

两类单边算子的半连续性研究

王 玲

(河南理工大学数学与信息科学学院, 河南 焦作 454000)

摘要: 本文研究了单边 Hardy-Littlewood 极小算子的上半连续性及单边 Hardy-Littlewood 极大算子的下半连续性问题. 利用半连续性的相关性质和新型集合测度估计等获得了单边 Hardy-Littlewood 极小算子 $m^+f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上的上半连续性和单边 Hardy-Littlewood 极大算子 $M^+f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上的下半连续性, 推广了 Hardy-Littlewood 极大算子的半连续性成果.

关键词: 单边极小算子; 单边极大算子; 上半连续; 下半连续

MR(2010) 主题分类号: 42B20; 42B35 中图分类号: O174.3

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2022)03-0267-08

1 引言

半连续在最优化问题、对策论问题及变分不等式问题等诸多方面都有着重要的应用. 1951 年, Fort^[1] 证明了拓扑空间上半连续集值映射的通有连续性. 1993 年, Aubin^[2] 证明了从度量空间到可分度量空间的上半连续集值映射的通有连续性. 最近, Zaslavski 等^[3] 在半连续性方面又取得了一些进展, 见文献 [3,4,5], 这些结果被广泛应用于解的通有稳定性和通有唯一性的研究.

另一方面, 对单边算子的研究源于遍历理论发展的需要. 例如, 遍历极大算子的加权有界性可以转化为单边 Hardy-Littlewood 极大算子的加权有界性. 单边 Hardy-Littlewood 极大算子还可以用来刻画比 Muckenhoupt 权函数类更大的单边 Muckenhoupt 权函数类, 进而得到遍历平均序列的几乎处处收敛性. Cruz-Uribe, Neugebauer^[6] 引入了极小函数用来刻画反向 Hölder 不等式成立的函数类. Cruz-Uribe 等人^[7] 得到了权函数类和极小算子的弱型、强型有界性的等价刻画, 这些对极大算子是不成立的. Cruz-Uribe 等人^[8] 研究了单边极小算子的弱型和强型加权估计, 刻画了单边反向 Hölder 不等式成立的函数类. 关于单边算子的一些重要结果请参考 [9,10] 等相关文献.

对半连续性问题的研究有着悠久的历史, 经典 Hardy-Littlewood 极大算子的下半连续性已经得到证明, 但是对单边 Hardy-Littlewood 极大算子的半连续性目前并没有进行研究. 本文首先回顾半连续性的定义, 其次叙述单边 Hardy-Littlewood 极大算子和单边 Hardy-Littlewood 极小算子的定义, 接下来使用两种不同的方法证明两类单边算子的半连续性: 单边极小算子 $m^+f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上上半连续; 单边极大算子 $M^+f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上下半连续.

2 预备知识

*收稿日期: 2021-05-15 接收日期: 2021-09-09

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11401175); 河南省自然科学基金资助 (202300410184); 河南省教育厅高等学校重点科研项目 (19A110017); 河南省高校基本科研业务费专项 (NSFRF200329).

作者简介: 王玲 (1996-), 女, 江西吉安, 硕士生, 主要研究方向: 调和分析及其应用.

设 (X, d) 为完备的距离空间, f 是 X 上的实值函数. 我们称 f 在点 $x \in X$ 连续, 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 对所有的 $d(x, y) < \delta$ 满足 $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$. 当上式中只有单边的不等式成立时称 f 在该点是半连续的. 称 f 在 x 点下半连续, 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 对所有的 $d(x, y) < \delta$ 满足 $f(x) - \epsilon < f(y)$. 类似地, 称 f 在 x 点上半连续, 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 对所有的 $d(x, y) < \delta$ 满足 $f(y) < f(x) + \epsilon$. 若 f 在 X 中每一点都半连续, 则称 f 在 X 上半连续. f 是上半连续的当且仅当集合 $\{x \in X : f(x) < a\}$ 为 X 中的开集. 函数 f 是下半连续的当且仅当集合 $\{x \in X : f(x) > a\}$ 为 X 中的开集, 其中 a 为任意实数.

接下来, 给出单边极小算子和单边极大算子的定义. 记 $Q(x, h) = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \mid x_i \leq y_i \leq x_i + h, 1 \leq i \leq n\}$. 设 f 为 $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ 上的局部可积函数, f 的单边极小算子定义为

$$m^+ f(x) = \inf_{h>0} \frac{1}{|Q(x, h)|} \int_{Q(x, h)} |f(y)| dy,$$

类似地, f 的单边极大算子定义为

$$M^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{|Q(x, h)|} \int_{Q(x, h)} |f(y)| dy.$$

由 Lebesgue 微分定理可得对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 有 $m^+ f(x) \leq |f(x)| \leq M^+ f(x)$. 在本文中我们研究单边极小算子和单边极大算子的半连续性. 主要结果叙述如下.

定理 2.1 单边极小算子 $m^+ f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上上半连续.

定理 2.2 单边极大算子 $M^+ f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上下半连续.

为了证明本文的主要结果, 下面我们给出两个基本的引理.

引理 2.1 (积分的绝对连续性) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集且 $f \in L(E)$, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于任意的可测集 $A \subseteq E$, 只要 $|A| < \delta$, 就有 $|\int_A f(x) dx| \leq \int_A |f(x)| dx < \epsilon$.

引理 2.1 已经众所周知, 其证明可参见文献 [11] 定理 4.12. 在给出下一个引理前, 我们先引入一些符号. 设 $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, h > 0, 0 \leq a \leq h$.

记 $A_i = [x_i, x_i + h], B_i = [x_i - a, x_i + a + h]; C_i = [x_i - a, x_i] \cup (x_i + h, x_i + h + a], D_i = [x_i, x_i + a] \cup (x_i + h - a, x_i + h]; G_i = B_1 \times \dots \times B_{i-1} \times C_i \times B_{i+1} \times \dots \times B_n, K_i = A_i \times \dots \times A_{i-1} \times D_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_n$.

引理 2.2 若 $I_x = \prod_{i=1}^n A_i, I_y = \prod_{i=1}^n [y_i, y_i + h]$, 则当 $|y_i - x_i| \leq a (i = 1, 2, \dots, n)$ 时以下结论成立.

$$(1) I_y - I_x \subset \bigcup_{i=1}^n G_i;$$

$$(2) I_x - I_y \subset \bigcup_{i=1}^n K_i;$$

$$(3) |I_y - I_x| = |I_x - I_y| \leq 2nah^{n-1}.$$

证 由结论 (1)、(2) 可知结论 (3) 显然成立. 我们只需证明结论 (1) 和 (2).

注意到当 $a = 0$ 时, $I_y - I_x = I_y - I_x = \emptyset$. 此时结论 (1) 和 (2) 显然成立. 所以我们不妨假定 $0 < a \leq h$.

首先我们证明结论 (1).

设 $z = (z_1, \dots, z_n) \in I_y - I_x$, 即 z 属于 I_y 但 z 不属于 I_x . 对所有的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 $z_i \in [y_i, y_i + h]$. 另一方面, 由 $|y_i - x_i| \leq a$ 得到 $x_i - a \leq y_i < y_i + h \leq x_i + a + h$. 故 $z_i \in [x_i - a, x_i + a + h] = B_i$.

假设对所有的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 z_i 不属于 $[x_i - a, x_i] \cup (x_i + h, x_i + h + a]$. 则 $z_i \in [x_i, x_i + h]$, 所以 $z \in I_x$. 这与已知条件 $z \in I_y - I_x$ 矛盾. 因此必定存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使 $z_i \in [x_i - a, x_i] \cup (x_i + h, x_i + h + a] = C_i$. 于是有 $z \in G_i$, 进一步有 $z \in \bigcup_{i=1}^n G_i$. 因此,

$$I_y - I_x \subset \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

接下来证明结论 (2) 成立. 设 $z = (z_1, \dots, z_n) \in I_x - I_y$, 即 z 属于 I_x 且 z 不属于 I_y . 而对所有的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有 $z_i \in [x_i, x_i + h]$. 故 $z_i \in A_i$.

假设对所有的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 z_i 不属于 $[x_i, x_i + a) \cup (x_i + h - a, x_i + h]$. 下面分两种情况来考虑.

当 $2a > h$ 时, 可得 z_i 不属于 $[x_i, x_i + h]$. 这与 $z_i \in A_i$ 矛盾.

当 $2a \leq h$ 时, 注意到 $|y_i - x_i| \leq a$, 则有 $z_i \in [x_i + a, x_i + h - a]$ 且 $y_i \leq x_i + a \leq x_i + h - a \leq y_i + h$, 从而 $z_i \in [y_i, y_i + h]$, 这与 $z \in I_x - I_y$ 矛盾. 因此必定存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使 $z_i \in [x_i, x_i + a) \cup (x_i + h - a, x_i + h] = D_i$. 于是 $z \in \bigcup_{i=1}^n K_i$, 故 $I_x - I_y \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$.

3 定理的证明

由于定理 2.1 和定理 2.2 的证明方法类似, 所以仅给出定理 2.1 的证明. 下面分一维情形和高维情形分别给出单边极小算子上半连续性的证明.

单边极小算子的一维情形 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 单边极小算子定义为 $m^+f(x) = \inf_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)| dt$. 下面用两种方法来证明单边极小算子 $m^+f(x)$ 在 \mathbb{R} 上上半连续. 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 令

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : m^+f(x) < \lambda\}, \quad E'_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : m^+f(x) \geq \lambda\}.$$

方法一: 证明 E_λ 为开集.

证 注意到 $m^+f(x) \geq 0$. 所以当 $\lambda < 0$ 时, 显然 $E_\lambda = \emptyset$, 从而 E_λ 为开集. 我们不妨假定 $\lambda \geq 0$. 对任意的 $x \in E_\lambda$, 有

$$m^+f(x) = \inf_{r>0} \frac{1}{r} \int_x^{x+r} |f(t)| dt < \lambda.$$

由下确界定义, 存在 $h > 0$, 使得 $a \triangleq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)| dt < \lambda$. 即

$$\int_x^{x+h} |f(t)| dt = ah < \lambda h.$$

记 $I' = [x - h, x + 2h]$, 则 $f(x)$ 在 I' 上可积. 取 $\varepsilon = \frac{\lambda h - ah}{2}$, 则由引理 2.1 知 $\exists \delta' > 0$, 使得对于任意的可测集 $A \subseteq I'$, 只要 $|A| < \delta'$ 就有

$$\int_A |f(t)| dt < \frac{\lambda h - ah}{2}.$$

由于 $I_x = [x, x+h], I_y = [y, y+h]$, 所以 $I_x \subset I', I_y \subset I'$. 因此, $I_x - I_y \subset I', I_y - I_x \subset I'$. 若取 $\delta = \min\{\frac{\delta'}{4}, h\}$, 则当 $|y-x| < \delta$ 时, 由引理 2.2 得,

$$|I_y - I_x| = |I_x - I_y| \leq 2 \times 1 \times \delta \times h^0 = 2\delta < 2 \times \frac{\delta'}{4} = \frac{\delta'}{2} < \delta'.$$

则

$$\int_{I_y - I_x} |f(t)| dt < \frac{\lambda h - ah}{2}, \quad \int_{I_x - I_y} |f(t)| dt < \frac{\lambda h - ah}{2}.$$

由以上估计得到,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_y} |f(t)| dt - \int_{I_x} |f(t)| dt \right| = \left| \int_y^{y+h} |f(t)| dt - \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \\ &= \left| \int_y^{x+h} |f(t)| dt + \int_{x+h}^{y+h} |f(t)| dt - \int_x^y |f(t)| dt - \int_y^{x+h} |f(t)| dt \right| \\ &= \left| \int_{x+h}^{y+h} |f(t)| dt - \int_x^y |f(t)| dt \right| = \left| \int_{I_y - I_x} |f(t)| dt - \int_{I_x - I_y} |f(t)| dt \right| \\ &\leq \int_{I_y - I_x} |f(t)| dt + \int_{I_x - I_y} |f(t)| dt < \frac{\lambda h - ah}{2} + \frac{\lambda h - ah}{2} \\ &= \lambda h - ah. \end{aligned}$$

由此可得,

$$\begin{aligned} \int_y^{y+h} |f(t)| dt &= \int_{I_y} |f(t)| dt < \int_{I_x} |f(t)| dt + (\lambda h - ah) \\ &= \int_x^{x+h} |f(t)| dt + (\lambda h - ah) \\ &= ah + \lambda h - ah \\ &= \lambda h. \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{h} \int_y^{y+h} |f(t)| dt < \lambda.$$

所以,

$$m^+ f(y) = \inf_{r>0} \frac{1}{r} \int_y^{y+r} |f(t)| dt \leq \lambda.$$

此事实说明 $y \in E_\lambda$, 并且 $(x-\delta, x+\delta) \subset E_\lambda$. 由 x 的任意性可知 E_λ 中的每一个点都有一个以该点为中心的邻域包含于 E_λ , 从而 E_λ 中的点都是 E_λ 的内点, 即 E_λ 为开集.

方法二: 证明 E'_λ 为闭集.

证 由于当 $\lambda < 0$ 时结论显然成立. 故我们不妨假定 $\lambda \geq 0$. 取 E'_λ 中的任一收敛点列 $\{x_k\}$, 设 $x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$, 显然有, $m^+ f(x_k) \geq \lambda, k = 1, 2, \dots$.

对任意的 $h > 0$, 有,

$$\frac{1}{h} \int_{x_k}^{x_k+h} f(y) dy \geq \inf_{r>0} \frac{1}{r} \int_{x_k}^{x_k+r} |f(t)| dt = m^+ f(x_k) \geq \lambda.$$

记 $f_k(y) = f(y)\chi_{I_k \Delta I}(y)$, 其中 $I_k = [x_k, x_k + h]$, $I = [x, x + h]$, $I_k \Delta I = (I_k \setminus I) \cup (I \setminus I_k)$. 则显然 $f_k(y)$ 在 \mathbb{R} 上可测. 对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}$, 有, $|f_k(y)| \leq |f(y)|$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) = 0$. 由 Lebesgue 控制收敛定理得,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I |f_k(y)| dy = \int_I \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(y)| dy = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y)| dy &\geq \frac{1}{h} \int_{I_k} |f(y)| dy - \frac{1}{h} \int_{I_k \setminus I} |f(y)| dy \\ &\geq \lambda - \frac{1}{h} \int_{I_k \setminus I} |f_k(y)| dy \\ &\geq \lambda - \frac{1}{h} \int_{I_k} |f_k(y)| dy. \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$ 时, $I_k \rightarrow I$, 则有,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_{I_k} |f_k(y)| dy = \frac{1}{h} \int_I \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(y)| dy = 0.$$

因此,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y)| dy \geq \lambda,$$

故 $m^+ f(x) \geq \lambda$. 所以 $x \in E'_\lambda$, E'_λ 为闭集, 证毕.

为了文章更完整易懂, 下面我们把单边极小算子半连续性在 1 维情形的证明推广到 n 维.

单边极小算子的 n 维情形 我们用两种方法来证明明单边极小算子 $m^+ f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上上半连续. 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 令 $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : m^+ f(x) < \lambda\}$, $E'_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : m^+ f(x) \geq \lambda\}$.

方法一: 下面证明 E_λ 为开集.

证 由于当 $\lambda < 0$ 时, 显然 E_λ 为开集. 我们不妨假定 $\lambda \geq 0$. 对任意的 $x \in E_\lambda$ 有

$$m^+ f(x) = \inf_{r>0} \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} |f(t)| dt < \lambda.$$

由下确界定义, 存在 $h > 0$, 使得

$$a \triangleq \frac{1}{|Q(x, h)|} \int_{Q(x, h)} |f(t)| dt = \frac{1}{h^n} \int_{Q(x, h)} |f(t)| dt < \lambda.$$

即

$$\int_{Q(x, h)} |f(t)| dt = ah^n < \lambda h^n.$$

记 $I' = \prod_{i=1}^n [x_i - h, x_i + 2h]$, 则 $f(x)$ 在 I' 上可积. 取 $\varepsilon = \frac{\lambda h^n - ah^n}{2}$, 由引理 2.1 知存在正数 $\delta' > 0$, 对于任意的可测集 $A \subseteq I'$, 只要 $|A| < \delta'$ 就有

$$\int_A |f(t)| dt < \varepsilon = \frac{\lambda h^n - ah^n}{2}.$$

记 $I_x = \prod_{i=1}^n [x_i, x_i + h]$, $I_y = \prod_{i=1}^n [y_i, y_i + h]$. 令 $\delta = \min\{\frac{\delta'}{4nh^{n-1}}, h\}$. 对任意的 y 满足 $|y - x| < \delta^n$, 显然有 $|y_i - x_i| < \delta, i = 1, 2, \dots, n$. 于是 $I_x \subset I', I_y \subset I'$. 故 $I_x - I_y \subset I', I_y - I_x \subset I'$. 由引理 2.2 得,

$$|I_y - I_x| = |I_x - I_y| \leq 2n\delta h^{n-1} \leq 2n \times \frac{\delta'}{4nh^{n-1}} \times h^{n-1} = \frac{\delta'}{2} < \delta'.$$

利用积分连续性可得,

$$\int_{I_y - I_x} |f(t)| dt < \frac{\lambda h^n - ah^n}{2}, \int_{I_x - I_y} |f(t)| dt < \frac{\lambda h^n - ah^n}{2}.$$

通过以上估计我们有,

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_y} |f(t)| dt - \int_{I_x} |f(t)| dt \right| &= \left| \int_{I_y - I_x} |f(t)| dt - \int_{I_x - I_y} |f(t)| dt \right| \\ &\leq \int_{I_y - I_x} |f(t)| dt + \int_{I_x - I_y} |f(t)| dt \\ &< \frac{\lambda h^n - ah^n}{2} + \frac{\lambda h^n - ah^n}{2} \\ &= \lambda h^n - ah^n. \end{aligned}$$

由此可得,

$$\begin{aligned} \int_{Q(y,h)} |f(t)| dt &= \int_{I_y} |f(t)| dt < \int_{I_x} |f(t)| dt + (\lambda h^n - ah^n) \\ &= \int_{Q(x,h)} |f(t)| dt + (\lambda h^n - ah^n) \\ &= ah^n + \lambda h^n - ah^n \\ &= \lambda |Q(y, h)|. \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{|Q(y, h)|} \int_{Q(y,h)} |f(t)| dt < \lambda.$$

所以,

$$m^+ f(y) = \inf_{r>0} \frac{1}{|Q(y, r)|} \int_{Q(y,r)} |f(t)| dt \leq \frac{1}{|Q(y, h)|} \int_{Q(y,h)} |f(t)| dt < \lambda.$$

即 $y \in E_\lambda$. 由 y 任意的可得 $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \delta\} \subset E_\lambda$, 因此 E_λ 为开集.

方法二: 证明 E'_λ 为闭集.

证 由于当 $\lambda < 0$ 时结论显然成立. 故我们不妨假定 $\lambda \geq 0$. 取 E'_λ 中的任一收敛点列 $\{x_k\}$, 设 $x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$. 显然有 $m^+ f(x_k) \geq \lambda, k = 1, 2, \dots$. 对任意的 $h > 0$, 有,

$$\frac{1}{|Q(x_k, h)|} \int_{Q(x_k, h)} f(y) dy \geq \inf_{r>0} \frac{1}{|Q(x_k, r)|} \int_{Q(x_k, r)} |f(y)| dy = m^+ f(x_k) \geq \lambda.$$

记 $Q_k = Q(x_k, h), Q = Q(x, h)$. 令 $f_k(y) = f(y) \chi_{Q_k \Delta Q}(y), Q_k \Delta Q = (Q_k \setminus Q) \cup (Q \setminus Q_k)$. 显然 $f_k(y)$ 在 \mathbb{R}^n 上可测. 对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$ 有 $|f_k(y)| \leq |f(y)|, k = 1, 2, \dots$. 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) = 0$. 由 Lebesgue 控制收敛定理可得,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q |f_k(y)| dy = \int_Q \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(y)| dy = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q(x, h)|} \int_{Q(x, h)} |f(y)| dy &= \frac{1}{h^n} \int_Q |f(y)| dy \geq \frac{1}{h^n} \int_{Q_k} |f(y)| dy - \frac{1}{h^n} \int_{Q_k \setminus Q} |f(y)| dy \\ &\geq \lambda - \frac{1}{h^n} \int_{Q_k \setminus Q} |f_k(y)| dy \geq \lambda - \frac{1}{h^n} \int_{Q_k} |f_k(y)| dy. \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$ 时, $Q_k \rightarrow Q$, 则有,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h^n} \int_{Q_k} |f_k(y)| dy = \frac{1}{h^n} \int_Q \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(y)| dy = 0.$$

因此, $\frac{1}{|Q(x, h)|} \int_{Q(x, h)} |f(y)| dy \geq \lambda$, 故 $m^+ f(x) \geq \lambda$. 所以 $x \in E'_\lambda$, 从而 E'_λ 为闭集, 证毕.

参 考 文 献

- [1] Fort M K. Points of continuity of semi-continuous functions[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 1951, 2(1): 100–102.
- [2] Aubin J P, Frankowska H. Set-valued analysis[M]. Boston: Birkhäuser Boston Inc, 1990.
- [3] Zaslavski A J. Generic continuity of a lower semicontinuous function[J]. Panamerican Mathematical Journal, 2007, 17(2): 1–10.
- [4] Zaslavski A J. Generic continuity of a lower semicontinuous mapping[J]. Communications on Applied Nonlinear Analysis, 2008, 15(1): 61–69.
- [5] Si Z Y, Zhang Z W. On the continuous points of semi-continuous functions[J]. The Journal of Analysis, 2021, 29(1): 297–302.
- [6] Cruz-Uribe D, Neugebauer C J. The structure of the reverse Hölder classes[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(8): 2941–2960.
- [7] Cruz-Uribe D, Neugebauer C J, Olesen V. Norm inequalities for the minimal and maximal operator and maximal operator, and differentiation of the integral[J]. Publicacions Matemàtiques, 1997, 41(2): 577–604.

- [8] Cruz-Uribe D, Neugebauer C J, Olesen V. The one-sided minimal operator and the one-sided reverse Hölder inequality[J]. *Studia Mathematica*, 1995, 116(3): 255–270.
- [9] Martín-Reyes F J. Weights, one-sided operators, singular integrals and ergodic theorems[J]. *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications*, 1994, 5(1): 103–137.
- [10] Martín-Reyes F J, Ortega P, Torre A. “Weights for one-sided operators”, in recent developments in real and harmonic analysis, applied and numerical harmonic analysis[M]. Boston: Birkhäuser Boston Inc, 2010.
- [11] 周民强. 实变函数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [12] Forzani L, Martín-Reyes F J, Ombrosi S. Weighted inequalities for the two-dimensional one-sided Hardy-Littlewood maximal function[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2011, 363(4): 1699–1719.
- [13] Fu Z, Lu S, Pan Y, Shi S. Some one-sided estimates for oscillatory singular integrals[J]. *Nonlinear Analysis*, 2014, 108(1): 144–160.
- [14] Fu Z, Lu S, Sato S A, Shi S. On weighted weak type norm inequalities for one-sided oscillatory singular integrals[J]. *Studia Mathematica*, 2011, 207(2): 137–151.
- [15] Marcellini P. Approximation of quasiconvex functions, and lower semicontinuity of multiple integrals [J]. *Manuscripta Mathematica*, 1985, 51(1-3): 1–28.
- [16] Martín-Reyes F J, Torre A. Sharp weighted bounds for one-sided maximal operators[J]. *Collectanea Mathematica*, 2015, 66(2): 161–174.
- [17] Mukherjee R N, Reddy L V. Semicontinuity and quasiconvex functions[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1997, 94(3): 715–726.
- [18] Yang X M. Convexity of semi-continuous functions[J]. *Operational Research Society of India*, 1994, 31(4): 309–317.

THE SEMI-CONTINUITY FOR TWO KINDS OF ONE-SIDED OPERATORS

WANG Ling

(School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

Abstract: In this paper, the upper and lower semi-continuities for one-sided Hardy-Littlewood minimum operators and one-sided Hardy-Littlewood maximal operators are studied respectively. By using the properties of semi-continuity and a new type measure estimates for sets on \mathbb{R}^n , the upper semi-continuity of the one-sided minimum function $m^+f(x)$ and the lower semi-continuity of the one-sided maximal operators $M^+f(x)$ on \mathbb{R}^n are obtained. These results generalize the semi-continuity of Hardy-Littlewood maximal operators.

Keywords: one-sided minimum operator; one-sided maximal operator; upper semi-continuity; lower semi-continuity

2010 MR Subject Classification: 42B20; 42B35