Vol. 42 (2022)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

几类树的无矛盾点连通数

钟 咏, 严 政
(长江大学信息与数学学院, 湖北 荆州 434000)

摘 要: 本论文研究了点着色图的无矛盾点连通数的问题, 利用树的结构特征获得了特殊图类 $\mathcal{T}_{n,k}$ 关于无矛盾点连通数的上界和下界, $\mathcal{T}_n^{\Lambda}$、T_{Λ} 和 Λ_d 关于无矛盾点连通数的上界.

关键词: 无矛盾点连通数; 树; 上界; 下界
MR(2010) **主题分类号:** 05C15 **中图分类号:** O157.5
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2022)04-0359-08

1 引言

本文仅考虑简单有限的无向图. 用 $G = (V, E)$ 表示顶点集是 V, 边集为 E 的简单有限图. G 的阶表示为 $|G|$, 是指 G 中顶点的个数. 顶点 v 的度表示为 $d_G(v)$, 是指 G 中与顶点 v 相关联的边数. $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度. 用 P_n 表示阶为 n 的路. 图 G 的一条路 $P_{k+1} = v_0v_1\cdots v_k$, 如果 P_{k+1} 中的每两个连续的顶点在 G 中相邻, 且 $d(v_0) \geq 3$, $d(v_i) = 2(i = 1, \cdots, k-1)$, $d(v_k) = 1$, 则称 $S = v_1\cdots v_k$ 为图 G 的悬挂路. 图 G 的点着色是函数 $C : V \to \mathbb{Z}^+$. 图中一条路的点着色中如果有一种颜色只使用一次, 我们称这条路为无矛盾的. 如果任意两点间都存在一条无矛盾点着色的路, 我们称这个着色为无矛盾点连通的. 图的无矛盾点连通数表示为 $vcfc(G)$, 是指使 G 为无矛盾点连通所需的最小颜色数. 显然, 对于所有阶为 $n(n \geqslant 2)$ 的连通图 G, $vcfc(G) \geqslant 2$. 在本文中未提到的一些基本定义可见参考文献 [1].

树 T 是任意两个顶点间有且仅有一条路的图, 度为 1 的点称为叶子, 记为 $leaf(T)$. 记 $\mathcal{T}_{n,k} = \{T$ 是一个树 $||T| = n$ 且有 k 个叶子$\}$; 记 $\mathcal{T}_n^{\Lambda}$=$\{T$ 是一个树 $||T| = n$ 且 $\Delta(T) = \Lambda(\Lambda \geq 3)\}$. 若将树 T 中的每个点的各子树看成是从左到右有次序的, 不能互换的, 则称该树 T 为有序树. 树 T 中的任意一个顶点都选为树的根, 指定了根的树称为根树. 点的层次从根开始定义起, 根为第一层, 与根相邻的顶点为第二层, 与第二层相邻的顶点 (除去第一层) 为第三层, 以此类推与第 $i-1$ 层相邻的顶点 (除去第 $i-2$ 层) 为第 i 层, 树中点的最大层次的最小值称为树的高度. 树中点的子树的个数都不大于 Λ 的有序树称为 Λ 叉树. 设 Λ 叉树的高度为 d, 除第 d 层外, 其它各层 $(1 \sim d-1)$ 的点数都达到最大个数, 第 d 层有叶子, 并且叶子都是从左到右依次排布, 则称为完全 Λ 叉树. 特别地, 记 Λ_d =$\{T$ 是一个完全 Λ 叉树 $||T| = \Lambda^d - 1$ 且高度为 $d\}$. 记 $V_1 = \{v|$ 高度为 d 的树 T 第 1 层至第 $d-1$ 层的点$\}$, $V_2 = \{v|$ 高度为 d 的树 T 第 d 层的点$\}$, $\mathcal{T}_{\Lambda} = \{T$ 是一个树 $|d_T(v) = \Lambda, v \in V_1$ 且 $d_T(v) = 1, v \in V_2\}$.

*收稿日期: 2021-06-01 接收日期: 2021-09-17
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11771058); 湖北省教育厅科学技术研究项目 (D20191303).
作者简介: 钟咏 (1995 –), 女, 湖北咸宁, 研究生, 主要研究方向: 组合图论.
通信作者: 严政 (1982–), 男, 湖北荆州, 副教授, 主要研究方向: 图与组合.

树 T 中如果存在点 x 使得 $G-x$ 的任意连通分支至多包含 $\frac{|V(G)-x|}{2}$ 个点, 则称点 x 为平衡点 [2]. 树 T 的深度记为 $d_V(T)$, 表示如下算法中的迭代次数: 树 T 中顶点 v 的深度表示为 $d_V(v)$, 是指顶点 v 在迭代过程中被删去的排序数. 即如果顶点 v 在第 d- 次迭代中被删除, 那么 v 具有深度 d[2]. 在文献 [2] 中给出了算法:

算法 1 树的无矛盾点连通算法

输入: 一个顶点为 n 的树 T.

输出: 树 T 的无矛盾点着色 $c: V(T) \to \{1, 2, \cdots, k\}$.

步骤 1: 令 $F=T$, $c: V \to \{0\}$.

步骤 2: 判断 F 中是否存在顶点数大于等于 2 的分支. 如果有, 回到步骤 3; 如果没有, 回到步骤 4.

步骤 3: 挑选所有顶点数大于等于 2 的连通分支, 并且删去这些分支的平衡点 v, 得到新的连通分支构成的森林 F'. 用 F' 代替 F, 更新 c : 对点 v 赋予 $d_V(v)$. 返回步骤 2.

步骤 4: 返回 c.

2 相关结论

图的着色问题一直是图论中的热点问题. 李学良等 [4−7] 提出了图的无矛盾点连通, 并且对图的无矛盾点连通数做了深入的研究, 对于超图、线图及二连通图等得到了较好的结果. 对于所有的阶为 $n(n \geq 2)$ 的 2− 连通图 G 都有 $vcfc(G) \geq 2$, 本文将讨论 $\mathcal{T}_{n,k}$ 和 $\mathcal{T}_n^{\Lambda}$ 关于无矛盾点连通数的上界和下界. 在讨论 $\mathcal{T}_n^{\Lambda}$ 关于无矛盾点连通数的下界时, 提出了 Λ_d 和 $\mathcal{T}_{\Lambda}$, 并讨论了它们关于无矛盾点连通数的上界.

在文献 [8] 中, H Chang 等提出了平衡边的概念, 且证明了有 n 个点的路 P_n 关于边的深度为 $\lceil \log_2 n \rceil$. 本文对于有 n 个点的路 P_n 给出了如下引理:

引理 1 设 P_n 是阶为 $n(n \geq 2)$ 的路, 则 $d_V(P_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

证 先证 $d_V(P_n) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$. 由上述算法可知, 在 P_n 中深度为 1 的点有 1 个, 深度为 2 的点有 2 个, 深度为 3 的点有 4 个, 以此类推深度为 $i(1 \leq i \leq d_V(P_n)-1)$ 的点有 2^{i-1} 个, 而深度为 $d_V(P_n)$ 的点至多有 $2^{d_V(P_n)-1}$ 个, 从而 $2^0+2^1+\cdots+2^{d_V(P_n)-1} \geq n$, $d_V(P_n) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

下证 $d_V(P_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil$. 我们对 n 进行数学归纳, 对于 $n=1$ 和 $n=2$ 显然成立. 选择 P_n 的中心点并用颜色 1 对它进行着色, 则剩下的路 P_1 和 P_2 分别有至多 $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 个点. 由归纳可知, $\max\{d_V(P_1), d_V(P_2)\} \leq \lceil \log_2(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1) \rceil = \lceil \log_2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \rceil$. 因此, $d_V(P_n) \leq 1 + \max\{d_V(P_1), d_V(P_2)\} \leq 1 + \lceil \log_2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \rceil = \lceil \log_2(n+1) \rceil$, 证毕.

引理 2 [4] 设 P_n 是阶为 $n(n \geq 2)$ 的路, 则 $vcfc(P_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

由引理 1 和引理 2 可知 $vcfc(P_n) = d_V(P_n)$, 那么可以得到一种对路的着色方法, 称为中心点着色法, 即点 v 着颜色 $d_V(v)$.

引理 3 [9] 设 T 是阶为 $n(n \geq 2)$ 的树, 则 $vcfc(T) \leq vcfc(P_n)$.

设 G' 是 G 的子图, 显然 G 的无矛盾点连通着色一定是 G' 的无矛盾点连通着色, 则可以得到以下引理:

引理 4 设 G' 是 G 的子图, 则 $vcfc(G) \geq vcfc(G')$. 特别地, 设 T 是阶为 $n(n \geq 2)$ 的树, 其中 P 是 T 的最长路, 则 $vcfc(T) \geq vcfc(P)$.

3 主要结果

定理 1 设 $T \in \mathcal{T}_{n,k}$, 其中 $n-1 = lk + s(0 \leq s \leq k-1)$, 那么

$$vcfc(T) \geq \begin{cases} \lceil log_2(2l+2) \rceil & s = 0 \\ \lceil log_2(2l+3) \rceil & s = 1 \\ \lceil log_2(2l+4) \rceil & s \geq 2 \end{cases}.$$

证 因为 $T \in \mathcal{T}_{n,k}$, 则 T 中含有 k 个悬挂路. 删除 T 中最短的悬挂路 S_1 得到 T_1; 删除 T_1 中的最短悬挂路 S_2 得到 T_2; $\cdots$; 删除 T_{k-3} 中的最短悬挂路 S_{k-2} 得到 T_{k-2}. 显然 T_{k-2} 是 T 中的一条路, 记为 P. 下面证明 P 是 T 中的最长路. 对 k 进行归纳, 当 $k=2$ 时, $T_{n,2}$ 是一条路, 显然成立. 假设当 $k=m$ 成立, 即通过上述方法能找到最长路. 下面证明对 $k=m+1$ 也成立. 令 $T' \in \mathcal{T}_{n,k}$, $k=m+1$ 且最长路为 P', 删除 T' 的最短悬挂路 S_1' 得到 T_1', 此时 T_1' 是有 m 个叶子的树, 由归纳可知 T_1' 有最长路 P''. 如果 $|P'| = |P''|$, 则结果成立. 假设 $|P'| > |P''|$, 则 $S_1' \subset P'$. 由于 S_1' 是 T_1' 的最短悬挂路, 那么与 S_1' 关联的点 v 一定关联另一条悬挂路 S_2' 且 $|S_1'| \leq |S_2'|$. 当 $|S_2'| = |S_1'|$ 时, 那么 T_1' 存在一条路 $P' - S_1' + S_2'$ 有 $|P' - S_1' + S_2'| = |P'| > |P''|$, 与 P'' 是 T_1' 的最长路矛盾. 因此 $|S_2'| > |S_1'|$, 那么可以找到 T' 的一条路 $P' - S_1' + S_2'$ 有 $|P' - S_1' + S_2'| > |P'|$, 与 P' 是 T' 的最长路矛盾.

从上面的叙述中可以得到以下结论:

$$|S_1| \leq |S_2| \leq \cdots \leq |S_{k-2}| \leq |P|, \tag{1}$$

$$|S_1| + |S_2| + \cdots + |S_{k-2}| + |P| = n, \tag{2}$$

$$|P| \geq 2|S_{k-2}| + 1. \tag{3}$$

由 (2) 可得:

$$|P| = n - |S_1| - |S_2| - \cdots - |S_{k-2}| \geq n - (k-2)|S_{k-2}| \tag{4}$$

由 (3) 可得:

$$|S_{k-2}| \leq \frac{|P|-1}{2}. \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 可得:

$$|P| \geq n - \frac{(k-2)(|P|-1)}{2}$$

即

$$|P| \geq 2\lceil \frac{n-1}{k} \rceil + 1.$$

下面分三种情况来讨论:

若 $s=0$, 由上面的叙述可知: 当 $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_{k-2}| = l$ 时, P 是这类树 T 的最长路中最短的, 树 T 如图 1 所示, 此时 $|P| \geq 2l+1$.

若 $s=1$, 由上面的叙述可知: 当 $|S_1|=|S_2|=\cdots=|S_{k-2}|=l$ 时, P 是这类树 T 的最长路中最短的, 树 T 如图 2 所示, 此时 $|P|\geq 2l+2$.

若 $s\geq 2$, 由上面的叙述可知: 当 $|S_1|=|S_2|=\cdots=|S_i|=l$, $|S_{i+1}|=\cdots=|S_{k-2}|=l+1$ 时, P 是这类树 T 的最长路中最短的, 树 T 如图 3 所示, 此时 $|P|\geq 2l+3$.
即

$$|P|\geq\begin{cases}2l+1 & s=0\\ 2l+2 & s=1\\ 2l+3 & s\geq 2\end{cases}.$$

由引理 4 可知，$vcfc(T)\geq vcfc(P)$，那么

$$vcfc(T)\geq vcfc(P)\geq\begin{cases}\lceil log_2(2l+2)\rceil & s=0\\ \lceil log_2(2l+3)\rceil & s=1\\ \lceil log_2(2l+4)\rceil & s\geq 2\end{cases}.$$

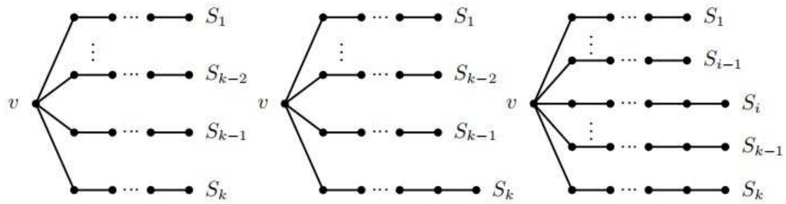

图 1: $s=0$ 图 2: $s=1$ 图 3: $s\geq 2$

定理 2 设 $T\in\mathcal{T}_{n,k}$, $vcfc_{\max}(T)=\max\{vcfc(T):T\in\mathcal{T}_{n,k}\}$, 那么 $\lceil\log_2(n-k+3)\rceil\leq vcfc_{\max}(T)\leq\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$.

证 先证 $vcfc_{\max}(T)\geq\lceil\log_2(n-k+3)\rceil$. 由引理 4 可知, $vcfc_{\max}(T)\geq vcfc(P)$, 其中 P 是 T 中的最长路. 因为 $T\in\mathcal{T}_{n,k}$, 显然 T 的最长路为 P_{n-k+2}, 则 $vcfc_{\max}(T)\geq vcfc(P_{n-k+2})$ $=\lceil\log_2(n-k+3)\rceil$.

下证 $vcfc_{\max}(T)\leq\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$. 令 $T'=T-\{v_1,v_2,\cdots,v_k|v_i$ 是 T 的叶子$\}$, 显然 T' 是阶为 $n-k$ 的树. 我们对 T 定义一种着色: T 中与 T' 相同的点着色与 T' 相同, 其它点着颜色 $vcfc(T')+1$. 显然, 树 T 中的任意两点间都有一条无矛盾点连通路, 从而 $vcfc_{\max}(T)\leq vcfc(T')+1$. 由引理 3 可知, $vcfc(T')\leq vcfc(P_{n-k})$, 因此 $vcfc_{\max}(T)\leq vcfc(T')+1\leq vcfc(P_{n-k})+1=\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$, 证毕.

注 1 在定理 2 中，设 $n=8$, $k=3$, 如图 4 所示, 此时 $vcfc(T)=4=\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$. 设 $n=7$, $k=3$, 如图 5 所示, 此时 $vcfc(T)=3=\lceil\log_2(n-k+3)\rceil$, 即定理 2 中的上界和下界是可以取到的.

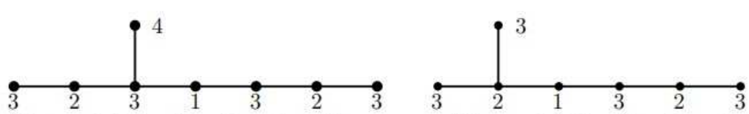

图 4: $vcfc(T)=\lceil log_2(n-k+1)\rceil+1$ 图 5: $vcfc(T)=\lceil log_2(n-k+3)\rceil$

注 2 在定理 2 中, 设 $n-k=2^l-s(s=1$ 或 $s=2)$, 则 $n-k+2=2^l$ 或 2^l+1. 如图 6 所示, 令 $P_{n-k}=v_{k+1}\cdots v_n$, 则 $vcfc(P_{n-k})=\lceil\log_2(n-k+1)\rceil=l$. 令 $P=v_1v_{k+1}\cdots v_2$, 那么 $vcfc(P)=\lceil\log_2(n-k+3)\rceil=l+1=\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$. 由引理 4 可知, $vcfc(T)\geq vcfc(P)$, 其中 P 是 T 最长路, 因此 $vcfc(T)\geq\lceil\log_2(n-k+3)\rceil$. 对树 T 定义一种着色: 用中心点着色法对 P_{n-k} 进行着色, 其它点着颜色 $vcfc(P_{n-k})+1$. 显然, 树 T 任意两点间都有一条无矛盾点连通路, 那么 $vcfc(T)\leq vcfc(P_{n-k})+1=\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$. 在此种情况下的树 T 有 $vcfc(T)=\lceil\log_2(n-k+3)\rceil=\lceil\log_2(n-k+1)\rceil+1$, 即定理 2 中的上界和下界是可以同时取到的.

图 6: 路P_{n-k+2}

在上述定理中, 我们对 $\mathcal{T}_{n.k}$ 关于无矛盾点连通数的上界和下界进行了讨论. 下面将对 $\mathcal{T}_n^\Lambda$ 关于无矛盾点连通数的上界进行了讨论, 得到如下结论:

定理 3 设 $T\in\mathcal{T}_n^\Lambda$, 那么 $vcfc(T)\leq\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$.

证 因为 $T\in\mathcal{T}_n^\Lambda$, 那么 T 一定存在点 v 满足 $d_T(v)=\Lambda$. 在 T 中删除点 v, 将有 Λ 个连通分支, 记为 D_1, D_2, $\cdots$, D_Λ. 令 $v_i\in leaf(T)\cap V(D_i)$, $T'=T-\{v_1,v_2,\cdots,v_\Lambda\}$, 显然 T' 是阶为 $n-\Lambda$ 的树. 我们对 T 定义一种着色: T 中与 T' 中相同的点着色与 T' 相同, 其它点着颜色 $vcfc(T')+1$. 显然, 树 T 中的任意两点间都有一条无矛盾点连通路, 从而 $vcfc(T)\leq vcfc(T')+1$. 由引理 3 可知, $vcfc(T')\leq vcfc(P_{n-\Lambda})$, 因此 $vcfc(T)\leq vcfc(T')+1\leq vcfc(P_{n-\Lambda})+1=\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$, 证毕.

注 3 如图 7 所示, 设 $n-\Lambda=2^l-s(s=1$ 或 $s=2)$, 则 $n-\Lambda+2=2^l$ 或 2^l+1. 令 $P_{n-\Lambda}=v_{\Lambda+1}\cdots v_n$, 则 $vcfc(P_{n-\Lambda})=\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil=l$. 令 $P=v_1v_{\Lambda+1}\cdots v_2$, 那么 $vcfc(P)=\lceil\log_2(n-\Lambda+3)\rceil=l+1=\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$. 由引理 4 可知, $vcfc(T)\geq vcfc(P)$, 其中 P 是 T 最长路, 从而 $vcfc(T)\geq\lceil\log_2(n-\Lambda+3)\rceil=\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$. 对树 T 定义一种着色: 用中心点着色法对 $P_{n-\Lambda}$ 进行着色, 其它点着颜色 $vcfc(P_{n-\Lambda})+1$. 显然, 树 T 任意两点间都有一条无矛盾点连通路, 从而 $vcfc(T)\leq vcfc(P_{n-\Lambda})+1=\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$. 因此在此种情况下的树 T 有 $vcfc(T)=\lceil\log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$, 即定理 3 中的上界是可以取到的.

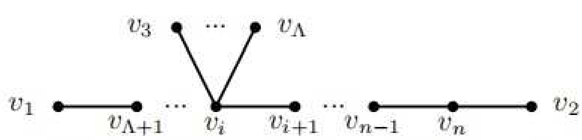

图 7: $vcfc(T)=\lceil log_2(n-\Lambda+1)\rceil+1$

在 [8,10] 中, 作者对高度为 d 且阶为 2^d-1 的完全二叉树 B_d 以及二叉树关于无矛盾点连通数的上界进行了讨论, 在此将其推广到 $\mathcal{T}_\Lambda$ 和 Λ_d 中, 得到以下结论:

定理 4 设 $T \in \mathcal{T}_\Lambda$, 当 $\Lambda = 3$ 且 $d = 9$ 时, 那么 $vcfc(T) \le 8$.

证 对树 T 定义一种着色: 第一层着颜色 1 且第二层着颜色 2. 将已经着过颜色的点删掉, 将会得到 6 个 B_7 的子树. 在每一个子树中, 每一层的着色是一样的. 从上至下, 第 1 个 B_7 用颜色 $3,4,5,6,7,1,2$, 如图 8 所示, 其它 5 个 B_7 着色方式与第 1 个类似. 第 2 个 B_7 用颜色 $4,5,6,7,8,1,$ 2, 第 3 个 B_7 用颜色 $5,6,7,8,3,1,2$, 第 4 个 B_7 用颜色 $6,7,8,3,4,1,2$, 第 5 个 B_7 用颜色 $7,8,3,4,5,1,$ 2, 第 6 个 B_7 用颜色 $8,3,4,5,6,1,2$. 显然, 树 T 的任意两点间都存在一条无矛盾的点连通路, 从而 $vcfc(T) \le 8$, 证毕.

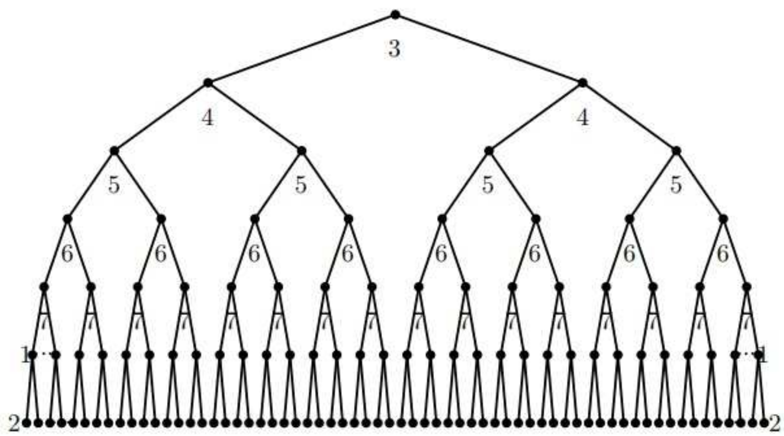

图 8: B_7的最佳无矛盾点连通着色

定理 5 设 $T \in \mathcal{T}_\Lambda$, 当 $\Lambda = 3$ 且 $d = 2(r+1) + 5r$ 时, 那么 $vcfc(T) \le 6r + 2$.

证 当 $d = 16$ 时, 即在定理 4 的结构中加 7 层, 而此时后 7 层的结构为 192 组与定理 4 中相同的 6 个 B_7 子树, 我们将对其进行着色. 对其中 1 组进行着色, 其它 191 组与之相同. 在每一个子树中, 每一层的着色是一样的. 从上至下, 第 1 个 B_7 用颜色 $9,10,11,12,13,1,2$, 第 2 个 B_7 用颜色 $10,11,12,13,14,1,2$, 第 3 个 B_7 用颜色 $11,12,13,14,9,1,2$, 第 4 个 B_7 用颜色 $12,13,14,9,10,1,$ 2, 第 5 个 B_7 用颜色 $13,14,9,10,11,1,2$, 第 6 个 B_7 用颜色 $14,9,10,11,12,1,2$, 那么此类树有 16 层和 14 种颜色. 重复运用前面的过程, 颜色 1,2 着色 $2(r+1)$ 层且 r 组不相交的 6 种颜色着色 $5r$ 层, 因此此类树 T 有 $2(r+1)+5r$ 层和 $6r+2$ 种颜色. 容易验证树 T 中任意两点间都有一条无矛盾的点连通路, 从而 $vcfc(T) \le 6r+2$, 证毕.

定理 6 设 $T \in \mathcal{T}_\Lambda$, 当 $d = 2(r+1) + [\Lambda(\Lambda-1)-1]r$ 时, 那么 $vcfc(T) \le \Lambda(\Lambda-1)r + 2$.

证 对树 T 定义一种着色: 先考虑前 $\Lambda(\Lambda-1)+3$ 层, 第一层着颜色 1 和第二层着颜色 2. 删除已经着色的点将会剩下 $\Lambda(\Lambda-1)$ 个 $(\Lambda-1)_{\Lambda(v-1)-1}$ 子树. 对这 $\Lambda(\Lambda-1)$ 个子树进行着色, 在每一个子树中, 每一层的着色是一样的. 从上至下, 第 1 个子树用颜色 $3,4,\cdots,\Lambda(\Lambda-1)+1,1,2$, 第 2 个子树用颜色 $4,5,\cdots,\Lambda(\Lambda-1)+2,1,2,\cdots$, 第 $\Lambda(\Lambda-1)$ 个子树用颜色 $\Lambda(\Lambda-1)+2,3,4,\cdots,\Lambda(\Lambda-1),1,2$. 重复前面过程, 颜色 1,2 着色 $2(r+1)$ 层且 r 组不相交的 $\Lambda(\Lambda-1)$ 种颜色着色 $[\Lambda(\Lambda-1)-1]r$ 层, 因此此类树 T 有 $2(r+1)+[\Lambda(\Lambda-1)-1]r$ 层和 $\Lambda(\Lambda-1)r+2$ 种颜色. 容易验证树 T 中任意两点间都有一条无矛盾的点连通路, 从而 $vcfc(T) \le 6r+2$, 证毕.

Λ_d 与 $\mathcal{T}_\Lambda$ 的结构类似但不完全相同, 区别在于 Λ_d 中第 $2\sim d-1$ 层的点的度为 $\Lambda+1$ 而 $\mathcal{T}_\Lambda$ 的点的度为 Λ, 类似于 $\mathcal{T}_\Lambda$, 对于 Λ_d 可以得到下面结论:

定理 7 设 $T\in\Lambda_d$, 当 $d=2(r+1)+(\Lambda^2-1)r$ 时, 那么 $vcfc(T)\leq\Lambda^2r+2$.

定理 8 设 T 是阶为 $n(n\geq 2)$ 的树, 那么 $vcfc(T)\leq d_V(T)$.

证 只需证明在算法 1 的着色条件下, 对于树中的每一对不同的顶点 u, v 都存在一条无矛盾连通路. 由于由两个相邻顶点组成的路总是无矛盾的, 我们可以假设 u 和 v 是不相邻的. 设 v_0 是首先将 u 和 v 分开的平衡点, 因为在 u 和 v 之间的路上 v_0 的颜色是最小的也是唯一的, 所以 u 和 v 之间的路是无矛盾的. 因此, 这是 T 的一个无矛盾点连通, 即 $vcfc(T)\leq d_V(T)$.

由定理 6、7、8 可知, $\mathcal{T}_\Lambda$ 和 Λ_d 关于无矛盾点连通数的上界与高度有关, 于是得到以下定理:

定理 9 设 $T\in\mathcal{T}_\Lambda$, 那么

$$vcfc(T)\leq\begin{cases}\Lambda(\Lambda-1)r+2 & d=2(r+1)+[\Lambda(\Lambda-1)-1]r\\ d & d\neq 2(r+1)+[\Lambda(\Lambda-1)-1]r\end{cases}.$$

定理 10 设 $T\in\Lambda_d$, 那么

$$vcfc(T)\leq\begin{cases}\Lambda^2r+2 & d=2(r+1)+(\Lambda^2-1)r\\ d & d\neq 2(r+1)+(\Lambda^2-1)r\end{cases}.$$

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory[M]. GTM244, Springer, 2008.

[2] 李珍珍. 图的无矛盾点连通数的最大值 [D]. 新疆: 新疆大学, 2018.

[3] Czap J, Jendrol S and Valiska J. Conflict-free connections of graphs[J]. Discuss. Math. Graph Theory, 2018, 38(4): 911–920.

[4] Li Xueliang, Zhang Yingying, Mao Yaping, Zhao Haixing. Conflict-free vertex-connections of graphs[J]. Discuss. Math. Graph Theory, 2020, 40(1): 51–65.

[5] Li Xueliang, Zhu Xiaoyu. Conflict-free (vertex-)connection numbers of graphs with small diameter[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2020, 76(2): 288–298.

[6] Chang Hong, Huang Zhong, Li Xueliang, Mao Yaping, Zhao Haixing. Nordhaus-Gaddum-type theorem for conflict-free connection number of graphs[J]. DOI: 10.48550/arXiv.1705.08316.

[7] Deng Bo, Li Wenjing, Li Xueliang, Mao Yaping, Zhao Haixing. Conflict-free conncetion numbers of line graphs[J]. Lecture Notes in Computer, 2017, 10627: 141–151.

[8] Chang Hong, Meng Ji, Li Xueliang, Zhang Jingshu. Conflict-free connection of trees[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2021, 42: 340–353.

[9] Li Zhenzhen, Baoyin Dureng. Maximum value of conflict-free vertex-connection number of graphs[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2018, DOI: 10.1142/S1793830918500593.

[10] Cheilaris P, Keszegh B, Pálvöigyi D. Unique-maximum and conflict-free coloring for hypergraphs and tree graphs[J]. Discrete Math, 2013, 27(4): 1775–1787.

CONFLICT-FREE VERTEX-CONNECTION NUMBER OF SEVERAL TREES

ZHONG Yong, YAN Zheng

(*School of Information and Mathematics, Yangtze University, 434000, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of the conflict-free vertex-connection number of vertex coloring graphs, and obtain an upper bound and a lower bound for the conflict-free vertex-connection number of $\mathcal{T}_{n.k}$ and an upper bound for the conflict-free vertex-connection number of $\mathcal{T}_n^{\Lambda}$, $\mathcal{T}_{\Lambda}$ and Λ_d by using the structural characteristics of trees.

Keywords: conflict-free vertex-connection number; tree; upper bound; lower bound

2010 MR Subject Classification: 05C15