

Lüroth 展式相邻字符乘积的部分和的度量性质和相关分形维数

胡慧, 程理

(南昌航空大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330063)

摘要: 本文研究了 Lüroth 展式字符乘积的部分和 $S_n(x) = \sum_{i=1}^n d_i(x)d_{i+1}(x)$ 的度量性质和相关分形集的 Hausdorff 维数, 其中 $d_i(x)$ 表示 $x \in (0, 1)$ 的 Lüroth 展式的第 i 个字符. 利用对部分和序列的修正和适当分形集的构造, 获得了 $S_n(x)/n \log^2 n$ 依勒贝格测度收敛于 $1/2$ 并且得到了相关例外集的 Hausdorff 维数, 扩展了数的展式的维数研究.

关键词: Lüroth 展式; 字符乘积; 部分和; Hausdorff 维数

MR(2010) 主题分类号: 11K55; 28A80 中图分类号: O156

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2022)02-0180-09

1 引言

Lüroth 展式可由如下变换 $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ 导出,

$$T(x) = \begin{cases} n(n+1)x - n, & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

对任意的 $x \in (0, 1)$, 定义 $d_1(x) \geq 2$ 为使得下式成立的唯一的正整数

$$\frac{1}{d_1(x)} \leq x < \frac{1}{d_1(x) - 1}.$$

对 $n \geq 2$, 如果 $T^{n-1}(x) \neq 0$, 则定义 $d_n(x) = d_1(T^{n-1}(x))$. 从而对任意的无理数 $x \in [0, 1)$, 可以得到由 T 所诱导的如下无穷级数

$$x = \frac{1}{d_1(x)} + \frac{1}{d_1(x)(d_1(x) - 1)d_2(x)} + \cdots + \frac{1}{d_1(x) \cdots d_{n-1}(x)(d_{n-1}(x) - 1)d_n(x)} + \cdots.$$

我们称这一级数为 x 的 Lüroth 展式, 它由 Lüroth^[1]1883 年首次引入. 其中 $d_n(x)$ 称为 x 的 Lüroth 展式的第 n 个字符. 对于有理数 $x \in [0, 1)$, 其 Lüroth 展式只含有限项. Lüroth 展式与度量数论、动力系统和分形几何的研究密切相关, 已有很多的研究成果. 例如变换 T 相对勒贝格测度 λ 是不变的和遍历的, 字符列 $\{d_n(x) : n \geq 1\}$ 相对于 λ 是独立同分布的^[2]. 关于单个 Lüroth 展式字符的增长速度及相关维数问题的研究, 可参见文献^[3]. 在文献^[4]和^[5]中, 研究了 Lüroth 展式两个相邻字符乘积的增长速度, 集合 $\{x \in (0, 1) : d_n(x)d_{n+1}(x) \geq \varphi(n) \text{ 无穷多次成立}\}$ 的勒贝格测度与 Hausdorff 维数得到了解决.

*收稿日期: 2021-09-26 接收日期: 2021-10-20

基金项目: 国家自然科学基金 (11701261).

作者简介: 胡慧 (1979-), 女, 湖北黄冈, 副教授, 主要研究方向: 分形几何.

在本文中, 我们将研究 Lüroth 展式相邻字符乘积的部分和的分布. 令

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n d_i(x)d_{i+1}(x).$$

首先考虑对适当的增长速度 $\varphi(n)$, $S_n(x)/\varphi(n)$ 的收敛问题. 具体地, 我们有下面的结果.

定理 1.1 比值 $\frac{S_n(x)}{n \log^2 n}$ 依勒贝格测度 λ 收敛到 $\frac{1}{2}$, 即对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left\{ x \in (0, 1) : \left| \frac{S_n(x)}{n \log^2 n} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

需要指出的是, 由文献 [5] 知, 对勒贝格几乎处处的 $x \in (0, 1)$, $d_n(x)d_{n+1}(x) \geq n \log^2 n$ 对于无穷多的 n 成立. 从而 $S_n(x)/n \log^2 n$ 并不是几乎处处收敛到 $1/2$. 另一个很自然的问题就是考虑 $S_n(x)$ 的相关例外集

$$G(\psi) := \left\{ x \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{\psi(n)} = 1 \right\}$$

的 Hausdorff 维数, 其中函数 $\psi: \mathbb{N} \rightarrow (1, \infty)$ 单调递增且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$.

定理 1.2 若 $\psi: \mathbb{N} \rightarrow (1, \infty)$ 单调递增且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n)}{n} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = 1, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log \psi(n)}{\log n} < \frac{1}{2},$$

则有 $\dim_H G(\psi) = 1$. 特别地, 对任意的 $\alpha > 0$, $\dim_H \left\{ x \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n \log^2 n} = \alpha \right\} = 1$.

2 预备知识

对任意的 $n \geq 1$ 和正整数 d_1, d_2, \dots, d_n (其中 $d_i \geq 2, 1 \leq i \leq n$), 集合

$$I(d_1, d_2, \dots, d_n) = \{x \in [0, 1) : d_i(x) = d_i, 1 \leq i \leq n\}$$

称为一个 n 阶柱集. $I(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是一个区间, 长度为 $|I(d_1, d_2, \dots, d_n)| = \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_i(d_i-1)}$.

下文将用到 Borel-Cantelli 引理的收敛部分. 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 是一列事件, P 是一个概率测度. 若 $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$, 则 $P\{A_n \text{ 无穷多次发生}\} = 0$, 其中

$$\{A_n \text{ 无穷多次发生}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

命题 2.1 [6] 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若映射 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足 α 阶 -Hölder 条件, 即

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in E),$$

则有 $\dim_H f(E) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H E$.

3 定理 1.1 的证明

这一节我们先介绍三个引理, 再给出定理 1.1 的证明.

引理 3.1 设 $\phi: \mathbb{N} \rightarrow (1, \infty)$ 是一个正值函数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = \infty$. 对任意的 $n \geq 1$, 令

$$A_n = \{x \in (0, 1) : d_1(x)d_2(x) \geq \phi(n)\},$$

其中 $d_1(x), d_2(x)$ 分别是 x 的 Lüroth 展式的第一和第二个字符. 则我们有

$$\lambda(A_n) = \frac{\log \phi(n) + O(1)}{\phi(n)}.$$

证 因为对任意的 $x \in (0, 1)$ 和 $i \geq 1$, 都有 $d_i(x) \geq 2$, 所以不妨设 $\phi(n) \geq 4$. 因为

$$A_n = \{x \in (0, 1) : d_1(x)d_2(x) \geq \phi(n)\} = B_1 \cup B_2,$$

其中

$$B_1 = \{x \in (0, 1) : d_1(x) \geq \frac{\phi(n)}{2}\}, B_2 = \{x \in (0, 1) : d_1(x) < \frac{\phi(n)}{2}, d_1(x)d_2(x) \geq \phi(n)\},$$

所以 $\lambda(A_n) = \lambda(B_1) + \lambda(B_2)$. 此外,

$$\lambda(B_1) = \sum_{k=\lceil \phi(n)/2 \rceil}^{+\infty} \lambda\{x \in (0, 1) : d_1(x) = k\} = \sum_{k=\lceil \phi(n)/2 \rceil}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{O(1)}{\phi(n)}. \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \lambda(B_2) &= \sum_{k=2}^{\lceil \phi(n)/2 \rceil - 1} \lambda\{x \in (0, 1) : d_1(x) = k\} \lambda\left\{x \in (0, 1) : d_2(x) \geq \frac{\phi(n)}{k}\right\} \\ &= \sum_{k=2}^{\lceil \phi(n)/2 \rceil - 1} \frac{1}{k(k-1)} \frac{1}{\left\lceil \frac{\phi(n)}{k} \right\rceil - 1}, \end{aligned}$$

这里记号 $\lceil \xi \rceil$ 表示不小于 ξ 的最小整数. 接下来继续估计 $\lambda(B_2)$. 一方面,

$$\lambda(B_2) \geq \sum_{k=2}^{\lceil \phi(n)/2 \rceil - 1} \frac{1}{k(k-1)} \frac{1}{\frac{\phi(n)}{k}} \geq \frac{\log \phi(n) + O(1)}{\phi(n)}.$$

另一方面,

$$\lambda(B_2) \leq \frac{1}{\phi(n) - 1} \sum_{k=2}^{\lceil \phi(n)/2 \rceil - 1} \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{\phi(n) - k} \right) \leq \frac{\log \phi(n) + O(1)}{\phi(n)}.$$

所以

$$\lambda(B_2) = \frac{\log \phi(n) + O(1)}{\phi(n)}. \quad (3.2)$$

由关系式 (3.1), (3.2) 知该引理成立.

对任意无理数 $x \in (0, 1)$ 及 $i \geq 1$, 令 $b_i(x) = d_i(x) d_{i+1}(x)$. 对任给 $\varepsilon > 0$ 和正整数 $N \geq 1$, 令 $\varphi(N) = \lfloor \varepsilon N \log^2 N \rfloor + 1$. 对任意 $1 \leq i \leq N$, 令

$$b_i^*(x) = \begin{cases} b_i(x), & b_i(x) \leq \varphi(N), \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

其中记号 $\lfloor \eta \rfloor$ 表示不大于 η 的最大整数. 令 $S_N^*(x) = \sum_{i=1}^N b_i^*(x)$. 下面分别给出对 $S_N^*(x)$ 的期望和方差的估计.

引理 3.2 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S_N^*(x))}{N \log^2 N} = \frac{1}{2}$, 其中 \mathbb{E} 表示数学期望.

证 先计算 $S_N^*(x)$ 的数学期望. 因为 $\mathbb{E}(S_N^*(x)) = N \mathbb{E}(b_1^*(x))$, 而

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(b_1^*(x)) &= \sum_{4 \leq k \leq \varphi(N)} k \cdot \lambda \{x : b_1(x) = k\} \\ &= \sum_{4 \leq k \leq \varphi(N)} k \cdot (\lambda \{x : b_1(x) \geq k\} - \lambda \{x : b_1(x) \geq k+1\}) \\ &= 3\lambda \{x : b_1(x) \geq 4\} + \sum_{4 \leq k \leq \varphi(N)} \lambda \{x : b_1(x) \geq k\} - \varphi(N) \cdot \lambda \{x : b_1(x) \geq \varphi(N) + 1\}. \end{aligned}$$

由引理 3.1 有 $\mathbb{E}(b_1^*(x)) = \frac{1}{2} \log^2 \varphi(N) (1 + o(1))$. 又因为 $\mathbb{E}(S_N^*(x)) = N \mathbb{E}(b_1^*(x))$ 和 $\varphi(N) = \lfloor \varepsilon N \log^2 N \rfloor$, 所以 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S_N^*(x))}{N \log^2 N} = \frac{1}{2}$. 该引理得证.

引理 3.3 $\text{Var}(S_N^*(x)) \ll N \varphi(N) \log \varphi(N)$, 其中 $\text{Var}(\cdot)$ 表示方差, 记号 $a \ll b$ 表示存在常数 c 使得 $a < cb$.

证 我们先估计 $S_N^{*2}(x)$ 的期望.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_N^{*2}(x)) &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)) \\ &= \sum_{1 \leq i=j \leq N} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ |i-j|=1}} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ |i-j| \geq 2}} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)). \end{aligned}$$

当 $i = j$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)) &= \mathbb{E}(b_i^{*2}(x)) = \mathbb{E}(b_1^{*2}(x)) \\ &= \sum_{4 \leq k \leq \varphi(N)} k^2 \cdot \lambda \{x : b_i(x) = k\} \ll \varphi(N) \log \varphi(N). \end{aligned}$$

当 $|i - j| = 1$ 时, 不妨设 $j = i + 1$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)) &= \mathbb{E}(b_i^*(x) b_{i+1}^*(x)) = \sum_{4 \leq s, t \leq \varphi(N)} st \lambda \{x : b_i(x) = s, b_{i+1}(x) = t\} \\ &= \sum_{4 \leq s, t \leq \varphi(N)} st \lambda \{x : d_1(x) d_2(x) = s, d_2(x) d_3(x) = t\} \\ &= \sum_{2 \leq k \leq \frac{\varphi(N)}{2}} \sum_{2 \leq m \leq \frac{\varphi(N)}{k}} \sum_{2 \leq n \leq \frac{\varphi(N)}{k}} k^2 mn \lambda \{x : d_2(x) = k, d_1(x) = m, d_3(x) = n\} \\ &\ll \sum_{2 \leq k \leq \frac{\varphi(N)}{2}} (1 + \log \varphi(N) - \log k)^2 \ll \varphi(N). \end{aligned}$$

当 $|i - j| \geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(b_i^*(x) b_j^*(x)) &= \sum_{4 \leq m, n \leq \varphi(N)} mn \lambda \{x : b_i(x) = m, b_j(x) = n\} \\ &= \sum_{4 \leq m, n \leq \varphi(N)} mn \lambda \{x : b_1(x) = m\} \cdot \lambda \{x : b_1(x) = n\} = \mathbb{E}^2(b_1^*(x)). \end{aligned}$$

由上面三种情况的估计, $\mathbb{E}(S_N^{*2}(x)) \ll N\varphi(N) \log \varphi(N) + N\varphi(N) + \mathbb{E}^2(S_N^*(x))$. 所以 $\text{Var}(S_N^*(x)) \ll N\varphi(N) \log \varphi(N)$. 该引理得证.

定理 1.1 的证明 由引理 3.2 和引理 3.3 可知, 当 N 充分大时, 有

$$\begin{aligned} &\lambda \left\{ x \in (0, 1) : \left| S_N^*(x) - \frac{1}{2} N \log^2 N \right| > \varepsilon N \log^2 N \right\} \\ &\leq \lambda \left\{ x \in (0, 1) : |S_N^*(x) - \mathbb{E}(S_N^*(x))| > \frac{\varepsilon}{2} N \log^2 N \right\} \\ &\leq \frac{\text{Var}(S_N^*(x))}{\left(\frac{\varepsilon}{2} N \log^2 N\right)^2} \ll \frac{N\varphi(N) \log \varphi(N)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 N^2 \log^4 N} \ll \frac{1}{\varepsilon \log N}. \end{aligned}$$

由 $S_N^*(x)$ 定义知, 对任意的 $x \in (0, 1)$, 如果对所有的 $1 \leq i \leq N$ 都有 $b_i(x) \leq \varphi(N)$, 则 $S_N(x) = S_N^*(x)$. 因此

$$\begin{aligned} &\left\{ x \in (0, 1) : \left| \frac{S_N(x)}{N \log^2 N} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\} \\ &\subset \left\{ x \in (0, 1) : \left| S_N^*(x) - \frac{1}{2} N \log^2 N \right| > \frac{\varepsilon}{2} N \log^2 N \right\} \cup \bigcup_{i=1}^N \{x \in (0, 1) : b_i(x) \geq \varphi(N) + 1\}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\lambda \left\{ x \in (0, 1) : \left| \frac{S_N(x)}{N \log^2 N} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\} \\ &\ll \frac{1}{\varepsilon \log N} + \sum_{1 \leq i \leq N} \lambda \{x \in (0, 1) : b_i(x) \geq \varphi(N) + 1\}. \end{aligned}$$

由引理 3.1 可知,

$$\sum_{1 \leq i \leq N} \lambda \{x \in (0, 1) : b_i(x) \geq \varphi(N) + 1\} \ll \frac{1}{\varepsilon \log N}.$$

由此 $\lambda \{x \in (0, 1) : \left| \frac{S_N(x)}{N \log^2 N} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon\} \ll \frac{1}{\varepsilon \log N} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). 定理得证.

4 定理 1.2 的证明

本节将先介绍四个引理, 之后再给出定理 1.2 的证明, 其中集合

$$G(\psi) = \left\{ x \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{\psi(n)} = 1 \right\}.$$

引理 4.1 对任意正整数 $M \geq 3$, 令

$$F(M) := \{x \in (0, 1) : d_i(x) \leq M, i \geq 1\}.$$

则

(1) $\dim_H F(M) = s_M$, 其中 s_M 是方程 $\sum_{j=2}^M \frac{1}{j^s(j-1)^s} = 1$ 的唯一解.

(2) $\lim_{M \rightarrow \infty} s_M = 1$.

证 (1) 对任意 $2 \leq j \leq M$, 令

$$f_{j-1}(x) = \frac{1}{j} + \frac{1}{j(j-1)}x, x \in (0, 1).$$

则 $F(M)$ 是迭代函数系 $\{f_{j-1}\}_{2 \leq j \leq M}$ 的吸引子. 从而 $F(M)$ 是压缩比为 $r_j = \frac{1}{j(j-1)}$ ($2 \leq j \leq M$) 的自相似集, 所以 $\dim_H F(M)$ 是方程 $\sum_{j=2}^M \frac{1}{r_j^s} = 1$ 的唯一解.

(2) 由 s_M 的定义可知, s_M 关于 M 是单调递增的. 一方面, 对任意的 $M \geq 3$, 有 $s_M < 1$. 另一方面, 对任意的 $s < 1$, 有 $\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j^s(j-1)^s} > \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j(j-1)} = 1$, 从而存在整数 $M_0 = M_0(s)$, 使得 $\sum_{j=2}^{M_0} \frac{1}{j^s(j-1)^s} \geq 1$, 因此 $s_{M_0} \geq s$. 从而对任意 $M \geq M_0$, 有 $s_M \geq s_{M_0} \geq s$. 所以 $\lim_{M \rightarrow \infty} s_M = 1$, 即此引理得证.

取定常数 $0 < \tau < \frac{1}{2}$, 使条件 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log \psi(n)}{\log n} < \frac{1}{2} - \tau$ 成立. 另取 $0 < \delta < 1$ 使得不等式 $(1 + \frac{1}{1-\delta})(\frac{1}{2} - \tau) < 1$ 成立. 对任意 $k \geq 1$, 令 $\varepsilon_k = k^{-\delta}$. 下面归纳定义自然数的子序列 $\{n_k\}$. 设 $n_1 \geq 3$ 是使得 $\log \psi(n) < n^{\frac{1}{2}-\tau}$ 对所有 $n \geq n_1$ 都成立的最小正整数. 对任意 $k \geq 2$, 令 n_k 是满足条件 $n_k \geq n_{k-1} + 4$ 和 $\psi(n_k) \geq (1 + \varepsilon_{k-1})\psi(n_{k-1})$ 的最小正整数.

定义

$$G(\psi, M) := \left\{ \begin{array}{l} x \in (0, 1) : d_{n_1}(x) = \lfloor \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_1)\psi(n_1) \rfloor + 1, \\ d_{n_{k+1}}(x) = \lfloor \frac{1}{4}((1 + \varepsilon_{k+1})\psi(n_{k+1}) - (1 + \varepsilon_k)\psi(n_k)) \rfloor + 1 (k \geq 1), \\ d_{n_{k-1}}(x) = d_{n_{k+1}}(x) = 2 (k \geq 1), \\ 2 \leq d_i(x) \leq M, i \notin \bigcup_{k \geq 1} \{n_k, n_k - 1, n_k + 1\}. \end{array} \right\}$$

下证集合 $G(\psi, M)$ 是集合 $G(\psi)$ 的子集.

引理 4.2 $G(\psi, M) \subset G(\psi)$.

证 任取 $x \in G(\psi, M)$. 对充分大的 n , 存在 $k \geq 1$ 使得 $n_k \leq n < n_{k+1}$. 一方面,

$$S_n(x) \geq S_{n_k}(x) \geq (1 + \varepsilon_k)\psi(n_k).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} S_n(x) &\leq S_{n_{k+1}}(x) \leq (n_{k+1} - 2k)M^2 + \sum_{i=1}^{k+1} (d_{n_i-1}(x)d_{n_i}(x) + d_{n_i}(x)d_{n_i+1}(x)) \\ &\leq (n_{k+1} - 2k)M^2 + (1 + \varepsilon_{k+1})\psi(n_{k+1}) + 4(k+1). \end{aligned}$$

所以

$$(1 + \varepsilon_k) \psi(n_k) \leq S_n(x) \leq (n_{k+1} - 2k) M^2 + (1 + \varepsilon_{k+1}) \psi(n_{k+1}) + 4(k + 1). \quad (4.1)$$

由 $n_k (k \geq 2)$ 定义, 不等式 $\psi(n_k - 1) < (1 + \varepsilon_{k-1}) \psi(n_{k-1})$, $\psi(n_k - 4) < (1 + \varepsilon_{k-1}) \psi(n_{k-1})$ 中总有一个是成立的. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n_k)}{\psi(n_{k-1})} = 1. \quad (4.2)$$

再结合 (4.1), (4.2), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\psi(n)} = 0$ 以及

$$\frac{S_n(x)}{\psi(n_{k+1})} \leq \frac{S_n(x)}{\psi(n)} \leq \frac{S_n(x)}{\psi(n_k)},$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{\psi(n)} = 1$. 即 $x \in G(\psi)$. 因此 $G(\psi, M) \subset G(\psi)$. 该引理得证.

对 $n \geq 1$, 令 $r(n) = \#\{k : n_k \leq n\}$. 由集合 $G(\psi, M)$ 的定义可知, 给定 $k \geq 1$, 对任意的 $x \in G(\psi, M)$, $d_{n_k}(x)$ 的值都是相等的. 为了简化记号, 记 $d_{n_k}(x)$ 为 d_{n_k} .

引理 4.3 数列 $\{n_k\}$ 与 $\{d_k\}$ 的定义如前所述. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(d_{n_1} d_{n_2} \cdots d_{n_{r(n)}})}{n} = 0.$$

证 由 [7] 中关系式 (10) (12) 可知, 如果 $\psi(n_k) \geq (1 + \varepsilon_{k-1}) \psi(n_{k-1})$, 那么 $r(n) \ll n^{\frac{1}{2}-\tau}$. 从而由 $\frac{1}{1-\delta} < 1$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(n)}{n} = 0$. 此外,

$$\begin{aligned} \log(d_{n_1} d_{n_2} \cdots d_{n_{r(n)}}) &\ll \sum_{i=1}^{r(n)} \log((1 + \varepsilon_i) \psi(n_i)) \\ &\ll r(n) \log \psi(n) + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r(n)}) \\ &\ll r(n) \cdot n^{\frac{1}{2}-\tau} + r(n)^{1-\delta}. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(d_{n_1} d_{n_2} \cdots d_{n_{r(n)}})}{n} = 0$. 引理得证.

令 $\Lambda = \bigcup_{k \geq 1} \{n_k - 1, n_k, n_k + 1\}$. 定义映射 $f : G(\psi, M) \rightarrow F(M)$ 如下,

$$f(x) = \sum_{\substack{i \geq 1 \\ i \notin \Lambda}} \frac{1}{d_i(x)} \prod_{\substack{1 \leq k < i \\ k \notin \Lambda}} \frac{1}{d_k(x)(d_k(x) - 1)},$$

即 $f(x)$ 的 Lüroth 展式的字符依次为 $d_1(x), \cdots, d_{n_1-2}(x), d_{n_1+2}(x), \cdots, d_{n_2-2}(x), d_{n_2+2}(x), \cdots$. 因此 $f(G(\psi, M)) = F(M)$.

引理 4.4 对任意 $\varepsilon > 0$, 映射 f 满足 $\frac{1}{1+\varepsilon}$ 阶 -Hölder 条件.

证 任取 $x, y \in G(\psi, M)$ 且距离充分小, 则存在 $n \geq 0$, 使得当 $1 \leq i \leq n$ 时, $d_i(x) = d_i(y)$; 但 $d_{n+1}(x) \neq d_{n+1}(y)$. 从而 $n+1 \notin \Lambda$ 并且 $2 \leq d_{n+1}(x), d_{n+1}(y) \leq M$. 一

方面, $I(d_1(x), \dots, d_n(x), d_{n+1}(x), M+1)$ 或 $I(d_1(y), \dots, d_n(y), d_{n+1}(y), M+1)$ 一定落在 x 与 y 之间的空隙里. 从而

$$|x - y| \geq \min \{ |I(d_1(x), \dots, d_{n+1}(x), M+1)|, |I(d_1(y), \dots, d_{n+1}(y), M+1)| \}.$$

由 [8] 中引理 4.1 知, 存在某个常数 c_M 使得

$$|I(d_1(x), \dots, d_{n+1}(x), M+1)| \geq c_M |I(d_1(x), \dots, d_n(x))|$$

和

$$\begin{aligned} |I(d_1(y), \dots, d_{n+1}(y), M+1)| &\geq c_M |I(d_1(y), \dots, d_n(y))| \\ &= c_M |I(d_1(x), \dots, d_n(x))|. \end{aligned}$$

所以 $|x - y| \geq c_M |I(d_1(x), \dots, d_n(x))|$. 由 f 的定义知, $f(I(d_1(x), \dots, d_n(x)))$ 为 $n - 3r(n)$ 阶柱集, 记作 $I(b_1, \dots, b_{n-3r(n)})$. 从而

$$\begin{aligned} |x - y| &\geq c_M |I(d_1(x), \dots, d_n(x))| \\ &= c_M |I(b_1, \dots, b_{n-3r(n)})| \prod_{i=1}^{r(n)} \prod_{k=0}^2 (d_{n_i-1+k}(x)(d_{n_i-1+k}(x) - 1))^{-1} \\ &= c_M 2^{-2r(n)} |I(b_1, \dots, b_{n-3r(n)})| \prod_{i=1}^{r(n)} (d_{n_i}(x)(d_{n_i}(x) - 1))^{-1}. \end{aligned}$$

由引理 4.3 可知, 如果 $n \geq n_0$, 则

$$|x - y| \geq c_M |I(b_1, \dots, b_{n-3r(n)})|^{1+\varepsilon} \geq c_M |f(x) - f(y)|^{1+\varepsilon},$$

其中 n_0 是跟 M 和 ε 有关的整数. 从而引理得证.

定理 1.2 的证明 由引理 4.1 知 $\dim_H F(M) = s_M$, 且 $\lim_{M \rightarrow \infty} s_M = 1$. 由引理 4.2 和引理 4.3 知,

$$\dim_H G(\psi) \geq \dim_H G(\psi, M) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \dim_H F(M).$$

所以 $\dim_H G(\psi) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} s_M$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$, 则定理结论得证.

参 考 文 献

- [1] Lüroth J. Ueber eine eindeutige entwicklung von zahlen in eine unendliche reihe[J]. Math. Ann., 1883, 21(3): 411–423.
- [2] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- [3] Shen Luming. Hausdorff dimension of the set concerning with Borel-Bernstein theory in Lüroth expansions[J]. J. Korean Math. Soc., 2017, 54 (4): 1301–1316.
- [4] Tan Bo, Zhou Qinglong. Approximation properties of Lüroth expansions[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2021, 41(6): 2873–2890.
- [5] Tan Bo, Zhou Qinglong. Dimension theory of the product of partial quotients in Lüroth expansions[J]. Int. J. Number Theory, 2021, 17(5): 1139–1154.

- [6] Falconer K J. Fractal geometry-mathematical foundations and applications[M]. Chichester: John Wiley and Sons, 1990.
- [7] Wu Jun, Xu Jian. On the distribution for sums of partial quotients in continued fraction expansions[J]. Nonlinearity, 2011, 24(4): 1177–1187.
- [8] Hu Hui, Yu Yueli. On Schmidt’s game and the set of points with non-dense orbits under a class of expanding maps[J]. J. Math. Anal. Appl., 2014, 418(2): 906–920.

ON THE METRIC PROPERTIES OF THE SUM OF PRODUCTS OF CONSECUTIVE DIGITS IN LÜROTH EXPANSIONS AND RELATED DIMENSIONS

HU Hui, CHENG Cheng

(*School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China*)

Abstract: In this paper, we consider the metric properties of $S_n(x) = \sum_{i=1}^n d_i(x)d_{i+1}(x)$ and the Hausdorff dimension of related fractal sets, where $d_i(x)$ is the i -th digit of the Lüroth expansions of $x \in [0, 1)$. By some modification of $S_n(x)$ and the construction of suitable fractal subsets, we prove that $S_n(x)/n \log^2 n$ converges to $1/2$ in Lebesgue measure λ , and we get the Hausdorff dimensions of related exceptional sets. It extends related dimensional results about expansions of numbers.

Keywords: Lüroth expansions; product of digits; partial sum; Hausdorff dimension

2010 MR Subject Classification: 11K55; 28A80