

用 Riccati 方程的新解求 Fitzhugh-Nagumo 方程的新行波解

林府标, 班晓倩

(贵州财经大学数统学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 本文研究了 Riccati 方程和 Fitzhugh-Nagumo 方程的新精确解的构造. 利用试探函数法找到了 Riccati 方程的八种类型的新显式精确解. 用广义 Tanh 函数法结合 Riccati 方程的新精确解, 获得了 Fitzhugh-Nagumo 方程、Huxley 方程、广义 KPP 方程及 Newell-Whitehead 方程的许多新显式行波解. 最后, 广义 Tanh 函数法结合 Riccati 方程的新精确解, 可用于探寻其它偏微分方程的新行波解.

关键词: Riccati 方程; Fitzhugh-Nagumo 方程; 广义 Tanh 函数法; 行波解

MR(2010) 主题分类号: 34A05; 35C07

中图分类号: O175.29; O175.14

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2022)02-0162-07

1 Riccati 方程的新精确解

一般类型的 Riccati 方程, 1841 年法国数学家 Liouville 证明了不能用初等积分法求解. 而 Riccati 方程

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = b + \varphi^2, \quad b \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

在流体力学、弹性振动理论、生物学、工程技术和科学、控制理论、向量场分支理论、最优滤波分析系统等领域中都有着广泛且重要的应用 [1-7], 求解 Riccati 方程 (1.1) 是非线性科学领域经常遇到的问题.

众所周知, Riccati 方程 (1.1) 已具有三角函数和有理函数类型的显式精确解 [6]. Riccati 方程 (1.1) 的精确解对偏微分方程精确解的研究及 Riccati 函数展开法均具有探讨价值和意义 [1-7]. 文献 [7] 提出了 Riccati 方程 (1.1) 的十二种类型的显式精确解.

Riccati 方程 (1.1) 无法直接转化为可解的代数方程, 通常是很难解析求解的, 需要在数学方法上进行创新和探索解析求解的一些新方法及技巧. 在前人工作 [5-6] 和文献 [7] 的基础上, 利用直觉尝试各种观察试凑函数方法 [8], 采用某些初等函数作为 Riccati 方程 (1.1) 解的试探函数, 如幂试探函数、三角试探函数、指数试探函数、双曲试探函数、有理试探函数等. 对解的形态及类型作预先判断和假设, 选取准确的试探函数形式, 应用数学软件 REDUCE 进行符号处理和求导运算, 将难于求解的非线性 Riccati 方程 (1.1) 转化为相对易于求解的非

*收稿日期: 2021-04-13 接收日期: 2021-06-07

基金项目: 贵州省科技计划基金项目 (黔科合基础 [2019]1051); 贵州省教育厅青年科技人才成长项目 (黔教合 KY 字 [2017]150); 2018 年度贵州财经大学校级科研基金项目资助 (2018XYB04); 贵州财经大学创新探索及学术新苗项目 (黔科合平台人才 [2017]5736-020); 2021 年度贵州财经大学校级项目 (2021KYYB01).

作者简介: 林府标 (1978-), 男, 贵州盘县, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程.

线性代数方程组. 最后通过求解所得的非线性代数方程组, 并且确定有关待定参数, 可简洁获得 Riccati 方程 (1.1) 的多种类型显式精确解析解. 如若假设三角有理函数

$$\varphi(\xi) = \frac{p_1 \cos(\omega\xi) + p_2}{p_3 \sin(\omega\xi) + p_4}$$

是 Riccati 方程 (1.1) 的解, 其中 $p_i (i = 1, 2, 3, 4)$, ω 是待确定的常数. 则将 $\varphi(\xi)$ 的表达式代入 Riccati 方程 (1.1), 运用数学软件 REDUCE 编程计算, 去分母整理可得关于 $\cos^2(\omega\xi)$, $\cos(\omega\xi)$, $\sin(\omega\xi)$ 的代数方程

$$\begin{aligned} & \cos^2(\omega\xi)(p_1^2 - bp_3^2) + \cos(\omega\xi)p_2(\omega p_3 + 2p_1) \\ & + \sin(\omega\xi)p_4(2bp_3 + \omega p_1) + b(p_3^2 + p_4^2) + \omega p_1 p_3 + p_2^2 = 0. \end{aligned}$$

若令 $\cos^2(\omega\xi)$, $\cos(\omega\xi)$, $\sin(\omega\xi)$ 的所有系数为零, 则进一步得到关于 $p_i (i = 1, 2, 3, 4)$, b, ω 的非线性代数方程组

$$p_1^2 - bp_3^2 = 0, \quad p_2(\omega p_3 + 2p_1) = 0, \quad p_4(2bp_3 + \omega p_1) = 0, \quad b(p_3^2 + p_4^2) + \omega p_1 p_3 + p_2^2 = 0.$$

再利用吴消元法可求得 $p_i (i = 1, 2, 3, 4)$, ω , 进而得到 Riccati 方程 (1.1) 的显式精确解. 为了行文简洁, 省略一一列举和详细求解过程, 仅将所有八种类型的新精确解结果列于表 1, 表 1 中的显式精确解文献 [1-7] 中没有给出.

2 广义 Tanh 函数法

Tanh 函数法 [9] 用于构造非线性偏微分方程的精确解, 数学原理简单, 应用范围广泛, 代数算法的基本思想是针对给定的非线性偏微分方程

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2.1)$$

其中 $u = u(t, x)$ 是未知函数, P 是关于变元 $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots$ 的多项式, 并且含有最高阶导数项和非线性项. 采用孤立波解可表示为双曲函数的多项式的特征, 假设方程 (2.1) 的解的表达式可写成

$$u(t, x) = V(\xi) = \sum_{i=0}^n q_i (\tanh(\xi))^i, \quad \xi = k(x - ct) + \xi_0, \quad (2.2)$$

其中 ξ_0 为常数, k, c, q_0, \dots, q_n 为待定参数, n 为正整数, 可通过平衡方程 (2.1) 中的非线性项和最高阶导数项而确定. 把表达式 (2.2) 代入方程 (2.1), 并且令 $(\tanh(\xi))^i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的系数为零, 则可获得关于待定参数 k, c, q_0, \dots, q_n 的方程组, 求解此方程组可得到 k, c, q_0, \dots, q_n , 代入方程 (2.2), 可得到方程 (2.1) 的孤立波解.

广义 Tanh 函数法 [6] 的关键思想是充分利用 Riccati 方程 (1.1) 进行非线性反复迭代计算, 将 φ 的所有导数转化成关于 φ 的多项式函数, 将非线性偏微分方程的精确求解问题, 转化成非线性代数多项式方程组根的探究问题. 应用 Riccati 方程 (1.1) 的一个好处是参数 b 的符号, 可用于判断所得行波解的数量和形状. 鉴于受 Tanh 函数法 [9] 和前人工作 [1-7] 的启

发, 利用 Riccati 方程 (1.1) 及表 1 中的精确解构造广义 Tanh 函数法, 算法的主要步骤和思想阐述如下:

第一步 作行波变换 $\xi = x - ct$, 其中 c 为常数, 表示波速. 若假设方程 (2.1) 的行波解形如 $u(t, x) = U(\xi)$, 则方程 (2.1) 变形约化成关于 U 的常微分方程

$$P(U, -cU', U', c^2U'', U'', -cU'', \dots) = 0. \quad (2.3)$$

第二步 若可能, 可先对方程 (2.3) 两边关于变量 ξ 同时积分一次或多次, 针对高阶微分方程则可降阶和减少计算量, 然后假设方程 (2.3) 的精确解的表达式可写成

$$U(\xi) = q_0 + q_1\varphi(\xi) + \dots + q_n(\varphi(\xi))^n, \quad (2.4)$$

其中 $\varphi = \varphi(\xi)$ 满足方程 (1.1), 具体表达式可依据 b 的符号从表 1 中选取. 一般地, 借助于齐次平衡原理 [10] 及通过平衡方程 (2.3) 中最高阶导数项和非线性项, 可确定正整数 n , 而 $q_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 为待定实参数.

第三步 将 $U = U(\xi)$ 的表达式 (2.4) 代入方程 (2.3), 采用数学软件 REDUCE 或 MATLAB 结合方程 (1.1) 反复计算整理之后, 令 $\varphi^j (j = 0, 1, \dots)$ 的各项系数分别为零, 则可找到关于 $q_i (i = 0, 1, \dots, n), b$ 和 c 的非线性代数方程组.

第四步 利用吴消元法结合数学软件 REDUCE 或 MATLAB 计算, 把获得的参数 $q_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 和 c 代入方程 (2.4), 依据 b 的符号从表 1 中选取相应的函数表达式 $\varphi = \varphi(\xi)$, 进一步可找到方程 (2.1) 的行波解.

表 1 Riccati 方程 (1.1) 的显式新精确解, 其中 $\varepsilon = \pm 1, a_1, a_2$ 为常数

序号	显式精确解 $\varphi = \varphi(\xi)$	序号	显式精确解 $\varphi = \varphi(\xi)$
1	$\frac{-\sqrt{b}(\sqrt{a_1^2 b + a_2^2} \cos(2\sqrt{b}\xi) + \varepsilon a_2)}{\sqrt{a_1^2 b + a_2^2} \sin(2\sqrt{b}\xi) - \varepsilon a_1 \sqrt{b}}, b > 0$	5	$\frac{-\sqrt{-b}(a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) - \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}{a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon a_2}, b < 0$
2	$\frac{\sqrt{b}(a_2 \sin(2\sqrt{b}\xi) + \varepsilon \sqrt{a_2^2 - a_1^2})}{a_2 \cos(2\sqrt{b}\xi) + a_1}, b > 0$	6	$\frac{\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) + a_1 b}{a_1 \sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) - 1}, b < 0$
3	$\frac{\sqrt{b} \tan(\sqrt{b}\xi) - a_1 b}{a_1 \sqrt{b} \tan(\sqrt{b}\xi) + 1}, b > 0$	7	$\frac{-\sqrt{-b}(a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon \sqrt{a_2^2 - a_1^2})}{a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) + a_2}, b < 0$
4	$\frac{\frac{\sqrt{b}}{2} a_1 \left(\tan\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\xi\right) - \cot\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\xi\right) \right) + 2\sqrt{b}}{a_1 - \left(\tan\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\xi\right) - \cot\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\xi\right) \right)}, b > 0$	8	$\frac{\sqrt{-b}(a_1 - \exp(2\sqrt{-b}\xi))}{a_1 + \exp(2\sqrt{-b}\xi)}, b < 0$

3 Fitzhugh-Nagumo 方程的显式新行波解

波 Fitzhugh-Nagumo 方程 (3.1) 可用于模拟遗传特性的散布、神经脉冲在神经轴突上的传播等 [10-14].

$$u_t - u_{xx} = u(1-u)(u-a), \quad (3.1)$$

其中 $-1 \leq a \leq 1$, a 是与细胞膜性质相关的参数, 由细胞膜的电特性决定. 当 $a = 0$ 时, 方程 (3.1) 变成 Huxley 方程, 当 $a = 1$ 时, 方程 (3.1) 变成广义 KPP 方程, 当 $a = -1$ 时, 方程 (3.1) 变成 Newell-Whitehead 方程.

非线性波方程 (3.1) 的显式精确解, 特别是行波解和孤波解在研究非线性波现象中起着重要的作用, 近年来发展了许多有效的精确求解方法, 如 Tanh 函数法和齐次平衡法 [6,10]. 方程 (3.1) 的显式精确解与精确解法探讨一直受到学术领域诸多学者们的重视和研究 [5-6,11-14]. 为了探究和寻找方程 (3.1) 的显式行波解, 作变换

$$u(t, x) = U(\xi), \xi = x - ct,$$

其中 c 为常数, 表示波速. 于是方程 (3.1) 约化为常微分方程

$$U'' + cU' + U(1-U)(U-a) = 0. \quad (3.2)$$

采用 Riccati 方程 (1.1) 和广义 Tanh 函数算法 (2.4), 平衡方程 (3.2) 中 U'' 与 U^3 项, 可得到 $n = 1$. 因此, 可假设方程 (3.2) 的解的表达式为

$$U(\xi) = d_0 + d_1\varphi(\xi), \quad (3.3)$$

其中 $\varphi = \varphi(\xi)$ 满足 Riccati 方程 (1.1), d_0, d_1 是待定实参数. 把 (3.3) 式代入方程 (3.2), 利用数学软件 REDUCE 计算, 整理得关于 φ 的多项式函数方程

$$\begin{aligned} & \varphi^3 d_1(2 - d_1^2) + \varphi^2 d_1(ad_1 - 3d_0d_1 + d_1 + c) \\ & + \varphi d_1(2ad_0 - a - 3d_0^2 + 2d_0 + 2b) + ad_0^2 - ad_0 - d_0^3 + d_0^2 + d_1bc = 0. \end{aligned}$$

分别令 $\varphi^i (i = 0, 1, 2, 3)$ 的系数为零, 得到关于 d_0, d_1, b 和 c 的非线性代数方程组

$$d_1 = \pm\sqrt{2}, \quad c = \pm\sqrt{2}(3d_0 - a - 1), \quad b = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}d_0^2 - (a+1)d_0, \quad (3.4)$$

$$8d_0^3 - 8(a+1)d_0^2 + 2(a^2 + 3a + 1)d_0 - a(a+1) = 0. \quad (3.5)$$

先采用卡丹公式求出方程 (3.5) 的三个根 $d_0 = \frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}$, 进一步可获得方程组 (3.4) 和 (3.5) 的解分别为

$$d_1 = \pm\sqrt{2}, \quad d_0 = \frac{1}{2}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2a), \quad b = -\frac{1}{8};$$

$$d_1 = \pm\sqrt{2}, \quad d_0 = \frac{a}{2}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(a - 2), \quad b = -\frac{a^2}{8};$$

$$d_1 = \pm\sqrt{2}, \quad d_0 = \frac{a+1}{2}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1), \quad b = -\frac{(a-1)^2}{8}.$$

鉴于找到的结果 d_1, d_0 和函数 φ 是 Riccati 方程 (1.1) 的解, 依据 b 的符号, 从表 1 中选取 Riccati 方程 (1.1) 的解的表达式 φ , 再结合表达式 (3.3), 可写出 Fitzhugh-Nagumo 方程 (3.1) 的许多显式行波解为

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \quad \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2a)t, \quad b = -\frac{1}{8};$$

$$u(t, x) = \frac{a}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \quad \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(a - 2)t, \quad b = -\frac{a^2}{8};$$

$$u(t, x) = \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(a+1)t, b = -\frac{(a-1)^2}{8}.$$

分别选取 $a = 0, 1, -1$, 结合 Fitzhugh-Nagumo 方程的显式行波解表达式, 可分别写出 Huxley 方程、广义 KPP 方程及 Newell-Whitehead 方程的显式行波解, 主要部分结果分别列于表 2-4, 这些解文献 [5-6,11-14] 均未给出.

表 2 Huxley 方程的显式新精确解, 其中 $\varepsilon = \pm 1, a_1, a_2$ 为常数

序号	Huxley 方程 $u_t - u_{xx} = u^2(1-u)$ 的显式精确解 $u = u(t, x), b = -\frac{1}{8}$
1	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) - \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}{a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon a_2}, \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}t$
2	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) + a_1 b}{a_1 \sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) - 1}, \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}t$
3	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon \sqrt{a_2^2 - a_1^2})}{a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) + a_2}, \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}t$
4	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b}(a_1 - \exp(2\sqrt{-b}\xi))}{a_1 + \exp(2\sqrt{-b}\xi)}, \xi = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}t$

表 3 广义 KPP 方程的显式新精确解, 其中 $\varepsilon = \pm 1, a_1, a_2$ 为常数

序号	广义 KPP 方程 $u_t - u_{xx} = -u(u-1)^2$ 的显式精确解 $u = u(t, x), b = -\frac{1}{8}$
1	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) - \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}{a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon a_2}, \xi = x \mp \frac{\sqrt{2}}{2}t$
2	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) + a_1 b}{a_1 \sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) - 1}, \xi = x \mp \frac{\sqrt{2}}{2}t$
3	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon \sqrt{a_2^2 - a_1^2})}{a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) + a_2}, \xi = x \mp \frac{\sqrt{2}}{2}t$
4	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b}(a_1 - \exp(2\sqrt{-b}\xi))}{a_1 + \exp(2\sqrt{-b}\xi)}, \xi = x \mp \frac{\sqrt{2}}{2}t$

表 4 Newell-Whitehead 方程的显式新精确解, 其中 $\varepsilon = \pm 1, a_1, a_2$ 为常数

序号	Newell-Whitehead 方程 $u_t - u_{xx} = u(1-u^2)$ 的显式精确解 $u = u(t, x), b = -\frac{1}{8}$
1	$u(t, x) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) - \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}{a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon a_2}, \xi = x \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
2	$u(t, x) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) + a_1 b}{a_1 \sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) - 1}, \xi = x \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
3	$u(t, x) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon \sqrt{a_2^2 - a_1^2})}{a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) + a_2}, \xi = x \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
4	$u(t, x) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b}(a_1 - \exp(2\sqrt{-b}\xi))}{a_1 + \exp(2\sqrt{-b}\xi)}, \xi = x \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
5	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) - \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}{a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon a_2}, \xi = x \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
6	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) + a_1 b}{a_1 \sqrt{-b} \tanh(\sqrt{-b}\xi) - 1}, \xi = x \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
7	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{-\sqrt{-b}(a_1 \sinh(2\sqrt{-b}\xi) + \varepsilon \sqrt{a_2^2 - a_1^2})}{a_1 \cosh(2\sqrt{-b}\xi) + a_2}, \xi = x \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}t$
8	$u(t, x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\varphi(\xi), \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{-b}(a_1 - \exp(2\sqrt{-b}\xi))}{a_1 + \exp(2\sqrt{-b}\xi)}, \xi = x \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}t$

4 结束语

给出了 Riccati 方程的八种类型的精确解, 结合广义 Tanh 函数法获得了 Fitzhugh-Nagumo 方程、Huxley 方程、广义 KPP 方程及 Newell-Whitehead 方程的显式新行波解. 表 1 中 Riccati 方程 (1.1) 的新精确解结合广义 Tanh 函数法, 可用于求解其它非线性偏微分方程的新行波解. 如 sine-Gordon 方程 $u_{xt} = \sin u$, KdV-Burgers-Kuramoto 方程 $u_t + uu_x + pu_{xx} + qu_{xxx} + ru_{xxxx} = 0$, p, q, r 为常数. 如何找到 Riccati 方程 (1.1) 和 Fitzhugh-Nagumo 方程 (3.1) 的更多的新精确解, 以及当 $b > 0$ 时, 利用表 1 中 Riccati 方程 (1.1) 的解给出 Fitzhugh-Nagumo 方程 (3.1) 的行波解, 都值得在今后的研究中进一步探索和深思.

参 考 文 献

- [1] 纳文, 曹越琦, 张世强, 孙华飞. Riccati 方程的几何求解方法 [J]. 北京理工大学学报, 2020, 40(4): 448–451.
- [2] 李宗星, 张锐. 基于 Riccati 方程的导弹自适应姿态控制 [J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(6): 160–167.
- [3] 刘萍, 徐恒睿, 杨建荣. Boussinesq 方程的 Lax 对、Backlund 变换、对称群变换和 Riccati 展开相容性 [J]. 物理学报, 2020, 69(1): 64–73.
- [4] 杨娟, 冯庆江. 应用 Riccati 展开法求非线性分数阶偏微分方程的新精确解 (英文)[J]. 应用数学, 2018, 31(2): 357–363.
- [5] 林府标, 张千宏, 张俊, 龙文. 预李群分类法的应用和 Fitzhugh-Nagumo 方程的行波解 [J]. 应用数学, 2017, 30(4): 908–915.
- [6] 范恩贵. 可积系统与计算机代数 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [7] Sirendaoreji. A new application of the extended tanh-function method[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University, 2007, 36(4): 391–396.
- [8] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [9] Parkes E J, Duffy B R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations[J]. Computer Physics Communications, 1996, 98(3): 288–300.
- [10] Wang Ming Liang, Zhou Yu Bin, Li Zhi Bin. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A, 1996, 216(1–5): 67–75.
- [11] Yokus A. On the exact and numerical solutions to the FitzHugh-Nagumo equation[J]. International Journal of Modern Physics B, 2020, 1–12.
- [12] Hashemi M S, Akgül A. On new exact solutions of the generalized Fitzhugh-Nagumo equation with variable coefficients[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2020, 1–12.
- [13] Nan B, Ali K K, Saha A, Ak T. Analytical and numerical solutions of the Fitzhugh-Nagumo equation and their multistability behavior[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2020, 1–17.
- [14] 张嘉杰, 陈豫眉, 王小妹. FitzHugh-Nagumo 方程的高精度紧致差分法 [J]. 西华师范大学学报 (自然科学版), 2021. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1699.N.20210309.0853.002.html>(网络首发时间: 2021-03-09 19:47:45).

SOLVING NEW TRAVELLING WAVE SOLUTIONS OF THE FITZHUGH-NAGUMO EQUATION USING NEW SOLUTIONS OF THE RICCATI EQUATION

LIN Fu-biao, BAN Xiao-qian

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: In this paper, we study the construction of new exact solutions for Riccati equation and Fitzhugh Nagumo equation. Eight types explicit and exact solutions of the Riccati equation were found by using the trial function method. Many new explicit travelling wave solutions of the Fitzhugh-Nagumo equation, Huxley equation, extended KPP equation, and Newell-Whitehead equation were obtained by use of the extended Tanh-function method and exact solutions of the Riccati equation. Finally, the extended Tanh-function method and exact solutions to the Riccati equation can be also applied to find new travelling wave solutions of other nonlinear partial differential equations.

Keywords: Riccati equation; Fitzhugh-Nagumo equation; extended Tanh-function method; travelling wave solution

2010 MR Subject Classification: 34A05; 35C07