Vol. 42 (2022)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具瞬时脉冲接种与非瞬时脉冲接种效应的一类新的 SIR 传染病模型研究

汪 袁 [1], 焦建军 [1], 全 琦 [2]
(1. 贵州财经大学数统学院, 贵州 贵阳 550025)
(2. 贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 本文研究了瞬时脉冲接种与非瞬时脉冲接种效应的 SIR 传染病模型的问题. 利用频闪映射和 $Floquet$ 定理以及脉冲微分方程理论的方法, 获得了模型无病周期解的存在性和疫苗接种的控制阈值的结果, 推广了瞬时脉冲接种率与非瞬时脉冲接种区间长度对疾病灭绝起着重要作用的结论, 为实际传染病控制提供了可靠的策略支持.

关 键 词: 脉冲接种; 非瞬时脉冲接种区间长度; 疾病消除
MR(2010) **主题分类号:** 34D23; 92B05 **中 图 分 类 号:** O175.13
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号:** 0255-7797(2022)04-0367-10

1 引言

从过去的霍乱、鼠疫、黑死病、天花等到如今的新冠, 传染病一直是困扰人类的难题之一. 传染病严重威胁人类健康和生命, 2019 年末爆发的新冠肺炎快速地在全球蔓延开来, 不仅危害了人类健康, 也对各国经济造成了巨大影响.

对传染病的众多研究中, 发病机制、传播规律和防治措施等都有重要的现实意义, 其中疫苗接种是防治领域内比较有效的控制手段, 通过接种产生抗体, 从而抵抗疾病的感染 [1−4]. 但是疫苗接种通常采用静脉注射, 这是一个脉冲瞬时过程, 利用脉冲微分方程理论来制定有效的策略, 特别是免疫接种策略, 这样更符合实际 [5].

近年来, 许多生物学数学家对脉冲接种传染病模型产生了浓厚的兴趣. 汪金燕 [6] 研究了一类具固定时刻脉冲式疫苗接种策略且带污染环境间接传播的动力学模型, 为手足口病的疫苗策略提供了理论依据. 王来全 [7] 考虑了对易感人群进行脉冲接种具有标准发生率的传染病模型, 分析其对传染病预防的效果. 还有部分数学家研究了具有时滞、线性或非线性、垂直传染等因素的脉冲接种模型, 以此来探讨传染病的控制和疾病的消亡等问题 [8−12]. 然而大多数学者只考虑到了注射疫苗瞬间的效应, 没有考虑到人与人的体质不同, 有的人注射疫苗马上起效, 可以看作是一个脉冲的过程, 本文把它称作脉冲接种; 而有的人注射疫苗后需要一小段时间才能产生效果, 这一段时间是非瞬时的, 本文把这段时间称为接种效应区间. 希望通过该模型为现实生活中的疫苗接种提供可靠的决策支持.

*收稿日期: 2021-10-17 **接收日期:** 2021-12-14
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11791019); 贵州省微分−差分动力系统应用科技创新人才团队项目基金资助 (20175658); 贵州省高层次创新型人才 (百层次) 项目基金资助 (20164035); 贵州省教育厅创新群体重大项目基金资助 (2018019).
作者简介: 汪袁 (1996 –), 女, 贵州遵义, 硕士, 主要研究方向: 生物数学. E-mail: 2069259339@qq.com.

本文的主要结构如下, 第二节介绍了模型的背景概念, 第三节给出了相关重要引理, 第四节给出了模型持久的条件, 最后一部分对文章主要结论进行了讨论.

2 模型

根据上面的讨论, 我们建立了具瞬时脉冲接种与非瞬时脉冲接种效应的一类新的 SIR 传染病模型.

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}=\lambda_1-\beta_1S(t)I(t)-d_1S(t),\\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{dt}=\beta_1S(t)I(t)-(r_1+d_1)I(t),\\
\frac{\mathrm{d}R(t)}{dt}=r_1I(t)-d_1R(t),
\end{array}\right\} t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\
\left.\begin{array}{l}
\Delta S(t)=-\mu S(t),\\
\Delta I(t)=0,\\
\Delta R(t)=\mu S(t),
\end{array}\right\} t=(n+l)\tau,\\
\left.\begin{array}{l}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}=\lambda_2-\beta_2S(t)I(t)-(d_2+u_1)S(t),\\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{dt}=\beta_2S(t)I(t)-(r_2+d_2)I(t),\\
\frac{\mathrm{d}R(t)}{dt}=r_2I(t)-(d_2-\mu_1)R(t),
\end{array}\right\} t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],
\end{array}\right. \tag{2.1}$$

其中 $S(t)$, $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别代表 t 时刻易感者类、染病者类和恢复者类的人数; $\lambda_1>0$ 代表在 $(n\tau,(n+l)\tau]$ 上的出生系数; $\beta_1>0$ 代表在 $(n\tau,(n+l)\tau]$ 上的传染系数, 即 S 和 I 接触后被传染的概率; $d_1>0$ 在 $(n\tau,(n+l)\tau]$ 上的自然死亡率; $r_1>0$ 代表在 $(n\tau,(n+l)\tau]$ 上 I 的恢复率; $0<\mu<1$ 代表在 $t=(n+l)\tau$ 时刻的脉冲接种率. $\lambda_2>0$ 代表在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 上的出生系数; $\beta_2>0$ 代表在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 上的传染系数; $d_2>0$ 代表在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 上的自然死亡率; $r_2>0$ 代表在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 上 I 的恢复率; $\mu_1>0$ 代表在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 上的连续接种率; $(1-l)\tau$ 是非瞬时脉冲接种效应区间长度 $(0<l<1)$; $\tau>0$ 表示脉冲接种周期.

由于系统 (2.1) 中有关 $R(t)$ 的方程是独立的, 因此我们分析仅与 $S(t)$ 和 $I(t)$ 有关的方程, 得到如下模型

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}=\lambda_1-\beta_1S(t)I(t)-d_1S(t),\\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{dt}=\beta_1S(t)I(t)-(r_1+d_1)I(t),
\end{array}\right\} t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\
\left.\begin{array}{l}
\Delta S(t)=-\mu S(t),\\
\Delta I(t)=0,
\end{array}\right\} t=(n+l)\tau,\\
\left.\begin{array}{l}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}=\lambda_2-\beta_2S(t)I(t)-(d_2+\mu_1)S(t),\\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{dt}=\beta_2S(t)I(t)-(r_2+d_2)I(t),
\end{array}\right\} t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].
\end{array}\right. \tag{2.2}$$

3 引理

系统 (2.1) 的解是是一个连续的分段函数 $X:R_+\to R_+^3$, 其解用 $X(t)=(S(t),I(t),R(t))^{\mathrm{T}}$ 表示, $X(t)$ 在 $(n\tau,(n+l)\tau]$ 和 $((n+l),(n+1)\tau]$ 上是连续的, 且 $X(n\tau^+)=\lim\limits_{t\to n\tau^+}X(t)$ 和

$X\left((n+l)\tau^+\right)=\lim\limits_{t\to(n+l)\tau^+}X(t)$ 存在. 由文献 [13] 易知, $X(t)$ 的全局存在性和唯一性由系统 (2.1) 右边函数的光滑性保证.

由文献 [14](147) 我们容易得到如下引理.

引理 3.1 假设 $X(t)$ 是系统 (2.1) 的解且 $X(0^+)\geq 0$, 那么当 $t\geq 0$ 时, $X(t)\geq 0$.

引理 3.2 函数 $m\in PC[R^+,R]$ 满足不等式

$$\left\{\begin{array}{l} m(t)\leq p(t)m(t)+q(t),\\ t\geq t_0, t\neq t_k, k=1,2,...,\\ m(t_k^+\leq d_k m(t_k)+b_k, t=t_k,\end{array}\right. \tag{3.1}$$

其中 $p,q\in PC[R^+,R]$ 且 $d_k\geq 0$, b_k 是常数. 那么

$$\begin{aligned} m(t)\leq m(t_0)\Pi_{t_0<t_k<t}d_k\exp(\int_{t_0}^t p(s)ds)+\sum_{t_0<t_k<t}(\Pi_{t_k<t_j<t}d_j\exp(\int_{t_0}^t p(s)ds))b_k\\ +\int_{t_0}^t\Pi_{t_0<t_k<t}d_k\exp(\int_s^t p(\sigma)d\sigma)q(s)ds, t\geq t_0.\end{aligned}$$

接下来, 我们证明系统 (2.1) 的解都是最终一致有界的.

引理 3.3 对于系统 (2.1) 的解 $(S(t),I(t),R(t))$, 当 t 足够大时, 存在一个常数 $M>0$, 使得 $S(t)\leq M$, $I(t)\leq M$, $R(t)\leq M$.

证明: 定义 $V(t)=S(t)+I(t)+R(t)$ 且 $d=\min\{d_1,d_2,d_2-\mu_1\}$, 当 $t\in(n\tau,(n+l)\tau]$ 时, 有 $D^+V(t)+dV(t)=\lambda_1-(d_1-d)S(t)-(d_1-d)I(t)-(d_1-d)R(t)\leq\lambda_1$.

当 $t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 时, 有 $D^+V(t)+dV(t)=\lambda_2-(d_2+\mu_1-d)S(t)-(d_2-d)I(t)-(d_2-\mu_1-d)R(t)\leq\lambda_2$.

取 $\lambda=\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$, 当 $t=(n+l)\tau$ 时, $V((n+l)\tau^+)=S((n+l)\tau)+I((n+l)\tau)+R((n+l)\tau)=V((n+l)\tau)$.

当 $t=(n+1)\tau$ 时, $V((n+1)\tau^+)=V((n+1)\tau)$. 根据引理 3.2 可知, 对于 $t\in(n\tau,(n+l)\tau]$ 和 $t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau]$, 有

$$\begin{aligned} V(t)&\leq V(0)\exp(-dt)+\int_o^t\lambda\exp(-d(t-s))ds\\ &=V(0)\exp(-dt)+\frac{\lambda}{d}(1-\exp(-dt))\\ &\to\frac{\lambda}{d},\ t\to\infty\end{aligned}$$

所以 $V(t)$ 是最终一致有界的. 因此由 $V(t)$ 的定义可知, 存在一个常数 $M>0$, 当 t 足够大时, 使得 $S(t)\leq M$, $I(t)\leq M$, $R(t)\leq M$. 证毕.

当 $I(t)=0$ 时, 系统 (2.2) 的子系统如下:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}=\lambda_1-d_1S(t), t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \Delta S(t)=-\mu S(t), t=(n+l)\tau,\\ \frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}=\lambda_2-(d_2+\mu_1)S(t), t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].\end{array}\right. \tag{3.2}$$

引理 3.4 系统 (3.2) 有全局渐近稳定的周期解

$$\widetilde{S(t)}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{d_1}-(\dfrac{\lambda_1}{d_1}-S^*)e^{-d_1(t-n\tau)}, t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \dfrac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}-(\dfrac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}-S^{**})e^{-(d_2+\mu_1)(t-(n+l)\tau)}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\end{cases}\tag{3.3}$$

其中 $S^*=\frac{\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}+((1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1}-\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1})A+(1-(1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1})B}{1+\mu B}$, $S^{**}=(1-\mu)(\frac{\lambda_1}{d_1}-(\frac{\lambda_1}{d_1}-S^*)e^{-d_1l\tau})$, $A=e^{-(d_2+\mu_1)(1-l)\tau}<1$, $B=e^{-((d_2+\mu_1)(1-l)+d_1l)\tau}<1$.

证明: 分别考虑系统 (3.2) 的第一个和第三个方程, 我们得到了在脉冲点之间的解析解,

$$\begin{cases} S(t)=\frac{\lambda_1}{d_1}-(\frac{\lambda_1}{d_1}-S(n\tau^+))e^{-d_1(t-n\tau)}, t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ S(t)=\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}-(\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}-S((n+l)\tau^+))e^{-(d_2+\mu_1)(t-(n+l)\tau)}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].\end{cases}$$

其频闪映射为

$$S((n+1)\tau^+)=\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}-(\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}-(1-\mu)(\frac{\lambda_1}{d_1}-(\frac{\lambda_1}{d_1}-S(n\tau^+))e^{-d_1l\tau}))e^{-(d_2+\mu_1)(1-l)\tau}.\tag{3.4}$$

由此我们得到 (3.4) 的唯一不动点

$$\begin{cases} S^*=\frac{\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1}+((1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1}-\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1})A+(1-(1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1})B}{1+\mu B},\\ S^{**}=(1-\mu)(\frac{\lambda_1}{d_1}-(\frac{\lambda_1}{d_1}-S^*)e^{-d_1l\tau}),\end{cases}$$

其中 $A=e^{-(d_2+\mu_1)(1-l)\tau}<1,\qquad B=e^{-((d_2+\mu_1)(1-l)+d_1l)\tau}<1.$

令 $S^{n+1}=S((n+1)\tau^+)$, $S^n=S(n\tau^+)$, 则 (3.4) 转换为 $S^{n+1}=f(S^n)$. 对 $f(S^n)$ 求导我们有, $\left.\frac{dS^{n+1}}{dS^n}\right|_{S^n=S^*}=-\mu B<1$, 其中 $B=e^{-((d_2+\mu_1)(1-l)+d_1l)\tau}<1$.

所以 (3.4) 的唯一不动点是全局渐近稳定的, 由文献 [15] 可知系统 (3.2) 有全局渐近稳定的周期解 $\widetilde{S(t)}$.

引理 3.5 系统 (2.2) 的周期解 $((\widetilde{S(t)},0))$ 是全局渐近稳定的, 其中 $\widetilde{S(t)}$, S^* 和 S^{**} 如 (3.3) 所示.

4 动力学分析

定理 4.1 如果

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_1}{d_1}(\lambda_1l\tau+\frac{\lambda_1-d_1S^*}{d_1}(e^{-d_1l\tau}-1))-(r_1+d_1)l\tau+\frac{\beta_2}{d_2+\mu_1}(\lambda_2(1-l)\tau\\ &\quad+\frac{\lambda_2-(d_2+\mu_1)S^{**}}{d_2+\mu_1}(e^{-(d_2+\mu_1)(1-l)\tau}-1))-(r_2+d_2)(1-l)\tau<0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

成立, 则系统 (2.2) 的无病周期解 $(\widetilde{S(t)},0)$ 是全局渐近稳定的, 其中 S^* 和 S^{**} 如 (3.3) 所示.

证明: 首先证明 $(\widetilde{S(t)},0)$ 的局部稳定性, 定义 $S_1(t)=S(t)-\widetilde{S(t)}$, $I_1(t)=I(t)$, 则 (2.2) 对应的线性系统可写为

$$\begin{pmatrix}\frac{dS_1(t)}{dt}\\ \frac{dI_1(t)}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d_1 & -\beta_1\widetilde{S(t)}\\ 0 & \beta_1\widetilde{S(t)}-(r_1+d_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1(t)\\ I_1(t)\end{pmatrix}, t\in(n\tau,(n+l)\tau].$$

得到基解矩阵为

$$\Phi_1(t)=\begin{pmatrix} \exp(-d_1t) & *_1 \\ 0 & \exp(\int_0^t \beta_1\widetilde{S(s)}-(r_1+d_1)ds) \end{pmatrix}.$$

系统 (2.2) 的第三个和第四个方程对应的线性化矩阵为

$$\begin{pmatrix} S_1((n+l)\tau^+) \\ I_1((n+l)\tau^+) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1((n+l)\tau) \\ I_1((n+l)\tau) \end{pmatrix}.$$

同理我们有

$$\begin{pmatrix} \frac{dS_1(t)}{dt} \\ \frac{dI_1(t)}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(d_2+\mu_1) & -\beta_2\widetilde{S(t)} \\ 0 & \beta_2\widetilde{S(t)}-(r_2+d_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1(t) \\ I_1(t) \end{pmatrix}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],$$

$$\Phi_2(t)=\begin{pmatrix} \exp(-(d_2+\mu_1)t) & *_2 \\ 0 & \exp(\int_0^t \beta_2\widetilde{S(s)}-(r_2+d_2)ds) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} S_1((n+1)\tau^+) \\ I_1((n+1)\tau^+) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1((n+1)\tau) \\ I_1((n+1)\tau) \end{pmatrix}.$$

因为在接下来的运算中不需要 $*_i(i=1,2)$, 所以不计算它的精确值. 周期解 $(\widetilde{S(t)},0)$ 的稳定性由

$$M=\begin{pmatrix} 1-\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Phi_1(l\tau)\Phi_2(\tau),$$

的特征值 $\lambda_1=(1-\mu)e^{-(d_1l+d_2+\mu_1)\tau}<1$, $\lambda_2=k_1k_2$ 决定. 其中 $k_1=e^{\int_0^{l\tau}\beta_1\widetilde{S(s)}-(r_1+d_1)ds}$, $k_2=e^{\int_0^{\tau}\beta_2\widetilde{S(s)}-(r_2+d_2)ds}$.

根据条件 (4.1) 和 Floquet 定理 [13] $(=\rho_i=\exp(\int_0^\tau \beta_i\widetilde{S(s)}-(r_i+d_i)ds)<1)$, 得到 $\lambda_2<1$ 成立, 系统 (2.2) 的无病周期解 $(\widetilde{S(t)},0)$ 局部稳定.

接下来将证明全局吸引性, 令一个 $\varepsilon>0$, 使得 $\rho_i=\exp(\int_0^\tau(\beta_i\widetilde{S(s)}+\varepsilon)-(r_i+d_i)ds)<1(i=1,2)$. 由系统 (2.2) 的第一和第五个方程可知

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt}\le\lambda_1-d_1S(t), t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ \frac{dS(t)}{dt}\le\lambda_2-(d_2+\mu_1)S(t), t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau]. \end{cases}$$

考虑如下脉冲微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S_2(t)}{dt}=\lambda_1-d_1S_2(t), t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ \Delta S_2(t)=-\mu S_2(t), t=(n+l)\tau, \\ \frac{\mathrm{d}S_2(t)}{dt}=\lambda_2-(d_2+\mu_1)S_2(t), t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau]. \end{cases} \tag{4.2}$$

依据脉冲微分方程比较定理 (参考文献 [13] 中的定理 3.1.1) 及引理 3.5, 有 $S(t) \leq S_2(t)$, 且当 $t \to \infty$ 时, $S_2(t) \to \widetilde{S(t)}$. 即当所有 t 充分大时,

$$S(t) \leq S_2(t) \leq \widetilde{S(t)} + \varepsilon, \tag{4.3}$$

为了方便, 假设 (4.3) 对所有的 $t \geq 0$ 均成立. 由 (2.2) 和 (4.3) 可以得到

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \leq ((\beta_1(\widetilde{S(t)} + \varepsilon) - (r_1 + d_1)))I(t), t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \frac{dI(t)}{dt} \leq ((\beta_2(\widetilde{S(t)} + \varepsilon) - (r_2 + d_2)))I(t), t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau]. \end{cases} \tag{4.4}$$

因此

$$\begin{aligned} I((n+1)\tau) \leq & I((n+l)\tau^+)\exp(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (\beta_2(\widetilde{S(s)} + \varepsilon) - (r_2 + d_2))ds) \\ \leq & I(n\tau^+)\exp(\int_{n\tau}^{(n+l)\tau} (\beta_1(\widetilde{S(s)} + \varepsilon) - (r_1 + d_1))ds) \\ & \exp(\int_{(n+l)\tau}^{(n+1)\tau} (\beta_2(\widetilde{S(s)} + \varepsilon) - (r_2 + d_2))ds) \\ = & I(n\tau^+)\rho_1\rho_2. \end{aligned}$$

所以 $I(n\tau) \leq I(0^+)(\rho_1\rho_2)^n$ 且当 $n \to \infty$, $I(n\tau) \to 0$. 因此当 $t \to \infty$, $I(t) \to 0$.

接下来, 将证明当 $t \to \infty$, $\widetilde{S(t)} \to S(t)$. 对于 $\varepsilon_1 > 0$, 一定存在一个 $t_0 > 0$, 使得对任意 $t \geq t_0$ 有 $0 < I(t) < \varepsilon_1$. 为了不失一般性, 假设对于所有的 $t \geq 0$ 有 $0 < I(t) < \varepsilon_1$. 根据系统 (2.2) 可以得到

$$\begin{cases} \lambda_1 - (\beta_1\varepsilon_1 + d_1)S(t) \leq \frac{dS(t)}{dt} \leq \lambda_1 - d_1S_2(t), t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \lambda_2 - (\beta_2\varepsilon_1 + (d_2 + \mu_1))S(t) \leq \frac{dS(t)}{dt} \leq \lambda_2 - (d_2 + \mu_1)S_2(t), t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \end{cases} \tag{4.5}$$

且当 $t \to \infty$ 时, 有 $S_3(t) \leq S(t) \leq S_2(t)$, $S_3(t) \to \widetilde{S_3(t)}$ 和 $S_2(t) \to \widetilde{S(t)}$. $S_3(t)$ 和 $S_2(t)$ 分别是系统 (4.2) 和 (4.6) 的解,

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S_3(t)}{dt} = \lambda_1 - (\beta_1\varepsilon_1 + d_1)S_3(t), t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \Delta S_3(t) = -\mu S_3(t), t = (n+l)\tau, \\ \frac{\mathrm{d}S_3(t)}{dt} = \lambda_2 - (\beta_2\varepsilon_1 + (d_2 + \mu_1))S_3(t), t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \end{cases} \tag{4.6}$$

其中

$$\widetilde{S_3(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_1 + \beta_1\varepsilon_1}(\lambda_1 - (\lambda_1 - (d_1 + \beta_1\varepsilon_1)S_3{}^*)e^{-(d_1+\beta_1\varepsilon_1)(t-n\tau)}), t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \dfrac{1}{d_2 + \mu_1 + \beta_2\varepsilon_1}(\lambda_2 - (\lambda_2 - (d_2 + \mu_1 + \beta_2\varepsilon_1)S_3{}^{**})e^{-(d_2+\mu_1+\beta_2\varepsilon_1)(t-(n+l)\tau)}), \\ \qquad t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \end{cases} \tag{4.7}$$

这里的 $S_3{}^*$ 和 $S_3{}^{**}$ 定义如下:

$$\begin{cases} S_3{}^* = \frac{\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1+\beta_2\varepsilon_1} + ((1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1\varepsilon_1} - \frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1+\beta_2\varepsilon_1})A_1 + (1-(1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1\varepsilon_1})B_1}{1+\mu B_1} > 0, \\ S_3{}^{**} = (1-\mu)(\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1\varepsilon_1} - (\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1\varepsilon_1} - S_3{}^*)e^{-(d_1+\beta_1\varepsilon_1)l\tau}), \end{cases} \tag{4.8}$$

其中 $A_1 = e^{-(d_2+\mu_1+\beta_2\varepsilon_1)(1-l)\tau} < 1$, $B_1 = e^{-((d_2+\mu_1+\beta_2\varepsilon_1)(1-l)+d_1 l)\tau} < 1$.

对于任意的 $\varepsilon_2 > 0$, 存在一个 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 时, 使得 t 足够大时, 有 $\widetilde{S_3(t)} - \varepsilon_2 \le S(t) \le \widetilde{S(t)} + \varepsilon_2$, 即 $t \to \infty$ 时, $S(t) \to \widetilde{S(t)}$. 证毕.

接下来证明系统 (2.2) 的持久性:

定义 4.1 如果存在常数 m, $M > 0$(与初值无关) 和一个有限的时间 T_0, 使得对所有的 $t \ge T_0$, 解 $(S(t), I(t))$ 的所有初值 $S(0^+) > 0$, $I(0^+) > 0$, $m \le S(t) \le M$, $m \le I(t) \le M$ 成立, 则系统 (2.2) 是持久的.

定理 4.2 如果

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_1}{d_1}(\lambda_1 l\tau + \frac{\lambda_1 - d_1 S^*}{d_1}(e^{-d_1 l\tau} - 1)) - (r_1 + d_1)l\tau + \frac{\beta_2}{d_2+\mu_1}(\lambda_2(1-l)\tau \\ &\quad + \frac{\lambda_2 - (d_2+\mu_1)S^{**}}{d_2+\mu_1}(e^{-(d_2+\mu_1)(1-l)\tau} - 1)) - (r_2+d_2)(1-l)\tau > 0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

成立, 则系统 (2.2) 是持久的, 其中 S^* 和 S^{**} 如 (3.3) 所示.

证明: 假设 $(S(t), I(t))$ 是系统 (2.2) 关于初值 $S(0) > 0$, $I(0) > 0$ 的一个解. 通过引理 3.3, 证明了存在一个常数 $M > 0$, 当 t 足够大时, $S(t) \le M$, $I(t) \le M$. 由系统 (2.2), 当 t 足够大时, 有

$$\begin{cases} I(t) > I(0^+)e^{-(r_1+d_1)}, t \in (0, l\tau], \\ I(t) > I(l\tau^+)e^{-(r_2+d_2)}, t \in (l\tau, \tau], \end{cases}$$

因此只需要找到 $m_1 > 0$ 和 ε_3, 当 t 足够大时, 使得 $I(t) \ge m_1$. 否则, 我们可以选择 $m_2 > 0$ 足够小, 证明当 $t \ge 0$ 时, $I(t) \ge m_2$ 不成立. 根据条件 (4.9) 得到

$\sigma = \frac{\beta_1}{d_1+\beta_1 m_2}(\lambda_1 l\tau + \frac{\lambda_1 - (d_1+\beta_1 m_2)S_4{}^*}{d_1}(e^{-d_1+\beta_1 m_2 l\tau} - 1)) - (\beta_1\varepsilon_3 + r_1 + d_1 + \beta_1 m_2)l\tau + \frac{\beta_2}{d_2+\mu_1+\beta_2 m_2}(\lambda_2(1-l)\tau + \frac{\lambda_2 - (d_2+\mu_1+\beta_2 m_2)S_4{}^{**}}{d_2+\mu_1+\beta_2 m_2}(e^{-(d_2+\mu_1+\beta_2 m_2)(1-l)\tau} - 1)) - (\beta_2\varepsilon_3 + r_2 + d_2 + \beta_2 m_2)(1-l)\tau > 0$, 其中 $S_4{}^*$ 和 $S_4{}^{**}$ 如下所示

$$\begin{cases} S_4{}^* = \frac{\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1+\beta_2 m_2} + ((1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1 m_2} - \frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1+\beta_2 m_2})A_2 + (1-(1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1 m_2})B_2}{1+\mu B_2} > 0, \\ S_4{}^{**} = (1-\mu)(\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1 m_2} - (\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1 m_2} - S_4{}^*)e^{-(d_1+\beta_1 m_2)l\tau}), \end{cases} \tag{4.10}$$

其中 $A_2 = e^{-(d_2+\mu_1+\beta_2 m_2)(1-l)\tau} < 1, \quad B_2 = e^{-((d_2+\mu_1+\beta_2 m_2)(1-l)+d_1 l)\tau} < 1.$

因此, 存在一个 $T_1 > 0$ 和 $\varepsilon_3 > 0$, 使得 $S(t) \ge S_4(t) \ge \widetilde{S_4(t)} - \varepsilon_3$. 对于 $t \ge T_1$,

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \ge ((\beta_1(\widetilde{S_4(t)} + \varepsilon_3) - (r_1+d_1)))I(t), t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \frac{dI(t)}{dt} \ge ((\beta_2(\widetilde{S_4(t)} + \varepsilon_3) - (r_2+d_2)))I(t), t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau]. \end{cases} \tag{4.11}$$

令 $N_1 \in N$ 且 $N_1\tau > T_1$, 将系统 (4.11) 在区间 $(n\tau, (n+1)\tau)$ 上积分, 当 $n \ge N_1$ 有

$$\begin{aligned} I((n+1)\tau) \ge & I(n\tau^+)\exp((\int_{n\tau}^{(n+l)\tau}(\beta_1(\widetilde{S_4(s)} + \varepsilon_3) - (r_1+d_1))ds) \\ & + (\int_{(n+l)\tau}^{(n+1)\tau}(\beta_2(\widetilde{S_4(s)} + \varepsilon_3) - (r_2+d_2))ds)) \\ = & I(n\tau^+)e^{\sigma}. \end{aligned}$$

所以, 当 $k\to\infty$, $I((N_1+k)\tau)\geq I(N_1\tau^+)e^{k\sigma}\to\infty$, 结果和 $I(t)$ 有界矛盾. 因此, 存在 $t_1>0$, 使得 $I(t)\geq m_1$.

接下来有

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}>\lambda_1-(\beta_1M+d_1)S(t),t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \frac{\mathrm{d}S(t)}{dt}>\lambda_2-(\beta_2M+d_2+\mu_1)S(t),t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].\end{cases}$$

下面是脉冲微分比较方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S_5(t)}{dt}=\lambda_1-(\beta_1M+d_1)S_5(t),t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \Delta S_5(t)=-\mu S_5(t),t=(n+l)\tau,\\ \frac{\mathrm{d}S_5(t)}{dt}=\lambda_2-(\beta_2M+d_2+\mu_1)S_5(t),t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].\end{cases}\tag{4.12}$$

与引理 3.5 相似, 有

$$\widetilde{S_5(t)}=\begin{cases}\dfrac{1}{d_1+\beta_1M}(\lambda_1-(\lambda_1-(d_1+\beta_1M)S_5{}^*)e^{-(d_1+\beta_1M)(t-n\tau)}),t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \dfrac{1}{d_2+\mu_1+\beta_2M}(\lambda_2-(\lambda_2-(d_2+\mu_1+\beta_2M)S_5{}^{**})\\ e^{-(d_2+\mu_1+\beta_2M)(t-(n+l)\tau)}),t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\end{cases}\tag{4.13}$$

这里的 $S_5{}^*$ 和 $S_5{}^{**}$ 定义如下:

$$\begin{cases}S_5{}^*=\frac{\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1+\beta_2M}+((1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1M}-\frac{\lambda_2}{d_2+\mu_1+\beta_2M})A_3+(1-(1-\mu)\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1M})B_3}{1+\mu B_3}>0,\\ S_5{}^{**}=(1-\mu)(\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1M}-(\frac{\lambda_1}{d_1+\beta_1M}-S_5{}^*)e^{-(d_1+\beta_1M)l\tau}),\end{cases}\tag{4.14}$$

其中 $\qquad A_3=e^{-(d_2+\mu_1+\beta_2M)(1-l)\tau}<1,\qquad B_3=e^{-((d_2+\mu_1+\beta_2M)(1-l)+d_1l)\tau}<1.$

对于任意的 ε_4 足够小, 有 $S_5(t)>\widetilde{S_5(t)}-\varepsilon_4$. 根据脉冲微分方程比较定理, 有 $S(t)>S_5(t)>\widetilde{S_5(t)}-\varepsilon_4>(S_5{}^*+S_5{}^{**})-\varepsilon_4=m_5$. 证毕.

推论 4.1 如果

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_1}{d_1}(\lambda_1l\tau+\frac{\lambda_1-d_1S^*}{d_1}(e^{-d_1l\tau}-1))-(r_1+d_1)l\tau+\frac{\beta_2}{d_2+\mu_1}(\lambda_2(1-l)\tau\\ &\quad+\frac{\lambda_2-(d_2+\mu_1)S^{**}}{d_2+\mu_1}(e^{-(d_2+\mu_1)(1-l)\tau}-1))-(r_2+d_2)(1-l)\tau>0,\end{aligned}\tag{4.15}$$

成立, 则系统 (2.1) 是持久的, 其中 S^* 和 S^{**} 如 (3.3) 所示.

5 讨论

本文建立了具脉冲接种与接种效应的 SIR 传染病模型, 该模型描述了疫苗在人体内起作用的过程, 并证明了该系统的所有解都是一致最终有界的. 如果 (4.1) 成立, 系统 (2.1) 的无病周期解是全局渐近稳定的. 如果 (4.9) 成立, 系统 (2.1) 是持久的. 根据条件 (4.1) 和 (4.9), 我们推测疫苗接种初次脉冲起效存在阈值 μ^*, 当 $\mu>\mu^*$ 时, 疾病灭绝; 当 $\mu<\mu^*$ 时, 疾病持久. 这表明, 疫苗的初次接种率在疾病灭绝中起着重要作用. 我们也推测疫苗的连续接种率存在阈值 $\mu_1{}^*$, 当 $\mu_1>\mu_1{}^*$ 时, 疾病灭绝; 当 $\mu_1<\mu_1{}^*$ 时, 疾病持久. 该结论表明, 连续

接种率对系统无病周期解的稳定性起着重要作用. 同时, 我们还可以推测非瞬时脉冲接种起效区间系数存在阈值 l^*, 当 $l > l^*$ 时, 疾病灭绝; 当 $l < l^*$ 时, 疾病持久. 根据以上讨论我们可以得知, 控制疾病的减少, 可以适当提高初次接种率或连续接种率, 也可以延长非瞬时脉冲接种起效区间长度. 该模型为现实生活中通过疫苗接种来减少疾病传播提供了可靠的决策支持.

参 考 文 献

[1] 李冬梅, 董在飞, 罗雪峰. 传染病 $SEIQR$ 模型在肺结核病防控中的应用 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2015, 20(1): 110–116.

[2] 梁桂珍, 郝林莉. 一类具有连续接种和潜伏期的流行病模型的稳定性分析 [J]. 河南科技学院学报 (自然科学版), 2018, 46(005): 51–59.

[3] 朱凌峰, 李维德, 章培军. 具有连续和脉冲接种的 $SIQVS$ 传染病模型 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2011, 47(4): 99–102.

[4] 卢旸. 具有连续与脉冲接种的 $SEIR$ 传染病模型的研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2012.

[5] 章培军, 李维德, 朱凌峰. $SIRS$ 传染病模型的连续接种和脉冲接种的比较 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2011(1): 82–86.

[6] 汪金燕. 污染环境下具脉冲接种的周期传染病模型的动力学分析 [J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(8): 128–137.

[7] 王来全, 夏米西努尔・阿布都热合曼. 脉冲接种具有标准发生率的传染病模型的稳定性 [J]. 内蒙古师范大学学报 (自然科学汉文版), 2019, 48(3): 35–44.

[8] 高建忠. 具有脉冲接种的传染病动力学模型研究 [D]. 西安: 长安大学, 2019.

[9] 刘娜, 方洁, 邓玮. 一类带有脉冲疫苗接种的分数阶 SIS 传染病模型的稳定性分析 [J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(22): 6.

[10] 朱芳芳, 唐雪凝, 孟新柱, 等. 一类含有脉冲免疫和治疗的 SIR 流行病的分析 [J]. 大学数学, 2018, 34(195): 11–16.

[11] 潘嵘. 脉冲时滞的 $SIRS$ 模型的稳定性分析 [J]. 2021, (2020-6): 5–9.

[12] 张丹, 张玉蓉, 许碧云, 等. 具分布时滞的 SIR 传染病模型的脉冲免疫控制 [J]. 应用数学进展, 2020, 9(3).

[13] Lakshmikantham V. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapor: World Scientific, 1989.

[14] Jiao J, Cai S, Li L. Impulsive vaccination and dispersal on dynamics of an SIR epidemic model with restricting infected individuals boarding transports[J]. Physica A Statistical Mechanics and Its Applications, 2016, 449: 145–159.

[15] Jiao J, Cai S, Chen L. Analysis of a stage-structured predator – prey system with birth pulse and impulsive harvesting at different moments[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2011, 12(4): 2232–2244.

[16] 焦建军, 李利梅, 刘兰兰, 等. 具非瞬时脉冲收获单种群动力学模型的控制阈值研究 [J]. 信阳师范学院学报 (自然科学版), 2018, 31(2): 13–15.

DYNAMICS OF A NEW SIR EPIDEMIC MODEL WITH TRANSIENT/NON-TRANSIENT IMPULSIVE VACCINATION EFFECTS

WANG Yuan[1] , JIAO Jian-jun[1] , QUAN Qi [2]

(*1.School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guizhou 550025, China*)

(*2.School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guizhou 550025, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of epidemic model with transient/non-transient impulsive vaccination effects. Using the theories of stroboscopic map, Floquet and the theories of impulsive differential equations, we obtain the existence of infection-free periodic solution and the controlling thresholds of the vaccination. The results show that the transient impulsive vaccination rate and the length of non-transient impulsive vaccination effect interval played an important role in disease extinction. It provides a reliable strategy support for practical vaccination.

Keywords: transient impulsive vaccination; the length of non-transient impulsive vaccination effect interval; disease extinction

2010 MR Subject Classification: 34D23; 92B05