如果存在向量 $I\in\mathbb{R}^n$, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正值函数 $\delta:[a,b]\to(0,+\infty)$, 使得对 $[a,b]$ 的任何 $\delta-$ 精细分划 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),\ i=1,2,\cdots,k\}$ 都有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}(U(\tau_i,\alpha_i)-U(\tau_i,\alpha_{i-1}))-I\right\|<\varepsilon.$$

此时定义 $\int_a^b DU(\tau,t)=I$ 为 U 在 $[a,b]$ 上的 Kurzweil 积分.

特别地, 若 $U(\tau,t)=f(\tau)\cdot t$, 其中 $\tau,\ t\in[a,b]$, 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 则记

$$\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}s;$$

若 $U(\tau,t)=f(\tau)g(t)$, 其中 $\tau,\ t\in[a,b]$, 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, 则记

$$\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s),$$

并称 $\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$ 为 Kurzwei–Stieltjes 积分. 现举以下两例辅助理解 Kurzweil 积分.

例 2.2 [9] 考察 Kurzweil 积分 $\int_0^1 D[t\cdot D(\tau)]$, 其中

$$D(\tau)=\begin{cases}1,\ \tau\in[0,1]\ \text{为有理数},\\ 0,\ \tau\in[0,1]\ \text{为无理数},\end{cases}$$

设 $t\cdot D(\tau)=U(\tau,t),\ \tau,\ t\in[0,1]$, 记 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[0,1]$ 中全体有理数所成之集, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 取

$$\delta(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\in[0,1]\ \text{为无理数},\\ \varepsilon\cdot 2^{-(n+1)}, & \tau=t_n,\ n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

又设 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),\ i=1,2,\cdots,k\}$ 为 $[0,1]$ 的任意 $\delta-$ 精细分划, 则

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{k}[U(\tau_i,\alpha_i)-U(\tau_i,\alpha_{i-1})]-0\right|=\left|\sum_{\tau_i\in\{r_n\}_{n=1}^{\infty}}D(\tau_i)(\alpha_i-\alpha_{i-1})\right|\\ &\le\sum_{\tau_i\in\{r_n\}_{n=1}^{\infty}}|D(\tau_i)|(\alpha_i-\alpha_{i-1})\le\sum_{\tau_i\in\{r_n\}_{n=1}^{\infty}}2\delta(\tau_i)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此由定义 2.1,

$$\int_0^1 D[t\cdot D(\tau)]=\int_0^1 DU(\tau,t)=0.$$

事实上, Kurzweil 积分包含 Riemann 积分与 Lebesgue 积分.

例 2.3 [10] 函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ 2t\sin\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}\cos\frac{2}{t^2}, & t\in(0.1]\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上非 Lebesgue 可积, 但在 $[0,1]$ 上 Kurzweil 可积, 即 Kurzweil 积分

$$\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 D[f(\tau)\cdot t]$$

存在. 同样, Kurzwei–Stieltjes 积分包含 Lebesgue–Stieltjes 积分.

另外, 由 Kurzweil 积分的定义不难证明, 若在 $[a,b]\times[a,b]$ 上 $U(\tau,t)$ 仅是关于变量 τ 的函数, 即对任意 $\tau,\ t_1,\ t_2\in[a,b]$ 都有 $U(\tau,t_1)=U(\tau,t_2)$, 则 $\int_a^b DU(\tau,t)=0$.

定理 2.4 [3] 设对任意 $c\in(a,b]$, 函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 在区间 $[c,b]$ 上 Kurzweil 可积, 且极限

$$\lim_{c\to a^+}\left[\int_c^b DU(\tau,t)+U(a,c)-U(a,a)\right]$$

存在, 则 U 在 $[a,b]$ 上 Kurzweil 可积, 且

$$\int_a^b DU(\tau,t)=\lim_{c\to a^+}\left[\int_c^b DU(\tau,t)+U(a,c)-U(a,a)\right].$$

定义 2.5 [3] 设 $O\subset\mathbb{R}^n$, 区间 $J\subset\mathbb{R}$ 且函数 $F:O\times J\to\mathbb{R}^n$, 称定义在 J 的子区间 P 上的函数 $x:P\to O$ 为广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t) \tag{2.1}$$

的解, 如果对任意 $s_1,\ s_2\in P$ 都有 $x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t)$. 特别地, 称

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=D[A(t)x+g(t)] \tag{2.2}$$

为广义线性常微分方程, 其中函数 $A:J\to L(\mathbb{R}^n)$, $g:J\to\mathbb{R}^n$ 均在 J 上局部有界变差 (即 $A:J\to L(\mathbb{R}^n)$ 与 $g:J\to\mathbb{R}^n$ 均在 J 的任何闭子区间上有界变差). 事实上, 这是在广义常微分方程 (2.1) 中取 $F(x,t)=A(t)x+g(t)$ 的特殊情形. 在后续讨论中以符号 $\int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}[A(s)]x(s)$ 代替 $\int_{s_1}^{s_2}D[A(t)x(\tau)]$.

引理 2.6 [3] 若函数 $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是广义线性常微分方程 (2.2) 在 $[a,b]$ 上的解, 则 x 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

定理 2.7 [3] 设 J 是一个区间 (有界或无界), 函数 $A:J\to L(\mathbb{R}^n)$ 与 $g:J\to\mathbb{R}^n$ 均在 J 上局部有界变差, 又设对 J 的任意内点 t 都有

$$\det(I-[A(t)-A(t^-)])\cdot\det(I+[A(t^+)-A(t)])\neq 0,$$

且当 $\alpha=\inf J\in J$ 时,

$$\det(I+[A(\alpha^+)-A(\alpha)])\neq 0;$$

当 $\beta = \sup J \in J$ 时,

$$\det(I - [A(\beta) - A(\beta^-)]) \neq 0,$$

其中 I 为 $n \times n$ 单位矩阵, 则对任意 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times J$, 广义线性常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = D[A(t)x + g(t)], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

在 J 上存在唯一解 $x : J \to \mathbb{R}^n$, 并且 x 在 J 上局部有界变差.

引理 2.8 [3] 设 $[a,b] \subset J$, 函数 $x : [a,b] \to O$ 是广义线性常微分方程 (2.2) 在 $[a,b]$ 上的解, 则对任意 $s \in [a,b)$,

$$x(s^+) - x(s) = [A(s^+) - A(s)]x(s) + g(s^+) - g(s),$$

对任意 $s \in (a,b]$,

$$x(s) - x(s^-) = [A(s) - A(s^-)]x(s) + g(s) - g(s^-).$$

称 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 为正则函数, 如果对于任意 $s \in (a,b]$ 及任意 $s \in [a,b)$, 极限 $f(s^-) = \lim\limits_{t \to s^-} f(t)$ 与 $f(s^+) = \lim\limits_{t \to s^+} f(t)$ 分别存在. 特别地, 有界变差函数一定是正则函数, 且定义在某个闭区间上的正则函数一定有界.

引理 2.9 [3] 设闭球 $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq C\}$, 其中 $C > 0$, 函数 $f : \overline{B} \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 满足:

(i) 对任意固定的 $x \in \overline{B}$, 函数 $f(x, \cdot)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可测;

(ii) 存在 Lebesgue 可积函数 $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ 使得 $\|f(x,s)\| \leq m(s)$ 对任意 $(x,s) \in \overline{B} \times [a,b]$ 都成立;

(iii) 存在 Lebesgue 可积函数 $l : [a,b] \to \mathbb{R}$ 使得 $\|f(x,s) - f(y,s)\| \leq l(s)\|x - y\|$ 对任意 (x,s), (y,s) $\in \overline{B} \times [a,b]$ 都成立.

令

$$\widetilde{F}(x,t) = \int_a^t f(x,s)\mathrm{d}s,\ (x,t) \in \overline{B} \times [a,b],$$

若 $x : [a,b] \to \overline{B}$ 是正则函数, 则 Kurzweil 积分 $\int_a^b D\widetilde{F}(x(\tau),t)$ 与 Lebesgue 积分 $\int_a^b f(x(s),s)\mathrm{d}s$ 均存在且相等.

引理 2.10 [3] 设 $A : [a,b] \to L(\mathbb{R}^n)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 是 $[a,b]$ 上的正则函数, 则 Kurzweil 积分 $\int_a^b \mathrm{d}[A(s)]x(s)$ 存在.

3 主要结果

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\{C_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L(\mathbb{R}^n)$, 数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (t_0, +\infty)$ 满足

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$$

且 $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = +\infty$. 又设 $P : [t_0, +\infty) \to L(\mathbb{R}^n)$ 为 $n \times n$ 矩阵值函数, $Q : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ 为 n 维列向量函数, 且 P, Q 均在 $[t_0, +\infty)$ 上局部 Lebesgue 可积. 本节先建立脉冲微分方程初值

问题 (IVP)

$$\begin{cases} x' = P(t)x + Q(t)\ a.e.\ \text{于}\ [t_0,+\infty)\backslash\{t_i\}_{i=1}^{\infty}, \\ \Delta x|_{t=t_i} = x(t_i^+) - x(t_i) = C_i x(t_i),\ i \in \mathbb{N}_+, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

与广义线性常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = D[A(t)x + g(t)], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

解之间的等价关系, 其中

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} P(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i,\ t \in [t_0,+\infty),$$

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} Q(s)\mathrm{d}s,\ t \in [t_0,+\infty),$$

且对每个 $i \in \mathbb{N}_+$,

$$H_{t_i}(t) = \begin{cases} 0,\ t \le t_i, \\ 1,\ t > t_i. \end{cases}$$

进一步建立 IVP(1.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上解的整体存在唯一性定理.

对于 IVP(1.1) 的解, 有以下定义.

定义 3.1 称函数 $x : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ 为 IVP(1.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解, 如果

(i) $x(t_0) = x_0$;

(ii) $x'(t) = P(t)x(t) + Q(t)$ 在 $[t_0,+\infty)\backslash\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 上几乎处处成立;

(iii) 若 $[a,b] \subset [t_0,+\infty)$ 满足 $[a,b) \cap \{t_i\}_{i=1}^{\infty} = \varnothing$, 则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续;

(iv) $\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i^+) - x(t_i) = C_i x(t_i),\ i \in \mathbb{N}_+$.

引理 3.2 设

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} P(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i,\ t \in [t_0,+\infty),$$

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} Q(s)\mathrm{d}s,\ t \in [t_0,+\infty).$$

则 $A(t)$ 与 $g(t)$ 均在 $[t_0,+\infty)$ 上局部有界变差.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, 对任意固定的 $t \in [t_0,+\infty)$, 存在 $l \in \mathbb{N}_+$ 使得 $t \le t_{l+1}$, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i = \sum_{i=1}^{l} H_{t_i}(t)C_i,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i$ 收敛. 又 $P(t),\ Q(t)$ 均在 $[t_0,+\infty)$ 上局部 Lebesgue 可积, 故函数 $A(t)$ 与 $g(t)$ 均在 $[t_0,+\infty)$ 上有定义. 下证函数 $A(t)$ 与 $g(t)$ 均在 $[t_0,+\infty)$ 上局部有界变差.

任取 $[a,b]\subset[t_0,+\infty)$, 设 $S:a=s_0<s_1<\cdots s_l=b$ 为 $[a,b]$ 的任意分割, 则

$$\sum_{j=1}^{l}\|g(s_j)-g(s_{j-1})\|=\sum_{j=1}^{l}\|\int_{s_{j-1}}^{s_j}Q(s)\mathrm{d}s\|\le\sum_{j=1}^{l}\int_{s_{j-1}}^{s_j}\|Q(s)\|\mathrm{d}s=\int_a^b\|Q(s)\|\mathrm{d}s,$$

即 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 类似地,

$$\sum_{j=1}^{l}\left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j}P(s)\mathrm{d}s\right\|_1\le\sum_{j=1}^{l}\int_{s_{j-1}}^{s_j}\|P(s)\|_1\mathrm{d}s=\int_a^b\|P(s)\|_1\mathrm{d}s,$$

又

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{l}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(s_j)C_i-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(s_{j-1})C_i\right\|_1\le\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}[H_{t_i}(s_j)-H_{t_i}(s_{j-1})]\|C_i\|_1\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|C_i\|_1\sum_{j=1}^{l}[H_{t_i}(s_j)-H_{t_i}(s_{j-1})]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|C_i\|_1[H_{t_i}(b)-H_{t_i}(a)]\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\|C_i\|_1[H_{t_i}(b)-H_{t_i}(a)],\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l}\|A(s_j)-A(s_{j-1})\|_1&=\sum_{j=1}^{l}\left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j}P(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(s_j)C_i-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(s_{j-1})C_i\right\|_1\\&\le\sum_{j=1}^{l}\left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j}P(s)\mathrm{d}s\right\|_1+\sum_{j=1}^{l}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(s_j)C_i-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(s_{j-1})C_i\right\|_1\\&\le\int_a^b\|P(s)\|_1\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{\infty}\|C_i\|_1[H_{t_i}(b)-H_{t_i}(a)],\end{aligned}$$

即函数 $A(t)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差, 再由 $[a,b]\subset[t_0,+\infty)$ 的任意性, 函数 $A(t)$ 与 $g(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上局部有界变差.

设

$$F_1(x,t)=\int_{t_0}^{t}[P(s)x+Q(s)]\mathrm{d}s,\ (x,t)\in\mathbb{R}^n\times[t_0,+\infty),$$

则有如下引理.

引理 3.3 设 $[a,b]\subset[t_0,+\infty)$, $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 为正则函数, 则 Kurzweil 积分 $\int_a^b DF_1(x(\tau),t)$ 与 lebesgue 积分 $\int_a^b[P(s)x(s)+Q(s)]\mathrm{d}s$ 均存在且相等.

证 因为 $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 为正则函数, 所以存在常数 $C>0$, 使对任意 $t\in[a,b]$ 都有

$$\|x(t)\|\le C,$$

从而 x 映 $[a,b]$ 入 $\overline{B}=\{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|\le C\}$. 因函数 $P(t)$ 与 $Q(t)$ 均在 $[t_0,+\infty)$ 上局部 Lebesgue 可积, 故对一切固定的 $x\in\overline{B}$, 函数

$$f(x,t)=P(t)x+Q(t)$$

在 $[a,b]$ 上关于变量 t Lebesgue 可测, 且函数 $m(t) = C\|P(t)\|_1 + \|Q(t)\|$, $t \in [a,b]$ 与 $l(t) = \|P(t)\|_1$, $t \in [a,b]$ 均在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积.

另一方面, 对任意 (x,s), $(y,s) \in \overline{B} \times [a,b]$ 有

$$\|f(x,s)\| = \|P(s)x + Q(s)\| \le \|P(s)\|_1 \cdot \|x\| + \|Q(s)\| \le m(s),$$

且

$$\|f(x,s) - f(y,s)\| = \|P(s)(x-y)\| \le l(s)\|x-y\|.$$

再令 $\widetilde{F}(x,t) = \int_a^t f(x,s)\mathrm{d}s$, $(x,t) \in \overline{B} \times [a,b]$, 由引理 2.9, Kurzweil 积分 $\int_a^b D\widetilde{F}(x(\tau),t)$ 与 Lebesgue 积分 $\int_a^b f(x(s),s)\mathrm{d}s$ 均存在且相等, 于是

$$\int_a^b DF_1(x(\tau),t) = \int_a^b D\widetilde{F}(x(\tau),t) = \int_a^b f(x(s),s)\mathrm{d}s = \int_a^b [P(s)x(s) + Q(s)]\mathrm{d}s.$$

令 $F_2(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i x$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0,+\infty)$, 则

$$A(t)x + g(t) = F_1(x,t) + F_2(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0,+\infty),$$

且有如下引理.

引理 3.4 设区间 $[a,b] \subset [t_0,+\infty)$ 满足 $[a,b) \cap \{t_i\}_{i=1}^{\infty} = \varnothing$, 则对任意函数 $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 都有

$$\int_a^b DF_2(x(\tau),t) = 0.$$

证 因 $[a,b) \cap \{t_i\}_{i=1}^{\infty} = \varnothing$, 故 $[a,b] \subset [t_0,t_1]$ 或存在 $k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $[a,b] \subset (t_k,t_{k+1}]$.

当 $[a,b] \subset [t_0,t_1]$ 时, 对任意 $t \in [a,b]$ 都有 $t \le t_1$, 此时对任一函数 $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 有

$$F_2(x(\tau),t) = \sum_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i x(\tau) = 0,$$

故

$$\int_a^b DF_2(x(\tau),t) = 0;$$

当 $[a,b] \subset (t_k,t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}_+$ 时, 对任意 $t \in [a,b]$ 有 $t_k < t \le t_{k+1}$, 此时对任一函数 $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 有

$$F_2(x(\tau),t) = \sum_{i=1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i x(\tau) = \sum_{i=1}^{k} H_{t_i}(t)C_i x(\tau) + \sum_{i=k+1}^{\infty} H_{t_i}(t)C_i x(\tau) = \sum_{i=1}^{k} C_i x(\tau),$$

于是由 Kurzweil 积分的定义得 $\int_a^b DF_2(x(\tau),t) = 0$.

引理 3.5 设 $k\in\mathbb{N}_+$, $s\in(t_k,t_{k+1}]$, 则对任意函数 $x:[t_k,s]\to\mathbb{R}^n$, 都有

$$\int_{t_k}^{s} DF_2(x(\tau),t)=C_k x(t_k).$$

证 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, $s\in(t_k,t_{k+1}]$ 及任意 $\sigma\in(t_k,s)$ 显然有 $[\sigma,s)\cap\{t_i\}_{i=1}^{\infty}=\varnothing$, 因此由引理 3.4,

$$\int_{\sigma}^{s} DF_2(x(\tau),t)=0$$

对任意 $\sigma\in(t_k,s)$ 都成立. 由定理 2.4, 当 $k\in\mathbb{N}_+$, $k\geq 2$ 时,

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^{s} DF_2(x(\tau),t)&=\lim_{\sigma\to t_k^+}\left[\int_{\sigma}^{s} DF_2(x(\tau),t)+F_2(x(t_k),\sigma)-F_2(x(t_k),t_k)\right]\\&=\lim_{\sigma\to t_k^+}\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(\sigma)C_i x(t_k)-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t_k)C_i x(t_k)\\&=\sum_{i=1}^{k}C_i x(t_k)-\sum_{i=1}^{k-1}C_i x(t_k)\\&=C_k x(t_k),\end{aligned}$$

类似地,

$$\int_{t_1}^{s} DF_2(x(\tau),t)=\lim_{\sigma\to t_1^+}\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(\sigma)C_i x(t_1)-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t_1)C_i x(t_1)=C_1 x(t_1).$$

定理 3.6 函数 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是线性脉冲微分方程初值问题 (1.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解当且仅当 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是广义线性常微分方程初值问题 (3.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解.

证 必要性 设 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是 IVP(1.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解, 对任意 s_1, $s_2\in[t_0,+\infty)$, $s_1<s_2$, 分以下两种情形讨论:

当 $[s_1,s_2)\cap\{t_i\}_{i=1}^{\infty}=\varnothing$ 时, 由定义 3.1, x 在 $[s_1,s_2]$ 上绝对连续, 且

$$x'(s)=P(s)x(s)+Q(s)$$

a.e. 于 $[s_1,s_2]$, 因此由引理 3.3 及引理 3.4,

$$\begin{aligned}x(s_2)-x(s_1)&=\int_{s_1}^{s_2}x'(s)\mathrm{d}s\\&=\int_{s_1}^{s_2}[P(s)x(s)+Q(s)]\mathrm{d}s\\&=\int_{s_1}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)\\&=\int_{s_1}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)+\int_{s_1}^{s_2}DF_2(x(\tau),t)\\&=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t).\end{aligned}$$

当 $[s_1,s_2)\cap\{t_i\}_{i=1}^{\infty}\neq\varnothing$ 时, 不妨设存在 $k\in\mathbb{N}_+$, 使得 $t_k=s_1<s_2\le t_{k+1}$, 则由引理 3.3, 对任意 $\sigma\in(s_1,s_2)$ 有

$$x(s_2)-x(\sigma)=\int_{\sigma}^{s_2}x'(s)\mathrm{d}s=\int_{\sigma}^{s_2}[P(s)x(s)+Q(s)]\mathrm{d}s=\int_{\sigma}^{s_2}DF_1(x(\tau),t),$$

由引理 3.5,

$$x(t_k^+)-x(t_k)=C_kx(t_k)=\int_{t_k}^{s_2}DF_2(x(\tau),t)=\int_{s_1}^{s_2}DF_2(x(\tau),t).$$

再由定理 2.4 及 Lebesgue 积分的绝对连续性,

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)&=\int_{t_k}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)\\&=\lim_{\sigma\to t_k^+}\left[\int_{\sigma}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)+F_1(x(t_k),\sigma)-F_1(x(t_k),t_k)\right]\\&=\lim_{\sigma\to t_k^+}\int_{\sigma}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)+\lim_{\sigma\to t_k^+}\int_{t_k}^{\sigma}[P(s)x(t_k)+Q(s)]\mathrm{d}s\\&=x(s_2)-x(t_k^+),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}x(s_2)-x(s_1)&=x(s_2)-x(t_k)\\&=x(s_2)-x(t_k^+)+x(t_k^+)-x(t_k)\\&=\int_{s_1}^{s_2}DF_1(x(\tau),t)+\int_{s_1}^{s_2}DF_2(x(\tau),t)\\&=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t).\end{aligned}$$

综上所述, 对任意 $s_1,s_2\in[t_0,+\infty)$,

$$x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t)=\int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}[A(s)]x(s)+g(s_2)-g(s_1),$$

由定义 2.5, 函数 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是广义线性常微分方程初值问题 (3.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解.

充分性 设 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是 IVP(3.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解, 则由引理 2.6, 对任意固定的 $k\in\mathbb{N}_+$, x 是 $[t_k,t_{k+1}]$ 上的有界变差函数, 当然是正则函数, 因此由定义 2.5, 引理 3.3 及引理 3.5, 对每个固定的 $k\in\mathbb{N}_+$ 及任意 $s\in(t_k,t_{k+1})$ 有

$$\begin{aligned}x(s)-x(t_k)&=\int_{t_k}^{s}\mathrm{d}[A(\tau)]x(\tau)+g(s)-g(t_k)\\&=\int_{t_k}^{s}DF_1(x(\tau),t)+\int_{t_k}^{s}DF_2(x(\tau),t)\\&=\int_{t_k}^{s}[P(t)x(t)+Q(t)]\mathrm{d}t+C_kx(t_k),\end{aligned}$$

即

$$x(s)=\int_{t_k}^{s}[P(t)x(t)+Q(t)]\mathrm{d}t+C_kx(t_k)+x(t_k),\ s\in(t_k,t_{k+1}),$$

因此对每个固定的 $k\in\mathbb{N}_+$, $x'(s)=\varphi_k'(s)=P(s)x(s)+Q(s)$ 在 (t_k,t_{k+1}) 上几乎处处成立, 其中

$$\varphi_k(t)=\int_{t_k}^{t}[P(s)x(s)+Q(s)]\mathrm{d}s,\ t\in[t_k,t_{k+1}],\ k\in\mathbb{N}_+.$$

类似地, 对任意 $s\in[t_0,t_1]$ 有

$$\begin{aligned}x(s)-x(t_0)&=\int_{t_0}^{s}DF(x(\tau),t)\\&=\int_{t_0}^{s}DF_1(x(\tau),t)+\int_{t_0}^{s}DF_2(x(\tau),t)\\&=\int_{t_0}^{s}DF_1(x(\tau),t)\\&=\int_{t_0}^{s}[P(t)x(t)+Q(t)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$x(s)=\int_{t_0}^{s}[P(t)x(t)+Q(t)]\mathrm{d}t+x_0,\ s\in[t_0,t_1],$$

因此 $x'(s)=P(s)x(s)+Q(s)$ a.e. 于 $[t_0,t_1)$.

综合以上讨论可知: $x'(s)=P(s)x(s)+Q(s)$ 在 $[t_0,+\infty)\backslash\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 上几乎处处成立.

由引理 2.8 及 Lebesgue 积分的绝对连续性: 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, $k\geq 2$ 有

$$\begin{aligned}x(t_k^+)-x(t_k)&=[A(t_k^+)-A(t_k)]x(t_k)+g(t_k^+)-g(t_k)\\&=\lim_{t\to t_k^+}\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t)C_ix(t_k)-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t_k)C_ix(t_k)\\&=\sum_{i=1}^{k}C_ix(t_k)-\sum_{i=1}^{k-1}C_ix(t_k)\\&=C_kx(t_k),\end{aligned}$$

类似可得

$$x(t_1^+)-x(t_1)=\lim_{t\to t_1^+}\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t)C_ix(t_1)-\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t_1)C_ix(t_1)=C_1x(t_1).$$

任取闭区间 $[a,b]\subset[t_0,+\infty)$ 满足 $[a,b)\cap\{t_i\}_{i=1}^{\infty}=\varnothing$, 下证函数 x 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 设 (a_p,b_p), $p=1,2,\cdots,m$ 是 $[a,b]$ 中的任意有限多个互不相交的开区间, 由 Lebesgue 积分的绝对连续性, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $\sum\limits_{p=1}^{m}(b_p-a_p)<\delta$ 时,

$$\sum_{p=1}^{m}\|x(b_p)-x(a_p)\|=\sum_{p=1}^{m}\left\|\int_{a_p}^{b_p}[P(s)x(s)+Q(s)]\mathrm{d}s\right\|<\varepsilon,$$

即 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

综上所述, $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是 IVP(1.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解.

定理 3.7 若对任意 $i\in\mathbb{N}_+$, 矩阵 $I+C_i$ 可逆, 则 IVP(1.1) 在区间 $[t_0,+\infty)$ 上存在唯一解 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$.

证 易证函数

$$A(t)=\int_{t_0}^{t}P(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{\infty}H_{t_i}(t)C_i,\ t\in[t_0,+\infty)$$

在 $(t_0,+\infty)$ 上左连续, 故对任意 $t\in(t_0,+\infty)$ 有

$$I-[A(t)-A(t^-)]=I.$$

另一方面, 对任意 $t\in[t_0,+\infty)\backslash\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, 有

$$I+[A(t^+)-A(t)]=I,$$

且对任意 $t=t_i, i\in\mathbb{N}_+$, 有

$$I+[A(t^+)-A(t)]=I+C_i.$$

由以上讨论可得

$$\det(I-[A(t)-A(t^-)])\cdot\det(I+[A(t^+)-A(t)])\neq 0,\ t\in(t_0,+\infty),$$

且

$$\det(I+[A(t_0^+)-A(t_0)])\neq 0.$$

由引理 3.2 及定理 2.7, IVP

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=D[A(t)x+g(t)],\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{3.1}$$

在 $[t_0,+\infty)$ 上存在唯一解 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$, 再由定理 3.6, 函数 $x:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是 IVP(1.1) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的唯一解.

参 考 文 献

[1] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 脉冲微分系统引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[2] 宋新宇, 郭红建, 师向云. 脉冲微分方程理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[3] Schwabik Š. Generalized ordinary differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1992.

[4] Slavík A. Generalized differential equations: Differentiability of solutions with respect to initial conditions and parameters[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2013, 402(1): 261–274.

[5] Slavík A. Well-posedness results for abstract generalized differential equations and measure functional differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259(2): 666–707.

[6] 秦宝侠, 刘文斌. 无穷区间上分数阶微分方程脉冲解的存在性 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2016, 54(1): 8–14.

[7] Zheng Fengxia. New results for a class of boundary value problems involving impulsive fractional differential equations[J]. Filomat, 2020, 34(3): 707–725.

[8] Feng Limei, Han Zhenlai. Oscillation behavior of solution of impulsive fractional differential equations[J]. Journal of Applied Analysis & Computation, 2020, 10(1): 223–233.

[9] 丁传松, 李秉彝. 广义黎曼积分 [M]. 北京: 科学出版社, 1989.

[10] Collegari R, Federson M, Frasson M. Linear FDEs in the frame of generalized ODEs: variation-of-constants formula[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2018, 68(143): 889–920.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR INITIAL VALUE PROBLEMS OF A CLASS OF LINEAR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS AT FIXED TIME

LI Bao-lin, SONG Guo-xin

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Gansu 730070, China*)

Abstract: In this paper, we study the existence and uniqueness of solutions for a class of linear impulsive differential equations at fixed times. By using the theory of generalized ordinary differential equations, we prove the global existence and uniqueness theorem of solutions for the initial value problem of such impulsive differential equations, and generalize the global existence and uniqueness result of solutions for linear impulsive differential equations with piecewise continuous coefficients.

Keywords: Linear impulsive differential equations; Kurzweil integral; Generalized ordinary differential equation; Existence and uniqueness

2010 MR Subject Classification: 34A12; 34A37; 26A39