

## 多元向量值区域和加权风险值

王巧玲

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 针对投资组合, 为了能更好的刻画投资者的偏好和降低对异常值的敏感度, 在已有的多元向量值风险值和条件尾部期望的基础上, 本文引入多元向量值区域和加权风险值, 并研究了他们的性质, 在不同的 Coupla 函数下, 分别得到了多元向量值区域和加权风险值的具体表达式, 最后本文提供了相关的数值计算例子. 本文所引入的向量值区域和加权风险值风险度量, 拓展了文献中一些已有的结果.

**关键词:** 加权风险值; 区域风险值; 多元向量值; Coupla

MR(2010) 主题分类号: 60E99; 60E05; 62H20

中图分类号: O211.9

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2022)04-0330-15

### 1 引言

风险度量是一种对潜在损失进行量化分析的手段. 1994 年, JP Morgan 公司引入了风险值 (Value at Risk, VaR), 但因其不能反映极端损失情形, 并且不具有次可加性. 因此, 1999 年 Arztnern 等人提出了一致风险度量的概念. Kusoka(2001) 给出了具有分布不变性的条件风险度量 (Conditional Value at Risk, CVaR). 2003 年, Landsman 和 Valdez 提出了条件尾部期望 (Conditional-Tail-Expectation, CTE). 随后, 多名学者对 CTE 进行了讨论, 其中, Krokmal 和 Palmquist 等人对 CTE 的应用进行了研究 Cherny(2006) 认为 CTE 未能表现出投资者的偏好, 为此提出了加权风险值 (Weight Value at Risk, WVaR). Cont(2010) 等人认为一致风险度量缺乏稳健性以及异常值非常敏感, 因此提出了区域风险值 (Range Value at Risk, RVaR). 但是其并未讨论 RVaR 和 WVaR 在多种投资组合下的表现.

金融市场上, 投资人为了对冲风险会选择多种头寸. 因此不少学者对多维风险度量进行了研究. Li(1996a) 等人提供了具有固定边界的多元随机向量的分布. 2013 年, Cousina 和 Di Bernardino 得到了单变量向量值 VaR 的多元推广, 多元向量值 VaR 具有平移不变性, 正齐次性等. 2014 年, Cousina 和 Di Bernardino 得到了单变量向量值 CTE 的多元推广, 多元向量值 CTE 同样也具有平移不变性, 正齐次性、共单调可加性等. 但是, 这两种风险度量并未考虑投资者的偏好.

本文引入多元向量值 WVaR 和 RVaR, 并对其基本性质进行研究. 相较于 VaR 和 CTE, WVaR 和 RVaR 能够更好的刻画投资者的偏好和降低对异常值的敏感度.

### 2 准备知识

设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  为一完备的概率空间, 记  $\mathcal{X} = L^{\pm\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 即为  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上有界非负随机变量全体,  $1 < p < +\infty$ . 设  $X$  是投资人的损失, 且  $X \in \mathcal{X}$ , 其分布函数为  $F_X(x)$ , 生存函

\*收稿日期: 2021-04-01 接收日期: 2021-05-21

作者简介: 王巧玲 (1995-), 女, 四川乐山, 硕士, 主要研究方向: 金融风险度量.

数为  $S_X(x) = 1 - F_X(x)$ . 记

$$F_X^{-1}(\alpha) := \inf\{x \in R : F_X(x) \geq \alpha\}, \bar{F}_X^{-1}(\alpha) := \inf\{x \in R : \bar{F}_X(x) \leq 1 - \alpha\}, \alpha \in (0, 1).$$

置信水平为  $\alpha$  的风险值 ( $VaR_\alpha$ ) 的定义如下:

$$VaR_\alpha(X) := \inf\{x \in R : F_X(x) \geq \alpha\},$$

其中置信水平  $\alpha \in (0, 1)$ .

置信水平为  $\alpha$  的条件尾部期望 ( $CTE_\alpha$ ) 的定义如下:

$$CTE_\alpha(X) := -\frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_t(X) dt, \alpha \in (0, 1).$$

关于测度  $\mu$  的加权风险值 ( $WVaR_\mu$ ) 的定义如下:

$$WVaR_\mu(X) := \int_0^1 CTE_\alpha(X) \mu(d\alpha),$$

其中  $\mu$  为  $[0, 1]$  上的概率测度, 若  $\mu \ll L[0, 1]$ , 根据 Radon-Nikodym 定理, 存在  $\omega$  使得  $d\mu(\alpha) = \omega(\alpha)d\alpha$ . 因此  $WVaR_\mu(X)$  又可以表示为

$$WVaR_\mu(X) := \int_0^1 CTE_\alpha(X) \omega(\alpha) d\alpha.$$

置信水平为  $\alpha, \beta$  的区域风险值 ( $RVaR_{\alpha, \beta}$ ) 的定义如下:

$$RVaR_{\alpha, \beta}(X) = E[X | VaR_\alpha(X) \leq X \leq VaR_\beta(X)] = -\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta VaR_t(X) dt, 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$$

由于在单变量的情形下  $\{VaR_\alpha(X) \leq X \leq VaR_\beta(X)\}$ ,  $\{1 - \beta \leq \bar{F}_X(X) \leq 1 - \alpha\}$  以及  $\{\alpha \leq F_X(x) \leq \beta\}$  表示的是相同的事件集合. 因此,  $RVaR_{\alpha, \beta}(X) = E[X | \alpha \leq F_X(x) \leq \beta]$ .

设  $d \geq 1$ , 记  $\mathcal{X}_i = L^p(\Omega, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ , 设  $\mathcal{X}^d$  为一  $d$  维乘积空间  $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$ ,  $i = 1, \cdots, d$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_d) \in \mathcal{X}^d$ ,  $X_i \in \mathcal{X}_i$ , 即  $X_i$  为投资人的边际损失.  $\mathbf{X}$  的联合分布函数为  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_d \leq x_d)$ , 联合生存函数  $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = P(X_1 \geq x_1, \cdots, X_d \geq x_d)$ . 设  $\mathbf{X}$  满足以下常规条件: (1)  $\mathbf{X}$  绝对连续; (2)  $E(X_i) < +\infty$ ,  $i = 1, \cdots, d$ .

根据 Cousina 和 Di(2013),  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 若  $\mathbf{X}$  满足常规条件,  $\alpha \in (0, 1)$ , 定义  $\underline{VaR}_\alpha$  如下:

$$\underline{VaR}_\alpha(\mathbf{X}) := E[\mathbf{X} | F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \alpha] = \begin{pmatrix} E[X_1 | F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \alpha] \\ \vdots \\ E[X_d | F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \alpha] \end{pmatrix},$$

则称  $\underline{VaR}_\alpha(\mathbf{X})$  为置信水平为  $\alpha$  的下象限多元向量值风险价值. 记  $\underline{VaR}_\alpha^i(\mathbf{X})$  为  $\underline{VaR}_\alpha(\mathbf{X})$

的第  $i$  个分量 ( $i = 1, \dots, d$ ). 同理, 定义  $\overline{VaR}_\alpha$  如下:

$$\overline{VaR}_\alpha(\mathbf{X}) := E[\mathbf{X} | \overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) = 1 - \alpha] = \begin{pmatrix} E[X_1 | \overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) = 1 - \alpha] \\ \vdots \\ E[X_d | \overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) = 1 - \alpha] \end{pmatrix},$$

则称  $\overline{VaR}_\alpha(\mathbf{X})$  为置信水平为  $\alpha$  的上象限多元向量值风险值. 记  $\overline{VaR}_\alpha^i(\mathbf{X})$  为  $\overline{VaR}_\alpha(\mathbf{X})$  的第  $i$  个分量 ( $i = 1, \dots, d$ ).

根据 Cousina 和 Di(2014),  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 若  $\mathbf{X}$  满足常规条件, 定义  $\underline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  如下:

$$\underline{CTE}_\alpha(\mathbf{X}) := E[\mathbf{X} | F_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \geq \alpha] = \begin{pmatrix} E[X_1 | F_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \geq \alpha] \\ \vdots \\ E[X_d | F_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \geq \alpha] \end{pmatrix},$$

则称  $\underline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  为置信水平为  $\alpha$  的下象限多元向量值条件尾部期望. 记  $\underline{CTE}_\alpha^i(\mathbf{X})$  为  $\underline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  的第  $i$  个分量 ( $i = 1, \dots, d$ ). 同理, 定义  $\overline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  如下:

$$\overline{CTE}_\alpha(\mathbf{X}) := E[\mathbf{X} | \overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] = \begin{pmatrix} E[X_1 | \overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] \\ \vdots \\ E[X_d | \overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] \end{pmatrix},$$

称  $\overline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  为置信水平为  $\alpha$  的上象限多元向量值条件尾部期望. 记  $\overline{CTE}_\alpha^i(\mathbf{X})$  为  $\overline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  的第  $i$  个分量 ( $i = 1, \dots, d$ ).

## 2.1 WVaR

$WVaR_\mu(\mathbf{X})$  可以看作是  $\underline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  的加权平均值. 自然地, 可以通过  $\overline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  和  $\underline{CTE}_\alpha(\mathbf{X})$  来表示  $\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X})$  和  $\underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X})$ .

**定义 2.1** 对任意的随机向量  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 若  $\mathbf{X}$  满足常规条件,  $i = 1, 2, \dots, d$ , 置信水平  $\alpha \in (0, 1)$ . 定义  $\underline{WVaR}_\mu$  如下:

$$\underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}) := \begin{pmatrix} \int_0^1 \underline{CTE}_\alpha^1(\mathbf{X}) \omega(\alpha) d\alpha \\ \vdots \\ \int_0^1 \underline{CTE}_\alpha^d(\mathbf{X}) \omega(\alpha) d\alpha \end{pmatrix}$$

则称  $\underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X})$  为下象限多元向量值加权风险值. 定义  $\overline{WVaR}_\mu$  如下:

$$\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}) := \begin{pmatrix} \int_0^1 \overline{CTE}_\alpha^1(\mathbf{X}) \omega(\alpha) d\alpha \\ \vdots \\ \int_0^1 \overline{CTE}_\alpha^d(\mathbf{X}) \omega(\alpha) d\alpha \end{pmatrix}$$

则称  $\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X})$  为的上象限多元向量值加权风险值.

记  $WVaR_\mu(\mathbf{X})=(WVaR_\mu^1(\mathbf{X}), \dots, WVaR_\mu^d(\mathbf{X}))'$ ,  $\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X})=(\overline{WVaR}_\mu^1(\mathbf{X}), \dots, \overline{WVaR}_\mu^d(\mathbf{X}))'$ . 如果  $\mathbf{X}$  是可交换的随机向量, 则  $WVaR_\mu^i(\mathbf{X})=WVaR_\mu^j(\mathbf{X})$  和  $\overline{WVaR}_\mu^i(\mathbf{X})=\overline{WVaR}_\mu^j(\mathbf{X})$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ . 当  $d=1$  时,  $WVaR_\mu(\mathbf{X}) = \overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}) = WVaR_\mu(\mathbf{X})$ .

**命题 2.2** 令函数  $h$  为  $h(x_1, \dots, x_d)=(h_1(x_1), \dots, h_d(x_d))$ , 对任意  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ ,

(1) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非降函数, 则下列关系成立:

$$WVaR_\mu^i(h(\mathbf{X})) = \int_0^1 CTE_\alpha^i(h(\mathbf{X}))\omega(\alpha)d\alpha, \overline{WVaR}_\mu^i(h(\mathbf{X})) = \int_0^1 \overline{CTE}_\alpha^i(h(\mathbf{X}))\omega(\alpha)d\alpha.$$

(2) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非增函数, 则下列关系成立:

$$WVaR_\mu^i(h(\mathbf{X})) = \int_0^1 v_1^i(\alpha)\omega(\alpha)d\alpha, \overline{WVaR}_\mu^i(h(\mathbf{X})) = \int_0^1 v_2^i(\alpha)\omega(\alpha)d\alpha,$$

其中  $v_1^i(\alpha) = E[h_i(\mathbf{X}_i)|\overline{F}_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \geq \alpha]$ ,  $v_2^i(\alpha) = E[h_i(\mathbf{X}_i)|F_\mathbf{X}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha]$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

**证** 根据定义 2.1  $WVaR_\mu^i(h(\mathbf{X})) = \int_0^1 CTE_\alpha^i\omega(\alpha)d\alpha$ , 对  $i=1, \dots, d$ , 令

$$F_{h(x)}(y_1, \dots, y_d) = \begin{cases} F_\mathbf{X}(h^{-1}(y_1), \dots, h^{-1}(y_d)), & \text{若 } h_1, \dots, h_d \text{ 为非降函数} \\ \overline{F}_\mathbf{X}(h^{-1}(y_1), \dots, h^{-1}(y_d)), & \text{若 } h_1, \dots, h_d \text{ 为非增函数} \end{cases}$$

则上述结果成立.

**命题 2.3** 对任意  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ ,  $WVaR_\mu(\mathbf{X})$  和  $\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X})$  满足以下性质:

(1) 正齐性: 对任意的  $\mathbf{c}=(c_1, \dots, c_d)' \in \mathbb{R}_+^d$ ,

$$WVaR_\mu(c_1X_1, \dots, c_dX_d) = (c_1WVaR_\mu^1(\mathbf{X}), \dots, c_dWVaR_\mu^d(\mathbf{X})),$$

$$\overline{WVaR}_\mu(c_1X_1, \dots, c_dX_d) = (c_1\overline{WVaR}_\mu^1(\mathbf{X}), \dots, c_d\overline{WVaR}_\mu^d(\mathbf{X})).$$

(2) 平移不变性: 对任意的  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^d$ ,

$$WVaR_\mu(\mathbf{c} + \mathbf{X}) = \mathbf{c} + WVaR_\mu(\mathbf{X}), \overline{WVaR}_\mu(\mathbf{c} + \mathbf{X}) = \mathbf{c} + \overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}).$$

**证** 根据 Cousina 和 Di(2014) 中命题 2.2, 易证命题 2.3 成立.

**推论 2.4** 设  $h$  为线性函数,  $h(x_1, \dots, x_d)=(h_1(x_1), \dots, h_d(x_d))$ , 则如下结论成立

(1) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非降函数, 则下列关系成立:

$$WVaR_\mu(h(\mathbf{X})) = h(WVaR_\mu(\mathbf{X})), \overline{WVaR}_\mu(h(\mathbf{X})) = h(\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}));$$

(2) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非增函数, 则下列关系成立:

$$WVaR_\mu(h(\mathbf{X})) = h\left(\int_0^1 \left[\frac{E(\mathbf{X})}{1 - \hat{K}(\alpha)} - \frac{\hat{K}(\alpha)}{1 - \hat{K}(\alpha)} \overline{CTE}_{1-\alpha}(\mathbf{X})\right]\omega(\alpha)d\alpha\right),$$

$$\overline{WVaR}_\mu(h(\mathbf{X})) = h\left(\int_0^1 \left[\frac{E(\mathbf{X})}{K(1-\alpha)} - \frac{1-K(1-\alpha)}{1-\hat{K}(\alpha)} \underline{CTE}_{1-\alpha}(\mathbf{X})\right] \omega(1-\alpha) d\alpha\right),$$

其中  $K$  为  $\mathbf{X}$  的核分布函数,  $K(x) = P(F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq x)$ ,  $\hat{K}(x) = P(\overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq x)$ , 对任意的  $x \in (0, 1)$ .

证 推论 2.4 由 Cousin and Di Bernardino (2014) 中推论 2.3 易证.

定义 2.5 设  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 若存在随机变量  $Z$  和非降函数  $f_1, \dots, f_d$ , 使得  $\mathbf{X} = ((f_1(Z), \dots, f_d(Z)))$ , 则称  $\mathbf{X}$  是共单调的.

定义 2.6 设  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$ , 称  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  二元  $d$  维随机向量对, 若存在一个随机变量  $\mathbf{Z} \in \mathcal{X}^d$  和非降函数  $f_1, \dots, f_d, g_1, \dots, g_d$ , 使得  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := ((f_1(Z_1), \dots, f_d(Z_d)), (g_1(Z_1), \dots, g_d(Z_1)))$ , 则称  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  是  $\pi$ -共单调的.

命题 2.7 若  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  是  $\pi$ -共单调的, 则下列等式成立:

$$\underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}) + \underline{WVaR}_\mu(\mathbf{Y}),$$

$$\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}) + \overline{WVaR}_\mu(\mathbf{Y}).$$

证 根据 Cousin and Di Bernardino (2014) 性质 2.3 易证. 对于两个独立且各自元素之间相互独立的随机向量, 他们之间存在次可加性.

命题 2.8 对任意的  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$  且  $\mathbf{X}$  满足常规条件, 对任意的  $i = 1, \dots, d$ , 若  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  的各个分量  $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d$  之间相互独立, 则具有如下不等式:

$$\underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \underline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}) + \underline{WVaR}_\mu(\mathbf{Y}).$$

证 由 Cousin and Di Bernardino(2014) 中的性质 2 易证.

## 2.2 RVaR

同样的,  $\text{RVaR}_{\alpha, \beta}(X)$  也可以扩展到多元情形.

定义 2.9 设  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 若  $\mathbf{X}$  满足常规条件  $i=1, 2, \dots, d$ , 置信水平  $0 < \alpha \leq \beta < 1$ , 定义  $\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}$  如下:

$$\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) := E[\mathbf{X} | \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta] = \begin{pmatrix} E[X_1 | \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta] \\ \vdots \\ E[X_d | \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta] \end{pmatrix},$$

则称  $\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  为  $[\alpha, \beta]$  上的下象限多元向量值区域风险值. 定义  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}$  如下:

$$\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) := E[\mathbf{X} | 1 - \beta \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] = \begin{pmatrix} E[X_1 | 1 - \beta \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] \\ \vdots \\ E[X_d | 1 - \beta \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] \end{pmatrix},$$

则称  $\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})$  为  $[\alpha, \beta]$  上的上象限多元向量值区域风险值. 同样的, 记  $\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = (\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^1(\mathbf{X}), \dots, \underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^d(\mathbf{X}))'$ ,  $\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = (\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^1(\mathbf{X}), \dots, \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^d(\mathbf{X}))'$ . 如果  $\mathbf{X}$  是可交换的随机向量, 则

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^i(\mathbf{X}) = \underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^j(\mathbf{X}), \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^i(\mathbf{X}) = \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^j(\mathbf{X}), i, j = 1, \dots, d.$$

当  $d=1$  时,  $\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = RVaR_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})$ .  $\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})$  可以表示为:

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = \frac{1}{K(\beta) - K(\alpha)} \int_{\alpha}^{\beta} VaR_{\gamma}(\mathbf{X}) \hat{K}'(\gamma) d\gamma, \quad (2.1)$$

其中  $K$  为  $\mathbf{X}$  的核分布函数,  $K(x) = P(F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq x)$ ,  $\hat{K}(x) = P(\overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq x)$ , 对任意的  $x \in (0, 1)$ .

**命题 2.10** 令函数  $h$  为  $h(x_1, \dots, x_d) = (h_1(x_1), \dots, h_d(x_d))$ ,  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$  则以下结论成立:

(1) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非降函数, 则下列关系成立:

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^i(h(\mathbf{X})) = E[h_i(X_i) | \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta],$$

$$\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^i(h(\mathbf{X})) = E[h_i(X_i) | 1 - \beta \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha];$$

(2) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非增函数, 则下列关系成立:

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^i(h(\mathbf{X})) = E[h_i(X_i) | \alpha \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta].$$

$$\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^i(h(\mathbf{X})) = E[h_i(X_i) | 1 - \beta \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha].$$

证明方法与命题 2.2 类似.

**命题 2.11** 对任意  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ ,  $\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})$  和  $\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})$  满足以下性质:

(1) 正齐性: 对任意的  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d)' \in \mathbb{R}_+^d$ ,

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(c_1 X_1, \dots, c_d X_d) = (c_1 \underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^1(\mathbf{X}), \dots, c_d \underline{RVaR}_{\alpha,\beta}^d(\mathbf{X})),$$

$$\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(c_1 X_1, \dots, c_d X_d) = (c_1 \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^1(\mathbf{X}), \dots, c_d \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}^d(\mathbf{X})).$$

(2) 平移不变性: 对任意的  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^d$ ,

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{c} + \mathbf{X}) = \mathbf{c} + \underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}), \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{c} + \mathbf{X}) = \mathbf{c} + \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}).$$

证 不妨令  $h_i(X_i) = c_i + X_i$ , 根据命题 2.10(1), 易证.

**推论 2.12** 设  $h$  为线性函数,  $h(x_1, \dots, x_d) = (h_1(x_1), \dots, h_d(x_d))$ ,

(1) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非降函数, 则下列关系成立:

$$\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(h(\mathbf{X})) = h(\underline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})), \overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(h(\mathbf{X})) = h(\overline{RVaR}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}));$$

(2) 若  $h_1, \dots, h_d$  为非增函数, 则下列关系成立:

$$\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(h(\mathbf{X})) = h\left(\frac{\overline{CTE}_{1-\beta}^i(\mathbf{X})}{\hat{K}(\beta) - \hat{K}(\alpha)} - \frac{\hat{K}(\alpha)}{\hat{K}(\beta) - \hat{K}(\alpha)} \overline{CTE}_{1-\alpha}^i(\mathbf{X})\right),$$

$$\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(h(\mathbf{X})) = h\left(\frac{\underline{CTE}_{1-\beta}^i(\mathbf{X})}{K(1-\alpha) - K(1-\beta)} - \frac{1 - K(1-\alpha)}{K(1-\alpha) - K(1-\beta)} \underline{CTE}_{1-\alpha}^i(\mathbf{X})\right).$$

证 不妨令  $h(\mathbf{X}) = (b_1 - a_1 X_1, \dots, b_d - a_d X_d)$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ , 由命题 2.10 可得

$$\begin{aligned} \underline{RVaR}^i(h(\mathbf{X})) &= E[b_i - a_i X_i | \alpha \leq \overline{F}(\mathbf{X}) \leq \beta] \\ &= b_i - a_i E[X_i | \alpha \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta], \end{aligned}$$

由全期望公式可得:

$$\begin{aligned} E[X_i | \alpha \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta] &= \frac{1}{\hat{K}(\beta) - \hat{K}(\alpha)} \{E[X | \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta] - E[X | \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \alpha] P(\overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \alpha)\} \\ &= \frac{1}{\hat{K}(\beta) - \hat{K}(\alpha)} \{\underline{CTE}_{1-\beta}^i(\mathbf{X}) - \hat{K}(\alpha) \underline{CTE}_{1-\alpha}^i(\mathbf{X})\}, \end{aligned}$$

整理可得.  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(h(\mathbf{X}))$  同理可证.

例 1 若  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$  服从边际均匀分布, 且  $h_i(x) = 1 - x$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , 则有

$$\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = 1 - \underline{RVaR}_{1-\beta, 1-\alpha}^i(\mathbf{1} - \mathbf{X}) + \frac{\hat{K}(1-\beta)}{\hat{K}(1-\alpha) - \hat{K}(1-\beta)} \overline{CTE}_{\alpha}^i(\mathbf{X}),$$

其中  $\hat{K}$  为向量  $\mathbf{1} - \mathbf{X} = (1 - X_1, \dots, 1 - X_d)$  的核分布函数. 若  $\mathbf{X}$  与  $\mathbf{1} - \mathbf{X}$  有相同的分布函数, 则称随机向量  $\mathbf{X}$  是对称不变的, 且下列等式成立:

$$\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = 1 - \underline{RVaR}_{1-\beta, 1-\alpha}^i(\mathbf{1} - \mathbf{X}) + \frac{K(1-\beta)}{K(1-\alpha) - K(1-\beta)} \overline{CTE}_{\alpha}^i(\mathbf{X}).$$

命题 2.13 若  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  是  $\pi$ -共单调的, 则下列等式成立:

$$(1) \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) + \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{Y}),$$

$$(2) \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) + \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{Y}).$$

证 由于  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  与  $\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  的证明相似, 因此在这里只证明  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$ . 若  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$  是  $\pi$ -共单调的, 则存在一个向量  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , 有  $X_i = f_i(Z_i)$ ,  $Y_i = g_i(Z_i)$ ,  $f_i, g_i$  为非降函数, 令  $h_i = f_i + g_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . 因为  $h$  为非降函数, 由命题 2.6 可得

$$\begin{aligned} \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) &= E[h_i(Z_i) | \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta] \\ &= E[f_i(Z_i) | \alpha \leq F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) \leq \beta] + E[g_i(Z_i) | \alpha \leq F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) \leq \beta] \\ &= \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) + \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{Y}), \end{aligned}$$

即证.

对于两个独立且各自元素之间相互独立的随机向量, 他们之间存在次可加性.

**命题 2.14** 当  $\beta$  固定时, 设  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$ , 且  $\mathbf{X}$  满足常规条件, 对任意的  $i = 1, \dots, d$ . 若  $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d$  之间相互独立, 则  $\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$  具有如下不等式:

$$\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) + \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{Y}),$$

**证** 要证  $E[X_i + Y_i | \alpha \leq F_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \beta] \leq \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) + \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{Y})$ , 由于  $X_i + Y_i$  与  $X_j + Y_j (i \neq j)$  相互独立,  $i \neq j$ , 因此只需证:

$$\frac{E[X_i + Y_i, \alpha \leq F_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \beta]}{P(\alpha \leq F_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \beta)} \leq \frac{E[X_i, \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta]}{P(\alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta)} + \frac{E[Y_i, \alpha \leq F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) \leq \beta]}{P(\alpha \leq F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) \leq \beta)}.$$

令  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ ,  $U_i := F_{X_i+Y_i}(X_i + Y_i), i = 1, \dots, d$ ,  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_d)$ ,  $V_i := F_{X_i}(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, d$  由于  $X_i + Y_i$  与  $X_j + Y_j$  相互独立, 对于任意的  $i, j = 1, \dots, d$ , 则有

$$E[X_i + Y_i | \alpha \leq F_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \beta] = E[X_i + Y_i | \hat{\alpha}_i \leq F_{X_i+Y_i}(X_i + Y_i) \leq \beta],$$

记  $\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\prod_{i=1, i \neq j}^d U_i}$ . 运用单变量下  $\underline{RVaR}^i(\mathbf{X})$  的次可加性, 则下列等式成立:

$$E[X_i + Y_i, \hat{\alpha} \leq F_{X_i+Y_i}(X_i + Y_i) \leq \beta | U_{i, i \neq j}] \leq E[X_i, \hat{\alpha} \leq F_{X_i}(X_i) \leq \beta | U_{i, i \neq j}] + E[Y_i, \hat{\alpha} \leq F_{Y_i}(Y_i) \leq \beta | U_{i, i \neq j}].$$

由于  $(U_1, \dots, X_i, \dots, U_d)$  具有相同的分布,  $(V_1, \dots, X_i, \dots, V_d)$  具有相同的边际分布和相依结构, 因此

$$E[X_i, \hat{\alpha} \leq F_{X_i}(X_i) \leq \beta | U_{i, i \neq j}] = E[X_i, \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \leq \beta | V_{i, i \neq j}].$$

同理,

$$E[Y_i, \hat{\alpha} \leq F_{Y_i}(Y_i) \leq \beta | U_{i, i \neq j}] = E[Y_i, \alpha \leq F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) \leq \beta | V_{i, i \neq j}].$$

因此, 上述结论成立.

### 3 阿基米德类 Coupla 下的表现

在本节中, 由于阿基米德类 Coupla 具有可交换性, 对具有边际分布的随机向量引入相同的多元风险度量.

**定义 3.1** 设映射  $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  为一连续严格单调递减的凸函数, 且  $\phi(1) = 0$ . 记

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \phi(0) < t < +\infty \end{cases},$$

称  $\phi^{[-1]}$  为  $\phi$  的伪逆函数. 定义映射  $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]: C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_d))$ , 则称  $C$  为  $d$  维阿基米德类 Coupla, 并称  $\phi$  为其生成函数.

表 1 不同 Coupla 的指数分布下  $\underline{WVaR}_\mu^i(X, Y), i = 1, 2$ 

Coupla	$\theta$	$\underline{WVaR}_\mu^i(X, Y)$
Clayton $C_\theta$	$[-1, +\infty)$	$\frac{\theta}{\theta-1} - \frac{\theta(\theta+1)}{2(\theta-1)(1-e^{-\lambda})} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2}{\theta-\alpha(1+\theta)+\alpha^{1+\theta}} e^{-\lambda\alpha} \lambda d\alpha$
Counter-monotonic W	-1	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4(1-e^{-\lambda})} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha+\ln\alpha} e^{-\lambda\alpha} \lambda d\alpha$
Independent $\Pi$	0	$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha+\ln\alpha} e^{-\lambda\alpha} d\alpha$
$\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$	1	$\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\alpha(1-\alpha+\ln\alpha)}{(1-\alpha)^2(1-e^{-\lambda})} \lambda e^{-\lambda\alpha} d\alpha$
Comonotonic M	$\infty$	$\frac{\lambda+1}{2\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{2(1-e^{-\lambda})}$

表 2 不同 Coupla 的幂函数分布 ( $0 < \lambda < 1$ ) 下  $\underline{WVaR}_\mu^i(X, Y), i = 1, 2$ 

Coupla	$\theta$	$\underline{WVaR}_\mu^i(X, Y)$
Clayton $C_\theta$	$[-1, +\infty)$	$\frac{\theta}{(\theta-1)} - \frac{\theta\lambda}{2(\theta-1)} \int_0^1 \frac{(\theta+1)(1-\alpha)^2}{\theta-\alpha(1+\theta)+\alpha^{1+\theta}} \alpha^{\lambda-1} d\alpha$
Counter-monotonic W	-1	$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \frac{\alpha^{\lambda-1}(\alpha-1)^2}{1-\alpha+\ln\alpha} d\alpha$
Independent $\Pi$	0	$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^{\lambda-1}}{1-\alpha+\ln\alpha} d\alpha$
$\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$	1	$\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\lambda\alpha^\lambda(1-\alpha+\ln\alpha)}{(1-\alpha)^2} d\alpha$
Comonotonic M	$\infty$	$\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}$

**命题 3.2** 设  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 对任意的  $i = 1, \dots, d$ , 在阿基米德类 Coupla 下有

- (1)  $\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = \frac{1}{K(\beta) - K(\alpha)} \int_\alpha^\beta [1 - \int_\gamma^1 (1 - \frac{\phi(u)}{\phi(\gamma)})^{d-1} du] K'(\gamma) d\gamma$ ,
- (2)  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = \frac{1}{K(1-\alpha) - K(1-\beta)} \int_\alpha^\beta [1 - \int_\gamma^1 (1 - \frac{\phi(u)}{\phi(1-\gamma)})^{d-1} du] K'(1-\gamma) d\gamma$ ,
- (3)  $\underline{WVaR}_\mu^i(\mathbf{X}) = \int_0^1 \{ \frac{1}{1-K(\alpha)} \int_\alpha^1 [1 - \int_\gamma^1 (1 - \frac{\phi(u)}{\phi(\gamma)})^{d-1} du] K'(\gamma) d\gamma \omega(\alpha) \} d\alpha$ ,
- (4)  $\overline{WVaR}_\mu^i(\mathbf{X}) = \int_0^1 \{ \frac{1}{K(1-\alpha)} \int_\alpha^1 [1 - \int_\gamma^1 (1 - \frac{\phi(u)}{\phi(1-\gamma)})^{d-1} du] K'(\gamma) d\gamma \omega(1-\alpha) \} d\alpha$ .

**例 2** 设 C 为 Clayton coupla 族, 此时  $\mu(u) = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1), u \in (0, 1)$ . 特别地当  $\theta = -1$ , 此时 C 为 Counter-monotonic W 函数; 当  $\theta = 0$ , 此时 C 为 Independent  $\Pi$  函数; 当  $\theta = 1$ , 此时  $C = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ ; 当  $\theta = \infty$ , 此时 C 为 Comonotonic M 函数. 当  $X, Y$  服从  $(0, 1)$  上的均匀分布时, 令  $\phi$  取以下两种分布.

(1) 指数分布:

$$\omega(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, x \in (0, 1), \lambda > 0,$$

其中  $\lambda$  为投资者的容忍度;

(2) 幂分布:

$$\omega(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1}, & 0 < \lambda < 1 \\ \lambda(1-x)^{\lambda-1}, & \lambda > 1 \end{cases}, \text{对任意的 } x \in (0, 1).$$

在指数分布和幂函数 ( $0 < \lambda < 1$ ) 分布下, 分别得到  $\underline{WVaR}_\mu^i(X, Y)$ , 计算结果见表 1, 表 2.

特别地, 当 C 为 Clayton 函数族时, 无论  $\alpha$  的分布函数是指数还是幂函数,  $\underline{WVaR}_\mu^i(X, Y)$  都是关于相依参数  $\theta$  的减函数, 见图 1 和图 2.

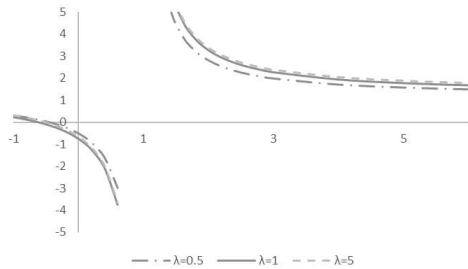


图 1: 指数分布下的  $WVaR_{\mu}^i(X, Y), i = 1, 2$

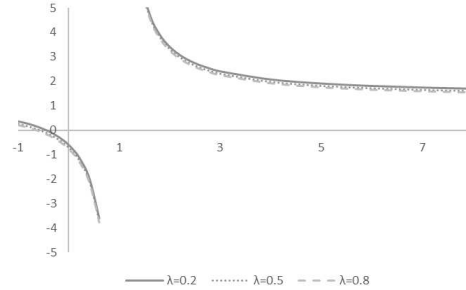


图 2: 幂函数 ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) 分布下的  $WVaR_{\mu}^i(X, Y), i = 1, 2$

表 3 不同 Coupla 的幂函数分布下  $RVaR_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

Coupla	$\theta$	$RVaR_{\alpha, \beta}^i(X, Y)$
Clayton $C_{\theta}$	$[-1, +\infty)$	$\frac{2\theta(\beta^{\theta+1} - \alpha^{\theta+1}) - (1+\theta)\theta(\beta^2 - \alpha^2)}{2(1-\theta)[(\theta+1)(\alpha+\beta) - \beta^{\theta+1} + \alpha^{\theta+1}]}$
$\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$	1	$\frac{\alpha^2 \ln \alpha - \beta^2 \ln \beta + \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)}{2(\beta - \alpha) + \beta^2 - \alpha^2}$
Comonotonic M	$\infty$	$(\beta - \alpha)[\frac{1}{2}(\beta + \alpha) + 1]$

例 3 同理, 取不同的 Coupla 函数 C 计算得到  $RVaR^i(X, Y)$ , 结果见表 3.

特别地, 当 C 为 Clayton coupla 函数时, 当  $\beta$  固定时,  $RVaR_{\alpha, \beta}^i(X, Y)$  是关于  $\alpha$  的增函数且为相依参数  $\theta$  的减函数, 如图 3 — 图 6. 当 C 为 Gumble coupla 函数时, 取  $\theta = 1$ , 当  $\beta$  固定时,  $RVaR_{\alpha, \beta}^i(X, Y)$  是关于  $\alpha$  的增函数, 如图 7 — 图 8.

对任意的  $x_1, x_2 \in R$  以及任意的实数  $a \in (0, 1)$ , 若满足  $f(ax_1 + (1 - a)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$ , 则称  $f(x)$  为拟凹函数. 特别地, 若  $x_1 \neq x_2$ , 则称函数  $f(x)$  为严格拟凹函数.

命题 3.3 若  $\omega$  是严格拟凹函数,  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 对任意的  $i = 1, \dots, d$ , 有下列不等式成立:

$$CTE_{\alpha}^i(\mathbf{X}) \leq WVaR_{\mu}^i(\mathbf{X}).$$

命题 3.4 当  $\beta$  固定时, 若  $F_{\mathbf{X}}$  为严格拟凹函数, 对任意的  $i = 1, \dots, d$ , 有下列不等式成立:

$$VaR_{\alpha}^i(\mathbf{X}) \leq RVaR_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) \leq VaR_{\beta}^i(\mathbf{X}).$$

证 当  $\beta$  固定时, 根据定义自然有  $RVaR_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) \leq VaR_{\beta}^i(\mathbf{X})$ , 只需证明左边. 记

$$\underline{L}(\alpha, \beta) := \{\mathbf{x} \in R_+^d : \alpha \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leq \beta\},$$

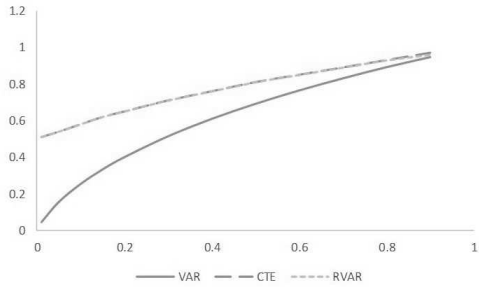


图 3:Clayton 族下,  $\theta = 1, \beta = 0.95, \underline{RVAR}_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

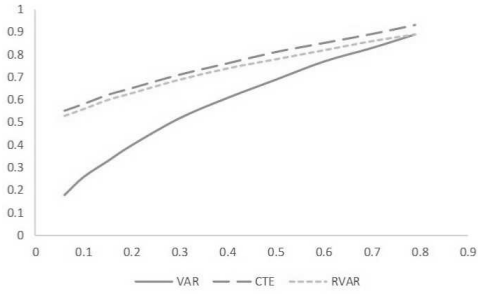


图 4:Clayton 族下,  $\theta = 1, \beta = 0.8, \underline{RVAR}_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

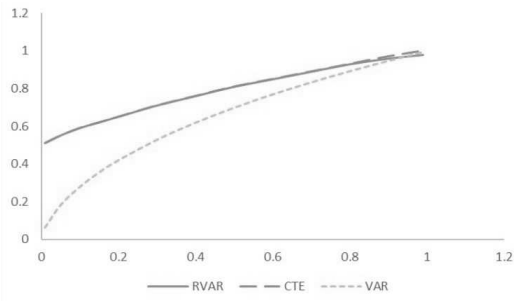


图 5:Clayton 族下,  $\theta = 5, \beta = 0.95, \underline{RVAR}_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

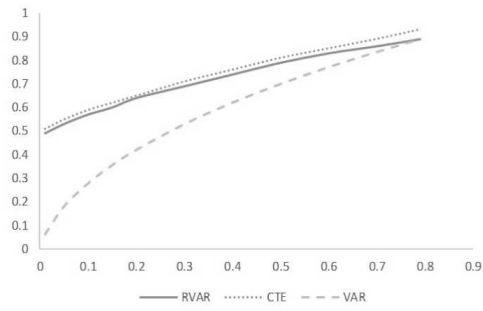


图 6:Clayton 族下  $\theta = 5, \beta = 0.8, \underline{RVAR}_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

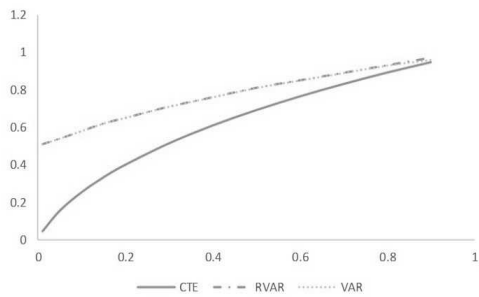


图 7:Gumble 族下,  $\beta = 0.95, \underline{RVAR}_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

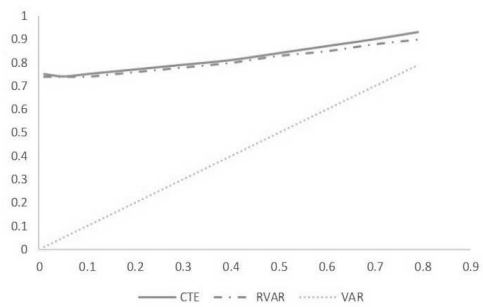


图 8:Gumble 族下  $\beta = 0.8, \underline{RVAR}_{\alpha, \beta}^i(X, Y), i = 1, 2$

即为  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  的  $(\alpha, \beta)$ - 下水平集,  $\alpha \in (0, \beta)$ , 记

$$\underline{L}(\alpha, \beta) := \{\mathbf{x} \in R_+^d : 1 - \beta \leq \overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leq 1 - \alpha\},$$

即为  $\overline{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  的  $(1 - \beta, 1 - \alpha)$ - 上水平集. 由分布函数的定义可得  $\partial L$  为  $F_{\mathbf{X}}$  在  $(\alpha, \beta)$  上的下界. 由于  $F_{\mathbf{X}}$  是一个严格拟凹函数, 因此,  $\underline{L}(\alpha, \beta)$  为  $R_+^d$  中的一个凸集, 对所有的  $\mathbf{X} \in \underline{L}(\alpha, \beta)$ ,  $X_1 \geq VaR_{\alpha}(X_1), \dots, X_d \geq VaR_{\alpha}(X_d)$ . 因此,  $VaR_{\alpha}^i(\mathbf{X}) \leq \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X})$ , 即证.

**命题 3.5** 若  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$  满足共单调, 对任意的  $i = 1, \dots, d$ , 有下列等式成立:

$$\underline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X}) = WVaR_{\mu}^i(\mathbf{X}) = \overline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X}).$$

**证** 根据 Di Bernardino(2014) 中性质 2.7 可得.

**命题 3.6** 若  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$  满足共单调, 对任意的  $i = 1, \dots, d$ , 有下列不等式成立:

$$\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = RVaR_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}).$$

**命题 3.7** 当  $\beta$  固定时,  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$ , 且满足常规条件, 对任意的  $i = 1, \dots, d$ ,

(1) 若  $\underline{VaR}_{\alpha}^i(\mathbf{X})$  为  $\alpha$  的非降函数, 则  $\underline{VaR}_{\alpha}^i(\mathbf{X}) \leq \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) \leq \underline{VaR}_{\beta}^i(\mathbf{X})$ ;

(2) 若  $\underline{CTE}_{\alpha}^i(\mathbf{X})$  为  $\alpha$  的非降函数, 则  $\underline{CTE}_{\alpha}^i(\mathbf{X}) \leq \underline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X})$ ,

**证** 因为  $\underline{CTE}_{\alpha}^i(\mathbf{X})$  和  $\underline{VaR}_{\alpha}^i(\mathbf{X})$  为  $\alpha$  的非降函数, 则易证命题 3.7 成立.  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X})$  和  $\overline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X})$  也有相同的结论.

**命题 3.8** 若  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$  满足常规条件, 且  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  拥有相同的 Coupla 函数 C, 若  $X_i = Y_i (i = 1, \dots, d)$ , 那么下列等式成立

$$\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{Y}), \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) = \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{Y}),$$

$$\underline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X}) = \underline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{Y}), \overline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X}) = \overline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{Y}).$$

**证** 根据 Cousin 和 Di Bernardino(2013) 中性质 2.6 和 Cousin 和 Di Bernardino(2014) 中性质 2.9 易证.

#### 4 一阶随机控制下的表现

下面将给出  $\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  和  $\underline{WVaR}_{\mu}(\mathbf{X})$  在一阶随机控制下的表现.

**定义 4.1** 设  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , 若满足  $Q_{\mathbf{X}}(\alpha) \leq Q_{\mathbf{Y}}(\alpha)$ , 则称在一阶随机控制下  $\mathbf{X}$  小于  $\mathbf{Y}$ , 即  $X_i \preceq_{st} Y_i (i = 1, \dots, d)$ , 其中  $Q_{\mathbf{X}}(\alpha)$  为  $\mathbf{X}$  分布的  $\alpha$  分位数.

**命题 4.2** 令  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$  满足常规条件, 且有相同的 Coupla 函数 C, 若  $X_i \preceq_{st} Y_i (i = 1, \dots, d)$ , 则下列等式成立:

$$\underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) \leq \underline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{Y}), \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X}) \leq \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{Y}),$$

$$\underline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X}) \leq \underline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{Y}), \overline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{X}) \leq \overline{WVaR}_{\mu}^i(\mathbf{Y}).$$

证 根据 Cousin 和 Di Bernardino(2013) 中性质 2.7 和 Cousin 和 Di Bernardino(2014) 中性质 2.10 易证.

命题 4.3 当  $\beta$  固定时, 令  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}^d$  满足常规条件, 且  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  有相同 Coupla 函数  $C$ , 若  $E(X_i|X_i \leq \beta) \leq E(Y_i|Y_i \leq \beta)$  且  $\underline{VaR}^i(\mathbf{X})$  和  $\underline{VaR}^i(\mathbf{Y})(i = 1, \dots, d)$  满足单一截断条件, 即存在一个  $c \in (0, \beta)$ , 使得当  $\alpha \in (0, c)$  时,  $\underline{VaR}^i(\mathbf{X}) \geq \underline{VaR}^i(\mathbf{Y})$ ; 当  $\alpha \in (c, \beta)$  时,  $\underline{VaR}^i_\alpha(\mathbf{X}) \leq \underline{VaR}^i_\alpha(\mathbf{Y})$ , 则下列不等式成立:

$$\underline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) \leq \underline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{Y}).$$

证 考虑一个函数  $G$  定义如下:

$$\begin{aligned} G(\alpha) &:= (K(\beta) - K(\alpha))(\underline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{Y}) - \underline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})) \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} (\underline{VaR}^i_{\gamma}(\mathbf{Y}) - \underline{VaR}^i_{\gamma}(\mathbf{X}))K'(\gamma)d\gamma. \end{aligned}$$

对任意的  $\alpha < c$ , 有

$$G(0) = (K(\beta) - K(0))(E(X_i|X_i \leq \beta) \leq E(Y_i|Y_i \leq \beta)) \geq 0, G(\beta) = 0,$$

$$G'(\alpha) = (\underline{VaR}^i_\alpha(\mathbf{X}) - \underline{VaR}^i_\alpha(\mathbf{Y}))K'(\alpha) \geq 0.$$

当  $c \leq \alpha < \beta$  时,  $G'(\alpha) \leq 0$ , 因此  $G(\alpha) > 0$  进而上述不等式成立.  $\overline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})(i = 1, \dots, d)$  也有类似的结论.

命题 4.4 设  $\mathbf{X}, \mathbf{X}^* \in \mathcal{X}^d$  且满足常规条件,  $F_i(X_i) = F_i(X_i^*)$ , 对任意的  $i = 1, \dots, d$ . 设  $C$  为  $\mathbf{X}$  的 Coupla 函数,  $\overline{C}$  为  $\mathbf{X}$  的生存 Coupla 函数,  $C^*$  为  $\mathbf{X}^*$  的 Coupla 函数,  $\overline{C}^*$  为  $\mathbf{X}^*$  的生存 Coupla 函数,

(1) 记  $U_i = F_{X_i}(X_i)$ ,  $U_i^* = F_{X_i^*}(X_i^*)$ ,  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ ,  $\mathbf{U}^* = (U_1^*, \dots, U_d^*)$ , 若

$$[U_i|\alpha \leq C(\mathbf{U}) \leq \beta] \preceq_{st} [U_i^*|\alpha \leq C(\mathbf{U}^*) \leq \beta],$$

则

$$\underline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) \leq \underline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}^*);$$

(2) 记  $V_i = \overline{F}_{X_i}(X_i)$ ,  $V_i^* = \overline{F}_{X_i^*}(X_i^*)$ ,  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_d)$ ,  $\mathbf{V}^* = (V_1^*, \dots, V_d^*)$ , 若

$$[V_i|\alpha \leq C(\mathbf{V}) \leq \beta] \preceq_{st} [V_i^*|\alpha \leq C(\mathbf{V}^*) \leq \beta],$$

则

$$\overline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}) \leq \overline{RVaR}^i_{\alpha, \beta}(\mathbf{X}^*).$$

证  $U_1 \preceq_{st} U_2$  当且仅当  $E[f(U_1)] \leq E[f(U_2)]$ , 对任意的非降函数  $f$ . 取  $f(u) =$

$Q_{X_i}(u), u \in (0, 1)$ , 有

$$E[Q_{X_i}(U_i) - \alpha \leq C(\mathbf{U}) \leq \beta] \leq E[Q_{X_i}(U_i^*) - \alpha \leq C(\mathbf{U}^*) \leq \beta].$$

由于  $X_i, X_i^*$  具有相同的分布, 因此

$$E[Q_{X_i^*}(U_i^*) - \alpha \leq C(\mathbf{U}^*) \leq \beta] = E[Q_{X_i^*}(U_i) - \alpha \leq C(\mathbf{U}^*) \leq \beta],$$

因此得到结果 (1). 对于结果 (2), 令  $f(u) = \overline{F}_i^{-1}(u), u \in (0, 1)$  可得证. 根据 Cousin 和 Di Bernardino(2014) 的命题 2.12, 对  $WVaR_\mu(\mathbf{X})$  自然有相同的结果.

**推论 4.5** 设  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^2$  且满足常规条件,

(1) 若  $C$  为阿基米德类 Coupla, 则  $WVaR_\mu(\mathbf{X}), RVaR_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  是关于  $\theta$  的一个减函数,  $RVaR_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  是关于  $\alpha$  (或者  $\beta$ ) 的一个增函数;

(2) 若  $\overline{C}$  为阿基米德类 Coupla, 则  $\overline{WVaR}_\mu(\mathbf{X}), \overline{RVaR}_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  是关于  $\theta$  的一个增函数.

**推论 4.6** 设  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$  且满足常规条件,

(1) 若  $VaR_\alpha^i(\mathbf{X})$  为关于  $\alpha$  的非降函数, 则  $RVaR_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X})$  也是关于  $\alpha$  的非降函数;

(2) 若  $\overline{VaR}_\alpha^i(\mathbf{X})$  为关于  $\alpha$  的非降函数, 则  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X})$  也是关于  $\alpha$  的非降函数.

**推论 4.7** 设  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^d$  满足常规条件, Coupla 函数  $C$  和生存 Coupla 函数  $\overline{C}$ ,

(1) 若  $C$  为  $d$  维阿基米德类 Coupla, 则  $RVaR_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X})$  也是关于  $\alpha$  的非降函数;

(2) 若  $\overline{C}$  为  $d$  维阿基米德类 Coupla, 则  $\overline{RVaR}_{\alpha, \beta}^i(\mathbf{X})$  也是关于  $\alpha$  的非降函数.

## 5 结论

本文将加权风险值以及区域风险值扩展到多元情形. 研究结果表明: 推广的多元向量值加权和区域风险值满足正齐次性和平移不变性以及共单调性. 另外, 本文还提供了一些计算例子, 将  $VaR_\alpha(\mathbf{X})$ 、 $CTE_\alpha(\mathbf{X})$  与  $RVaR_{\alpha, \beta}(\mathbf{X})$  相比较, 并且讨论了多元向量值加权和区域风险值在一阶随机控制下的表现.

## 参考文献

- [1] Cousin A, Bernardino E D. On multivariate extensions of conditional-tail-expectation[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2014, 55(1): 272–282.
- [2] Ajm R B. Distributions with fixed marginals and related topics[J]. Journal of the American Statistical Association, 1996, 94(448): 1389.
- [3] Rama Cont, Romain Deguest, Giacomo Scandolo. Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures[J]. Quantitative Finance, 2010, 10(6): 593–606.
- [4] Bargés M, Cossette H, Marceaué. TVaR-based capital allocation with copulas[J]. Insurance Math. Econom, 2009, 45(3): 348–361.
- [5] Cousin A, Di Bernardino E. On multivariate extensions of value-at-risk[J]. Appl. Probab., 2005, 42(3): 810–825.

- [6] Ekeland I, Galichon A, Henry M. Comonotonic measures of multivariate risks[J]. *Math. Finance*, 2012, 22(1): 109–132.
- [7] Landsman Z M, Valdez E A. Tail conditional expectations for elliptical distributions[J]. *N. Am. Actuar. J.*, 2003, 7(4): 55–71.
- [8] ANappo G, Spizzichino F. Kendall distributions and level sets in bivariate exchangeable survival models[J]. *Inform. Sci.*, 2009, 179(17): 2878–2890.
- [9] Nelsen R B . An Introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 2006.
- [10] Nelsen R B, Quesada-Molinab J J, Rodríguez-Lallenac J A, úbeda-Floresc M. Kendall distribution functions[J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2003, 65(3): 263–268.
- [11] Puccetti G, Scarsini M. Multivariate momonotonicity[J]. *Multivariate Anal.*, 2010, 101(1): 291–304.
- [12] Genest C, Rivest L P. On the multivariate probability integral transformation[J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2001, 53(4): 391–399.
- [13] Jouini E, Meddeb M, Touzi N. Vector-valued coherent risk measures[J]. *Finance Stoch.*, 2004, 8(4): 531–552.
- [14] Chakak A, Ezzerg M. Bivariate contours of copula[J]. *Statist. Simulation Comput.*, 2000, 29(1): 175–185.
- [15] Genest C, Quessy J F, Rémillard B. Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation[J]. *Scand. J. Statist*, 2006, 33(2): 337–366.
- [16] McNeil A J, Nešlehová J. Multivariate archimedean copulas, d-monotone functions and l1-norm symmetric distributions[J]. *Ann. Statist.*, 2009, 37(5): 3059–3097.
- [17] Lee J, Prékopa A. Properties and calculation of multivariate risk measures: MVaR and MCVaR[J]. *Ann. Oper. Res.*, 2013, 211(1): 225–254.
- [18] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, Heath D. Coherent measures of risk[J]. *Math. Finan.*, 1999, 9(3): 203–228.
- [19] Cai J, Li H. Conditional tail expectations for multivariate phase-type[J]. *Journal of Applied Probability*, 2005, 42(3): 810–825.

## MULTIVARIATE VECTOR WEIGHT AND RANGE VALUE AT RISK

WANG Qiao-ling

(*Department of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

**Abstract:** For the investment portfolio, in order to better characterize investor preferences and reduce the sensitivity to outliers, this paper introduces the multivariate vector value area and weighted risk value risk measurement which are based on the existing multivariate vector value risk value and conditional tail expectations. And this paper studies their basic properties. Under different Coupla functions, the specific expressions of the vector value area and the weighted risk value are obtained respectively. Finally, this article provides relevant numerical calculation examples. The vector value area and weighted risk value risk measurement introduced in this paper extend some of the existing results in the literature.

**Keywords:** RVaR; WVaR; multivariate risk measure; Archimedean copula

**2010 MR Subject Classification:** 60E99; 60E05; 62H20