Vol. 41 (2021)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类非线性随机微分方程的统计性质

张 静, 刘博文, 陈晓鹏
(汕头大学理学院数学系, 广东 汕头 515063)

摘 要: 本文研究了一类分数布朗运动 (fBm) 驱动的非线性随机微分方程解的统计性质的问题. 利用 Lamperti 变换的方法, 可以把该方程转换为分数布朗运动驱动的线性随机微分方程, 从而可以利用高斯过程的相关性质, 获得该非线性随机微分方程解的期望和方差. 在特殊情况下, 该非线性随机微分方程的解是分数 Cox-Ingersoll-Ross(fCIR) 过程, 该方法可以推广到计算分数 Cox-Ingersoll-Ross(fCIR) 过程的相关统计性质.

关 键 词: OU 过程; CIR 过程; 期望; 方差
MR(2010) **主题分类号:** 62M09 **中 图 分 类 号:** O211.64
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号:** 0255-7797(2021)03-0539-10

1 引言

Cox, Ingersoll 和 Ross[1−3] 引入了 Cox-Ingersoll-Ross(CIR) 过程, 该过程可用来研究利率和期权等金融模型. 设 $B(t)$ 是标准布朗运动, CIR 过程 $R=\{X(t),t\geq 0\}$ 是指以下随机微分方程 (SDE) 的解,

$$dX(t)=(k-\theta X(t))dt+\sigma\sqrt{X(t)}dB(t),\ t\geq 0. \tag{1.1}$$

该方程很难得到解析解, 高等人 [4] 得到了 CIR 过程的期望和方差并进一步考虑数值解. CIR 过程最初是作为利率随时间变化的模型提出的, 但实际上金融市场存在动态特征有所谓“记忆现象”, 是无法通过 CIR 过程反映出来的. 因此, 需要引入分数 Cox-Ingersoll-Ross(fCIR) 过程, 通过用分数布朗运动 (fBm)$B^H=\{B^H(t),t\geq 0\}$ 代替方程 (1.1) 中的标准布朗运动 (Bm) 得到 fCIR 模型, 其中 $B^H=\{B^H(t),t\geq 0\}$ 是 Hurst 参数为 H 的 fBm, 其协方差函数为 $EB^H(t)B^H(s)=\frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-\mid t-s\mid^{2H})$. 该 fCIR 过程满足以下随机微分方程 (SDE)

$$dX(t)=(k-\theta X(t))dt+\sigma\sqrt{X(t)}\circ dB^H(t),\ t\geq 0, \tag{1.2}$$

其中 $X(0)>0$, 常数 k, $\theta\in R,\sigma>0$, B^H=$\{B^H(t),t\geq 0\}$ 是分数布朗运动. $\int_0^t\sqrt{X(s)}\circ dB^H(s)$ 为关于分数布朗运动的路径 Stratonovich 积分.

Melnikov 等人 [5] 讨论了布朗运动和分数布朗运动驱动的随机微分方程解的存在唯一性, 给出了特殊情况下, 即当 $k=0$ 和 $H>\frac{1}{2}$ 时, 方程 (1.2) 存在唯一解; Mishura 等人 [6,7] 给出

*收稿日期: 2020-12-18 接收日期: 2021-06-15
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (2017A030313005); 国家自然科学基金资助项目 (11771264).
作者简介: 张静 (1995–), 女, 广东惠州, 主要研究方向: 随机分析与金融数学.
通讯作者: 陈晓鹏 (1981–), 男, 广东汕头, 主要研究方向: 随机动力系统.

了 fCIR 过程的定义, 利用 Lamperti 变换证明了在第一次到达零时刻之前, 该 fCIR 过程是分数 Ornstein-Uhlenbeck(fOU) 过程的平方, Cheridito 等人 [8] 得到 fOU 过程的相关统计性质. 在 $k>0$ 的情况下, Mishura 等人 [7] 得到当 $H>\frac{1}{2}$ 时, 该 fCIR 过程是严格正的, 永远不会到达零. 对于 fCIR 过程是严格正的另外一个充分条件是如果该方程满足 Feller 条件, 即方程的系数满足 $2k\geq\sigma^2$ [9].

由于方程 (1.2) 为非线性随机微分方程, 难以直接求得它的解以及解的期望和方差, 本文通过以下的线性随机微分方程

$$dY(t)=\frac{1}{2}(k-\theta Y(t))dt+\frac{\sigma}{2}dB^H(t)\ ,\ Y(0)>0, \tag{1.3}$$

通过 Lamperti 变换, 也就是令随机过程 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 为过程 $Y(t)$ 的平方, 当该过程第一次到达零的时刻之前, 证明它满足以下随机微分方程

$$dX(t)=(k\sqrt{X(t)}-\theta X(t))dt+\sigma\sqrt{X(t)}\circ dB^H(t),\ t\geq 0. \tag{1.4}$$

由于方程 (1.3) 是线性随机微分方程, 通过计算高斯过程的期望和方差可求得一类形如方程 (1.4) 的非线性随机微分方程解的期望和方差. 特别的, 当 $k=0$ 时, 利用随机过程 $Y=\{Y(t),t\geq 0\}$ 是高斯过程, 可求得 fCIR 过程的期望和方差, 从而进一步回答了 fCIR 过程是 fOU 过程的平方 [6], 那么它的相关统计性质是什么的问题. 最后文章模拟了 fCIR 过程理论期望和方差, 发现跟用蒙特卡洛方法的仿真模拟是接近的.

文章组织如下: 第二部分证明方程 (1.4) 的唯一解为方程 (1.3) 的解的平方, 利用高斯分布的平方为非中心卡方分布, 计算第一次到达零时刻之前的随机过程 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 的期望和方差; 第三部分计算第一次到达零时刻之前 fCIR 过程的期望和方差并且对该过程的期望和方差进行模拟.

2 非线性随机微分方程解析解相关性质

令 (Ω,F,P) 是一个概率空间, $H\in(0,1)$ 为 Hurst 参数, 考虑过程 $Y=\{Y(t),t\geq 0\}$ 满足以下随机微分方程 (SDE) :

$$dY(t)=\frac{1}{2}(k-\theta Y(t))dt+\frac{\sigma}{2}dB^H(t),\ Y(0)>0, \tag{2.1}$$

其中 θ, $k\in R$, $\sigma>0$ 且 $B^H(t)$ 是 Hurst 参数为 $H\in(0,1)$ 的分数布朗运动.

定义 2.1 [6] 若 $\{X(t),\ t\geq 0\}$, $\{Y(t),t\geq 0\}$ 为定义在 $(\Omega,\ F,\ P)$ 上的随机过程, 如果对任意的分割 $0=t_0<t_1<t_2<...<t_{n-1}<t_n=t$, 当区间长度 $\max\limits_{1\leq i\leq n}|t_i-t_{i-1}|$ 趋于 0 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X(t_k)+X(t_{k-1})}{2}(Y(t_k)-Y(t_{k-1}))$$

的极限存在, 则该极限定义为 $\int_0^t X(s)\circ dY(s)$ 的路径 Stratonovich 积分.

定义 2.2 令 $\tau:=\inf\,(s>0:Y(s)=0)$ 为过程 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 第一次到达零的时刻.

定义 2.3 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 为满足方程 (2.1) 的随机过程, τ 为过程 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 第一次到达零的时刻. 定义随机过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为

$$X(t)(\omega)=Y(t)^2\mathrm{I}_{\{t<\tau(\omega)\}}. \tag{2.2}$$

定理 2.4 令 $\tau := \inf(s>0: Y(s)=0)$. 对于 $0 \le t \le \tau$, 定义 2.3 中的随机过程 $\{X(t), t\ge 0\}$ 满足以下随机微分方程:

$$dX(t) = (k\sqrt{X(t)} - \theta X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)} \circ dB^H(t), \tag{2.3}$$

其中 $X(0) = Y(0)^2 \ge 0, \int_0^t \sqrt{X(s)} \circ dB^H(s)$ 为关于分数布朗运动的路径 Stratonovich 积分.

证 对任意 $t < \tau(\omega)$, 根据方程 (2.1) 和方程 (2.2),

$$X(t) = Y(t)^2 = (\sqrt{X(0)} + \frac{1}{2}\int_0^t (k - \theta Y(s))ds + \frac{\sigma}{2}B^H(t))^2. \tag{2.4}$$

考虑区间 $[0,t]$ 的任意分割: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$, 利用方程 (2.4), 有:

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{i=1}^{n}(X(t_i) - X(t_{i-1})) + X(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n}([\sqrt{X(0)} + \frac{1}{2}\int_0^{t_i}(k - \theta Y(s))ds + \frac{\sigma}{2}B^H(t_i)]^2 \\ &\quad - [\sqrt{X(0)} + \frac{1}{2}\int_0^{t_{i-1}}(k - \theta Y(s))ds + \frac{\sigma}{2}B^H(t_{i-1})]^2) + X(0). \end{aligned}$$

展开得下列式子

$$\begin{aligned} X(t) =& X(0) + \sum_{i=1}^{n}[2\sqrt{X(0)} + \frac{1}{2}(\int_0^{t_i}(k - \theta Y(s))ds \\ &+ \int_0^{t_{i-1}}(k - \theta Y(s))ds) + \frac{\sigma}{2}(B^H(t_i) + B^H(t_{i-1}))] \\ &\times [\frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(k - \theta Y(s))ds + \frac{\sigma}{2}(B^H(t_i) - B^H(t_{i-1}))]. \end{aligned}$$

进一步计算得

$$\begin{aligned} X(t) =& X(0) + \sum_{i=1}^{n}\sqrt{X(0)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(k - \theta Y(s))ds \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\int_0^{t_i}(k - \theta Y(s))ds + \int_0^{t_{i-1}}(k - \theta Y(s))ds) \times \int_{t_{i-1}}^{t_i}(k - \theta Y(s))ds \\ &+ \frac{\sigma}{4}\sum_{i=1}^{n}(B^H(t_i) + B^H(t_{i-1}))\int_{t_{i-1}}^{t_i}(k - \theta Y(s))ds \\ &+ \sigma\sqrt{X(0)}\sum_{i=1}^{n}(B^H(t_i) - B^H(t_{i-1})) + \frac{\sigma^2}{4}\sum_{i=1}^{n}(B^H(t_i) - B^H(t_{i-1}))(B^H(t_i) + B^H(t_{i-1})) \\ &+ \frac{\sigma}{4}\sum_{i=1}^{n}(\int_0^{t_i}(k - \theta Y(s))ds + \int_0^{t_{i-1}}(k - \theta Y(s))ds)(B^H(t_i) - B^H(t_{i-1})). \end{aligned}$$

令 $\triangle t=\max\limits_{1\le i\le n}|t_i-t_{i-1}|\to 0$, 前三项极限和

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X(0)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(k-\ \theta Y(s))ds\\
&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\int_0^{t_i}(k+\ \theta Y(s))ds+\int_0^{t_{i-1}}(k-\ \theta Y(s))ds)\times\int_{t_{i-1}}^{t_i}(k-\ \theta Y(s))ds\\
&+\frac{\sigma}{4}\sum_{i=1}^{n}(B^H(t_i)+B^H(t_{i-1}))\int_{t_{i-1}}^{t_i}(k-\ \theta Y(s))ds\\
\to&\int_0^t(k-\ \theta Y(s))(\sqrt{X(0)}+\frac{1}{2}\int_0^s(k-\ \theta Y(u))du+\frac{\sigma}{2}B^H(s))ds\\
=&\int_0^t(kY(s)-\ \theta Y^2(s))ds=\int_0^t(k\sqrt{X(s)}-\ \theta X(s))ds,
\end{aligned}$$

后三项极限和为

$$\begin{aligned}
&\sigma\sqrt{X(0)}\sum_{i=1}^{n}(B^H(t_i)-B^H(t_{i-1}))+\frac{\sigma^2}{4}\sum_{i=1}^{n}(B^H(t_i)-B^H(t_{i-1}))(B^H(t_i)+B^H(t_{i-1}))\\
&+\frac{\sigma}{4}\sum_{i=1}^{n}(\int_0^{t_i}(k-\ \theta Y(s))ds+\int_0^{t_{i-1}}(k-\ \theta Y(s))ds)(B^H(t_i)-B^H(t_{i-1}))\\
\to&\sigma\int_0^t(\sqrt{X(0)}+\frac{1}{2}\int_0^s(k-\ \theta Y(u))du+\frac{\sigma}{2}B^H(s))\circ dB^H(s)\\
=&\sigma\int_0^t Y(s)\circ dB^H(s)=\sigma\int_0^t\sqrt{X(s)}\circ dB^H(s)\ .
\end{aligned}$$

因此定义 2.3 中的过程 $X=\{X(t),t\ge 0\}$ 满足以下形式的随机微分方程

$$X(t)=X(0)+\int_0^t(k\sqrt{X(s)}-\ \theta X(s))ds+\sigma\int_0^t\sqrt{X(s)}\circ dB^H(s),$$

其中 $\int_0^t X((s))\circ dB^H(s)$ 为路径 Stratonovich 积分. 证毕.

过程 $X=\{X(t),t\ge 0\}$ 是过程 $Y=\{Y(t),t\ge 0\}$ 在第一次到达零时刻之前的平方, 而满足 SDE (2.1) 的随机过程 $Y=\{Y(t),t\ge 0\}$ 为可求解的线性随机微分方程, 因此可通过较为简单的随机过程 $Y=\{Y(t),t\ge 0\}$ 的期望和方差计算求得随机过程 $X=\{X(t),t\ge 0\}$ 的期望和方差.

考虑随机过程 $Y=\{Y(t),t\ge 0\}$ 所满足的 SDE(2.1), 可求出解析解为

$$\begin{aligned}
Y(t)&=Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}ds+\frac{\sigma}{2}e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s)\\
&=Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})+\frac{\sigma}{2}e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s).
\end{aligned}$$

期望为

$$
\begin{aligned}
E[Y(t)] &= E[Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}] + E[\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})] + E[\frac{\sigma}{2}e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s)] \\
&= Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t} + \frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

方差为

$$
\begin{aligned}
&Var[Y(t)] \\
=&E[Y^2(t)] - E[Y(t)]^2 \\
=&E[Y^2(0)e^{-\theta t} + 2Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}) + Y(0)e^{-\theta t}\sigma\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s) + \frac{k^2}{\theta^2}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})^2 \\
&+\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})\sigma e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s) + \frac{\sigma^2}{4}e^{-\theta t}(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s))^2] - E[Y(t)]^2 \\
=&Y^2(0)e^{-\theta t} + 2Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}) + \frac{k^2}{\theta^2}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})^2 + \frac{\sigma^2}{4}E[e^{-\theta t}(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s))^2] \\
&- Y^2(0)e^{-\theta t} - 2Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}) - \frac{k^2}{\theta^2}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})^2 \\
=&\frac{\sigma^2}{4}E[e^{-\theta t}(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s))^2]. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

下面计算 (2.6) 中的期望,

$$
\begin{aligned}
&E[e^{-\theta t}(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s))^2] \qquad (2.7)\\
=&E[e^{-\theta t}(e^{\frac{1}{2}\theta t}B^H(t) - \frac{1}{2}\theta\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}B^H(s)ds)^2] \\
=&E[e^{-\theta t}(e^{\theta t}(B^H(t))^2 - \theta e^{\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}B^H(t)B^H(s)ds + \frac{1}{4}\theta^2(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}B^H(s)ds)^2)] \\
=&E[(B^H(t))^2] - \theta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta(t-s)}E[B^H(t)B^H(s)]ds + \frac{1}{4}\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}E[B^H(s)B^H(u)]dsdu \\
=&t^{2H} - \frac{1}{2}\theta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta(t-s)}(t^{2H}+s^{2H}-(t-s)^{2H})]ds \\
&+\frac{1}{8}\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}(s^{2H}+u^{2H}-|s-u|^{2H})dsdu \\
=&t^{2H} - t^{2H}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}) - \frac{1}{2}\theta e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds + \frac{1}{2}\theta e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta(t-u)}u^{2H}du \\
&+\frac{1}{4}\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta u}du - \frac{1}{8}\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}|s-u|^{2H}dsdu \\
=&t^{2H}e^{-\frac{1}{2}\theta t} - \frac{1}{2}\theta e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds + \frac{1}{2}\theta e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta(t-u)}u^{2H}du \\
&+\frac{1}{2}\theta e^{-\theta t}(e^{\frac{1}{2}\theta t}-1)\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds - \frac{1}{8}\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}|s-u|^{2H}dsdu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&t^{2H}e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{1}{2}\theta e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta(t-u)}u^{2H}du\\
&-\frac{1}{2}\theta e^{-\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds-\frac{1}{8}\theta^2e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}|s-u|^{2H}dsdu.
\end{aligned}
$$

计算上面的最后一项得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\theta^2e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}|s-u|^{2H}dsdu\\
=&\frac{1}{8}\theta^2e^{-\theta t}(\int_0^t\int_0^s e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}(s-u)^{2H}duds+\int_0^t\int_s^t e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}(u-s)^{2H}duds)\\
=&\frac{1}{4}\theta^2e^{-\theta t}(\int_0^t\int_0^s e^{\frac{1}{2}\theta s+\frac{1}{2}\theta u}(s-u)^{2H}duds=\frac{1}{4}\theta^2e^{-\theta t}\int_0^t\int_0^s e^{\theta s-\frac{1}{2}\theta v}v^{2H}dvds\\
=&\frac{1}{4}\theta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta v}v^{2H}dv-\frac{1}{4}\theta e^{-\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta v}v^{2H}dv.
\end{aligned}
$$

将结果带入 (2.7) 有

$$
\begin{aligned}
&E[e^{-\theta t}(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s))^2]\\
=&t^{2H}e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{1}{2}\theta e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta(t-s)}s^{2H}ds\\
&-\frac{1}{2}\theta e^{-\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds-\frac{1}{4}\theta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds+\frac{1}{4}\theta e^{-\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds\\
=&t^{2H}e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{1}{4}\theta\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds-\frac{1}{4}\theta e^{-\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}s^{2H}ds\\
=&t^{2H}e^{-\frac{1}{2}\theta t}-\frac{1}{2}\int_0^t s^{2H}d(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})=H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})ds.
\end{aligned}
$$

再带入 (2.6) 有

$$
Var[Y(t)]=\frac{\sigma^2}{4}E[e^{-\theta t}(\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s))^2]=\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})ds. \tag{2.8}
$$

$\{Y(t),t\geq 0\}$ 服从高斯分布 $N(Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{k}{\theta}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}),\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})ds)$, 则在到达零时刻之前过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 服从自由度为 1 的非中心卡方分布 $\chi^2(1,Y^2(0)e^{-\theta t}+\frac{k^2}{\theta^2}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})^2+2Y(0)\frac{k}{\theta}e^{-\frac{1}{2}\theta t}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}))$.

由 (2.5) 和 (2.8) 有

$$
\begin{aligned}
&E[X(t)]\\
=&Y^2(0)e^{-\theta t}+\frac{k^2}{\theta^2}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})^2+2Y(0)\frac{k}{\theta}e^{-\frac{1}{2}\theta t}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})+\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Var[X(t)]\\
=&\sigma^2 H(Y^2(0)e^{-\theta t}+\frac{k^2}{\theta^2}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t})^2+2Y(0)\frac{k}{\theta}e^{-\frac{1}{2}\theta t}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta t}))\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})ds\\
&+\frac{\sigma^4}{8}H^2(\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\theta t+\frac{1}{2}\theta s})ds)^2.
\end{aligned}
$$

3 分数 Cox-Ingersoll-Ross(fCIR) 过程的期望和方差

当 k=0 时, 考虑直到第一次到达零时刻为止, 分数 Ornstein-Uhlenbeck(fOU) 过程 $\{Y(t), t\geq 0\}$ 满足以下随机微分方程:

$$
dY(t)=-\frac{1}{2}\,\theta Y(t)dt+\frac{\sigma}{2}dB^H(t),\ Y(0)>0, \tag{3.1}
$$

其中 $\theta\in R, \sigma>0$ 且 $B^H(t)$ 是 Hurst 参数 H 的分数布朗运动. 令 τ 为过程 $\{Y(t), t\geq 0\}$ 到达零的第一时刻. 对所有 $t\geq 0$, $\omega\in\Omega$: $X(t)(\omega)=Y^2(t)\mathrm{I}_{\{|t|<\tau(\omega)\}}$.

由定理 2.4, 过程 $X(t)$ 满足以下随机微分方程: $dX(t)=-\theta X(t)dt+\sigma\sqrt{X(t)}\circ dB^H(t)$, 其中 $X(0)=Y(0)^2\geq 0$, 积分 $\int_0^T\sqrt{X((s))}\circ dB^H(s)$ 为关于分数布朗运动的路径 Stratonovich 积分. 考虑关于 fCIR 过程的第一次到达零时刻的问题对应于 fOU 过程的第一次到达零时刻问题. 因为 fOU 过程是高斯过程, Mishura 等人 [6] 通过对高斯分布的估计, 证明了在 $\theta<0$ 时, 有限时间内第一次到达零时刻的概率等于 1; 在 $\theta>0$ 时, 第一次到达零时刻的概率是正的, 但是小于 1, 且给出了这个概率的上界.

由 fOU 过程和 fCIR 过程在到达零之前的关系, 下面通过 fOU 过程的期望和方差来求 fCIR 过程的期望和方差. 考虑 fOU 过程所满足的 SDE(3.1), 可求出解析解为 $Y(t)=Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}+\frac{\sigma}{2}e^{-\frac{1}{2}\theta t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\theta s}dB^H(s)$. 期望

$$
E[Y(t)]=E[Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}]+E[\frac{\sigma}{2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\theta(t-s)}dB^H(t)]=Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \tag{3.2}
$$

由 Kukush 等人 [10] 的引理 5.1, 方差

$$
Var[Y(t)]=\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds. \tag{3.3}
$$

$\{Y(t), t\geq 0\}$ 为 fOU 过程, 服从高斯分布 $Y(t)\sim(Y(0)e^{-\frac{1}{2}\theta t}$,
$\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds)$, 则到达零时刻之前 fCIR 过程服从自由度为 1 的非中心卡方分布 $\chi^2(1, Y(0)^2e^{-\theta t})$. 通过 (3.2) 和 (3.3) 计算可得

$$
\begin{aligned}
&E[X(t)]\\
=&Y^2(0)e^{-\theta t}+\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds,\\
&Var[X(t)]\\
=&\sigma^2 HY^2(0)e^{-\theta t}\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds+\frac{\sigma^4}{8}H^2(\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds)^2.
\end{aligned}
$$

可知这个结果跟第二部分的计算结果取 $k=0$ 时是一致的.

现在用 Euler-Maruyama(EM) 方法 [12] 来模拟过程 $Y^2(t)$ 和 fCIR 过程 $X(t)$ 的路径, 在时间 [0,T] 中 $\delta t=\frac{T}{N}$, 用函数 fbm1d[12] 模拟分数布朗运动 $B^H(t)$, 其增量为 $\Delta B_j^H=B_{j+1}^H-B_j^H$,

过程 $Y(t)$ 和过程 $X(t)$ 的步长分别为

$$\Delta Y_j=Y_{j+1}-Y_j=-\frac{1}{2}aY_j\Delta t+\frac{\sigma}{2}\Delta B^H,\quad Y(0)>0,$$
$$\Delta X_j=X_{j+1}-X_j=-aX_j\Delta t+\sigma\sqrt{X_j}\circ\Delta B^H,\quad t\geq 0,$$

其中 $j=1,2,...,L$.

现在模拟过程 $Y^2(t)$ 和过程 $X(t)$ 的期望和方差, 令 $a=1,\sigma=0.3,X_0=1,H=0.7$, 已知当 $k=0$ 时, 随机过程 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 的期望和方差分别为

$$\begin{aligned}&E[X(t)]\\=&Y^2(0)e^{-\theta t}+\frac{\sigma^2}{4}H\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds,\\&Var[X(t)]\\=&\sigma^2HY^2(0)e^{-\theta t}\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds+\frac{\sigma^4}{8}H^2(\int_0^t s^{2H-1}(e^{-\frac{1}{2}\theta s}+e^{-\frac{1}{2}\theta(2t-s)})ds)^2.\end{aligned}$$

用蓝色实线代表模拟过程 $X(t)$ 的期望, 用绿色实线代表模拟过程 $Y^2(t)$ 的期望, 用红色实线代表期望 $E[X(t)]$, 用青色实线代表过程 $X(t)$ 的方差, 用粉色实线代表方差 $Var[X(t)]$, 如图 1 和图 2 所示.

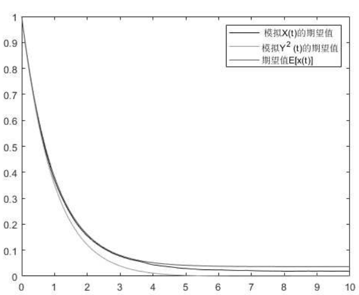

图 1: 期望 E[X(t)] 和模拟 $Y^2(t)$ 以及 $X(t)$ 的期望

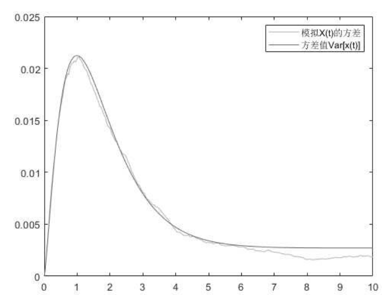

图 2：模拟 $X(t)$ 的方差和方差 $Var[X(t)]$

表 1 模拟 $Y^2(t)$ 、$X(t)$ 期望以及 E[X(t)] 的数值

时间	模拟 $X(t)$ 期望	模拟 $Y^2(t)$ 期望	E[X(t)]
$t=0$	1	1	1
$t=1$	0.3712	0.3533	0.3869
$t=2$	0.1557	0.1215	0.1623
$t=3$	0.0773	0.0398	0.0813
$t=4$	0.0442	0.0119	0.0523
$t=5$	0.0299	0.0029	0.0420
$t=6$	0.0241	4.4503e-04	0.0385
$t=7$	0.0215	9.2580e-07	0.0373
$t=8$	0.0189	1.2641e-04	0.0369
$t=9$	0.0191	3.4755e-04	0.0368
$t=10$	0.0188	5.3493e-04	0.0368

表 2 模拟 $X(t)$ 方差以及 Var[X(t)] 的数值

时间	模拟 $X(t)$ 方差	Var[X(t)]
$t=0$	0	0
$t=1$	0.0209	0.0212
$t=2$	0.0143	0.0147
$t=3$	0.0081	0.0080
$t=4$	0.0045	0.0048
$t=5$	0.0032	0.0034
$t=6$	0.0028	0.0029
$t=7$	0.0023	0.0028
$t=8$	0.0016	0.0027
$t=9$	0.0018	0.0027
$t=10$	0.0019	0.0027

由图像和表格可知, 模拟的结果与理论上的期望和方差具有较大拟合度.

参 考 文 献

[1] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1981, 36(4): 769–799.

[2] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices[J]. Econometrica, 1985, 53(1): 363–384.

[3] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385–408.

[4] 高岩, 陈文豪, 王洛, 等. CIR 模型分析及数值解 [J]. 智富时代, 2018, 17(3): 222–224.

[5] Melnikov A, Mishuar Y, Shevchekno G. Stochastic viability and comparison theorems for mixed stochastic differential equations[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2015, 17(1): 169–188.

[6] Mishura Y, Piterbarg V, Ralchenko K, Yurchebko-tytarenko A. Stochastic representation and pathwise properties of fractional Cox-Ingersoll-Ross process[J]. Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2017, 97(2): 157–170.

[7] Mishura Y, Yurchebko-tytarenko A. Fractional Cox-Ingersoll-Ross process with non-zero "mean"[J]. Modern Stochastic: Theory and Applications, 2018, 5(1): 99–111.

[8] Cheridito P, Kawaguchi H, Maejima M. Fractional Ornstein - Uhlenbeck processes[J]. Electronic Journal of Probability, 2003, 8(3): 1–14.

[9] Mishura Y, Yurchebko-tytarenko A. Fractional Cox - Ingersoll - Ross process with small Hurst indices[J]. Modern Stochastics Theory and Applications, 2018, 6(1): 1–27.

[10] Kukush A, Mishura Y, Ralchenko K. Hypothesis testing of the drift parameter sign for fractional Ornstein - Uhlenbeck process[J]. Electronic Journal of Statistics, 2017, 11(1): 385–400.

[11] Desmond J H. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001, 43(3): 525–546.

[12] Kroese D P, Botev Z I. "Spatial Process Generation", in Lectures on Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields, Volume II: Analysis, Modeling and Simulation of Complex Structures[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2013.

STATISTICAL PROPERTIES OF A CLASS OF NONLINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZHANG Jing, LIU Bo-wen, CHEN Xiao-peng

(*Department of Mathematics, College of Science, Shantou University, Shantou 515063, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of the statistical properties of solutions for a class of nonlinear stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion (fBm). By using the Lamperti transform method, the equation can be transformed into a linear stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion, and the expectation and variance of the solution of the nonlinear stochastic differential equation can be obtained by using the related properties of Gaussian process. In special cases, the solution of the nonlinear stochastic differential equation is a fractional Cox-Ingersoll-Ross(fCIR) process, and the method can be applied to calculate the relevant statistical properties of the fractional Cox-Ingersoll-Ross(fCIR) process.

Keywords: OU process; CIR process; mean; variance

2010 MR Subject Classification: 62M09