Vol. 41 (2021)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

阿贝尔方程的两个周期解的存在性

倪　华, 胡潇逸, 姚怡萍, 朱洁怡
(江苏大学数学科学学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要: 本文研究了阿贝尔方程周期解的存在性问题. 利用不动点定理和变量代换的方法, 获得了阿贝尔方程的两个周期解的存在性结果.

关 键 词: 阿贝尔方程; 不动点定理; 变量代换; 周期解; 存在性
MR(2010) **主题分类号:** 34C25; 37C25　　**中图分类号:** O175.14
文献标识码: A　　**文章编号:** 0255-7797(2021)03-0525-14

1 引言

非线性阿贝尔方程

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x^3+b(t)x^2+c(t)x+d(t) \tag{1.1}$$

在物理和工程技术等许多领域有着重要应用 [1−2], 方程 (1.1) 的数学性质已被数学和物理学者 [3−15] 进行了深入研究. 文献 [14,15] 提出了得到阿贝尔方程的通解的一种方法, 他们都假定 $y=y_1(t)$ 是方程 (1.1) 的一个特解, 然后通过变量代换方法, 给出了阿贝尔方程的通解; 文献 [16] 假设 $\gamma=\gamma(t)$ 是阿贝尔方程的一个周期特解, 然后, 利用变量代换法和不动点定理, 得到阿贝尔方程的其他周期解的存在性.

本文首先考虑下列阿贝尔型方程:

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x^3+b(t)x^2, \tag{1.2}$$

文献 [15] 给出了方程 (1.2) 可积的充分必要条件, 如下:

命题 1.1 [15] 阿贝尔型方程 (1.2) 可积的充分必要条件是 $a(t),b(t)$ 满足下列条件:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{a(t)}{b(t)}\Big)=kb(t), \tag{1.3}$$

其中 k 是常数.

在条件 (1.3) 成立时, $b(t)\neq 0$, (1.3) 两边从 t_0 到 $t(t>t_0)$ 积分, 可得:

$$\frac{a(t)}{b(t)}=\frac{a(t_0)}{b(t_0)}+\int_{t_0}^{t}kb(s)ds, \tag{1.4}$$

*收稿日期: 2020-11-23　　接收日期: 2021-02-19
基金项目: 江苏大学第 18 批大学生科研立项基金资助 (Y18A077).
作者简介: 倪华 (1969–), 男, 江苏丹阳, 副教授, 主要研究方向: 微分方程理论及应用.

如果 $k=0$, 则 $\frac{a(t)}{b(t)}\equiv C$, 此时, $a(t)$ 和 $b(t)$ 是线性相关的; 如果 $C=0$, 则 $a(t)=0$, 此时方程 (1.2) 只有零周期解; 如果 $C\neq 0$, 则容易验证方程 (1.2) 有两个常数周期解 $x_1(t)=0$(二重), $x_2(t)=-\frac{1}{C}$.

如果 $k\neq 0$, 由 (1.4) 可知,

$$\frac{a(t)}{b(t)}\to\infty(t\to+\infty), \tag{1.5}$$

此时, $a(t),b(t)$ 不可能都是周期函数. 因此, 当 $a(t)$ 和 $b(t)$ 都是周期函数并且线性无关时, 方程 (1.2) 是不可积的.

本文首先考虑 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是周期函数时的微分方程 (1.2), 此时除了 $a(t)$ 和 $b(t)$ 线性相关外, (1.2) 是不可积的. 本文研究在不求出 (1.2) 的解的情况下, (1.2) 的周期解的存在性. 文献 [16] 利用不动点定理, 得到 (1.2) 的唯一非零周期解的存在性; 本文受文献 [16] 的启发, 利用不同于文献 [16] 的方法, 得到方程 (1.2) 的唯一非零周期解的存在性; 然后, 讨论了方程 (1.1), 在一定条件下, 利用变量代换法, 将方程 (1.1) 转化为方程 (1.2), 从而得到阿贝尔方程 (1.1) 的两个周期解的存在性.

本文余下部分安排如下: 第二节, 我们给出四个引理以方便以后使用; 第三节, 利用不动点定理得到阿贝尔型方程存在唯一非零周期解的四个定理; 第四节, 当方程的系数函数满足一定条件时, 我们得到了阿贝尔方程的两个周期解的存在性.

2 一些定义、引理和缩写

E^n 表示 n 维实数空间或 n 维复数空间, R 表示实数集合, $C(R,E^n)$ 表示 R 到 E^n 的连续向量函数所构成的集合, $C(R,R)$ 表示 R 到 R 的连续函数所构成的集合.

定义 2.1 [17] 设函数 $f(t)\in C(R,E^n)$ 是 $\omega-$ 周期的, $a(f,\lambda)=\displaystyle\int_0^\omega f(t)e^{-i\lambda t}dt$ 一定存在, $a(f,\lambda)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶系数, 使 $a(f,\lambda)\neq 0$ 的实数 λ 称为 $f(t)$ 的傅里叶指数; 存在可数集 Λ_f, 当 $\lambda\in\Lambda_f$ 时, $a(f,\lambda)\neq 0$, 只要 $\lambda\notin\Lambda_f$, 必有 $a(f,\lambda)=0$, Λ_f 称为 $f(t)$ 的指数集.

定义 2.2 [17] Λ_f 中元素的整系数线性组合所构成的实数集合称为 $f(t)$ 的模 (module) 或频率模, 记作 $\mathrm{mod}\ (f)$, 即

$$\mathrm{mod}\ (f)=\Big\{\mu|\mu=\sum_{j=1}^{N}n_j\lambda_j,n_j,N\in Z^+,N\geq 1,\lambda_j\in\Lambda_f\Big\}.$$

引理 2.1 [18] 考虑如下方程:

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t), \tag{2.1}$$

这里, $a(t),b(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 如果 $\displaystyle\int_0^\omega a(t)dt\neq 0$, 则方程 (2.1) 有唯一的 ω-周期连续解 $\eta(t)$, $\mathrm{mod}\ (\eta)\subseteq\ \mathrm{mod}\ (a(t),b(t))$, 并且 $\eta(t)$ 可表示如下:

$$\eta(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}b(s)ds,\int_0^\omega a(t)dt<0\\ \displaystyle -\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}b(s)ds.\int_0^\omega a(t)dt>0.\end{cases} \tag{2.2}$$

引理 2.2 [18] 假设 ω- 周期连续函数序列 $\{f_n(t)\}$ 在 R 的任一紧集上收敛, $f(t)$ 是一个 ω- 周期连续函数, 并且 $\mod (f_n) \subseteq \mod (f)(n=1,2,\cdots)$, 那么 $\{f_n(t)\}$ 在 R 上一致收敛.

引理 2.3 [19] 假设 V 是度量空间, C 是 V 的闭凸集, 其边界是 ∂C, 如果 $T: V \to V$ 是连续的紧映射, 且使得 $T(\partial C) \subseteq C$, 则 T 在 C 上至少有一个不动点.

考虑一维周期微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.3}$$

这里, $f: R \times I \to R$ 是一个连续函数, $f(t+\omega,x) = f(t,x), \omega > 0. I \subseteq R$.

引理 2.4 [20] 如果 $f(t,x)$ 关于 x 有三阶连续偏导数, 并且 $f^{'''}_{xxx}(t,x) \neq 0$, 则 (2.3) 最多有三个连续周期解.

为了方便起见, 假设 $f(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 我们用下列记号表示:

$$f_M = \sup_{t\in[0,\omega]} f(t),\ f_L = \inf_{t\in[0,\omega]} f(t). \tag{2.4}$$

3 阿贝尔型方程的唯一非零周期解的存在性

这一节, 我们考虑阿贝尔型方程, 给出了阿贝尔型方程唯一非零周期解的存在性的四个结论.

定理 3.1 考虑方程 (1.2), $a(t), b(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 如果以下条件成立:

$$(H_1)\ a(t) < 0, \quad (H_2)\ b(t) < 0,$$

则方程 (1.2) 存在唯一负 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有 $-\left(\frac{b}{a}\right)_M \leq \gamma(t) \leq -\left(\frac{b}{a}\right)_L$.

证 (1) 证明方程 (1.2) 的负 ω- 周期连续解的存在性.

假设

$$S = \left\{ \varphi(t) \in C(R,R) \middle| \varphi(t+\omega) = \varphi(t) \right\}, \tag{3.1}$$

任取 $\varphi(t), \psi(t) \in S$, 定义度量如下:

$$\rho(\varphi,\psi) = \sup_{t\in[0,\omega]} |\varphi(t) - \psi(t)|, \tag{3.2}$$

则 (S,ρ) 是一个完备度量空间, 取 S 的一个闭凸集如下:

$$B = \left\{ \varphi(t) \in S \middle| -\left(\frac{b}{a}\right)_M \leq \varphi(t) \leq -\left(\frac{b}{a}\right)_L, \quad \mod (\varphi) \subseteq \quad \mod (a,b) \right\}. \tag{3.3}$$

任意给定 $\varphi(t) \in B$, 考虑如下微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\varphi^2(t)x + b(t)\varphi^2(t), \tag{3.4}$$

因为 $a(t), b(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都是 ω- 周期连续函数, 故 $a(t)\varphi^2(t), b(t)\varphi^2(t)$ 也都是 ω- 周期连续函数.

由 (3.3), (H_1) 和 (H_2), 可得

$$a_L\Big(-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\Big)^2 \le a(t)\varphi^2(t) \le a_M\Big(-\Big(\frac{b}{a}\Big)_L\Big)^2 < 0, \tag{3.5}$$

即

$$a_L\Big((\frac{b}{a})_M\Big)^2 \le a(t)\varphi^2(t) \le a_M\Big((\frac{b}{a})_L\Big)^2 < 0, \tag{3.6}$$

所以有

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega a(t)\varphi^2(t)dt < 0, \tag{3.7}$$

根据引理 2.1, 方程 (3.4) 存在唯一的如下的 ω- 周期连续解:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau} b(s)\varphi^2(s)ds, \tag{3.8}$$

并且

$$\mathrm{mod}\ (\eta) \subseteq \quad \mathrm{mod}\ (a(t)\varphi^2(t), b(t)\varphi^2(t)), \tag{3.9}$$

由 (3.3), 可得

$$\mathrm{mod}\ (a(t)\varphi^2(t)) \subseteq \quad \mathrm{mod}\ (a, b), \tag{3.10}$$

$$\mathrm{mod}\ (b(t)\varphi^2(t)) \subseteq \quad \mathrm{mod}\ (a, b), \tag{3.11}$$

因此有

$$\mathrm{mod}\ (\eta) \subseteq \quad \mathrm{mod}\ (a, b). \tag{3.12}$$

由 (H_1), (H_2) , (3.6) 和 (3.8), 我们有

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\frac{b(s)}{a(s)}a(s)\varphi^2(s)ds \ge (\frac{b}{a})_M \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}a(s)\varphi^2(s)ds \\ &= -(\frac{b}{a})_M\int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}d\Big(\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau\Big) = -(\frac{b}{a})_M\Big[e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big]_{-\infty}^t \\ &= -(\frac{b}{a})_M\Big[1 - e^{\int_{-\infty}^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big], (-\infty < t < +\infty) \\ &= -(\frac{b}{a})_M,\end{aligned} \tag{3.13}$$

且

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\frac{b(s)}{a(s)}a(s)\varphi^2(s)ds \le (\frac{b}{a})_L \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}a(s)\varphi^2(s)ds \\ &= -(\frac{b}{a})_L\int_{-\infty}^t e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}d\Big(\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau\Big) = -(\frac{b}{a})_L\Big[e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big]_{-\infty}^t \\ &= -(\frac{b}{a})_L\Big[1 - e^{\int_{-\infty}^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big], (-\infty < t < +\infty) \\ &= -(\frac{b}{a})_L,\end{aligned} \tag{3.14}$$

故

$$-(\frac{b}{a})_M \le \eta(t) \le -(\frac{b}{a})_L, \tag{3.15}$$

因此 $\eta(t) \in B$.

定义映射:

$$(T\varphi)(t) = \eta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau} b(s)\varphi^2(s)ds, \tag{3.16}$$

所以任意给定 $\varphi(t) \in B$, 有 $(T\varphi)(t) \in B$, 因此 $T : B \to B$.

现在, 我们证明映射 T 是紧映射. 在 B 中任取一序列 $\{\varphi_n(t)\} \subseteq B(n = 1, 2, \cdots)$, 则有

$$-\left(\frac{b}{a}\right)_M \le \varphi_n(t) \le -\left(\frac{b}{a}\right)_L, \quad \bmod\ (\varphi_n) \subseteq \quad \bmod\ (a, b), (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.17}$$

另外, $(T\varphi_n)(t) = x_{\varphi_n}(t)$ 满足

$$\frac{dx_{\varphi_n}(t)}{dt} = a(t)\varphi_n^2(t)x_{\varphi_n}(t) + b(t)\varphi_n^2(t), \tag{3.18}$$

因此我们有

$$\left|\frac{dx_{\varphi_n}(t)}{dt}\right| \le a_L\Big(-(\frac{b}{a})_M\Big)^3 - b_L\Big((\frac{b}{a})_M\Big)^2, \quad \bmod\ (x_{\varphi_n}(t)) \subseteq \quad \bmod\ (a, b), \tag{3.19}$$

故 $\left\{\frac{dx_{\varphi_n}(t)}{dt}\right\}$ 是一致有界的, 所以, $\left\{x_{\varphi_n}(t)\right\}$ 在 R 上是一致有界、等度连续的, 根据 Ascoli-arzela 定理, 对于 B 中的任一序列 $\left\{x_{\varphi_n}(t)\right\} \subseteq B$, 总存在一个子列 $\Big($仍用 $\left\{x_{\varphi_n}(t)\right\}$ 表示$\Big)$ 使得 $\left\{x_{\varphi_n}(t)\right\}$ 在 R 的任一紧集上一致收敛, 再由 (3.19), 根据引理 2.2, $\left\{x_{\varphi_n}(t)\right\}$ 在 R 上一致收敛, 也就是说, T 是 B 上的紧映射.

接下来, 我们证明 T 是连续映射. 假设 $\{\varphi_n(t)\} \subseteq B, \varphi(t) \in B$, 且有

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t), (n \to \infty) \tag{3.20}$$

由 (3.16), 我们有

$$\begin{aligned}
&|(T\varphi_n)(t) - (T\varphi)(t)| \\
= &\left|\int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} b(s)\varphi_n^2(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau} b(s)\varphi^2(s)ds\right| \\
= &\left|\int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} b(s)\Big(\varphi_n^2(s) - \varphi^2(s)\Big)ds\right. \\
&\left.+ \int_{-\infty}^{t} \Big(e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} - e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big) b(s)\varphi^2(s)ds\right| \\
= &\left|\int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} b(s)\Big(\varphi_n^2(s) - \varphi^2(s)\Big)ds\right. \\
&\left.+ \int_{-\infty}^{t} e^{\xi}\Big(\int_s^t a(\tau)\big(\varphi_n^2(\tau) - \varphi^2(\tau)\big)d\tau\Big) b(s)\varphi^2(s)ds\right|,
\end{aligned}$$

这里, ξ 介于 $\displaystyle\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau$ 和 $\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau$ 之间, 因此, ξ 在 $a_L\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_M\Big)^2(t-s)$ 和 $a_M\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_L\Big)^2(t-s)$ 之间, 所以有

$$\begin{aligned}
&\quad |(T\varphi_n)(t)-(T\varphi)(t)| \\
&\leq \int_{-\infty}^t e^{a_M\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}|b(s)|\Big|\varphi_n(s)+\varphi(s)\Big|\Big|\varphi_n(s)-\varphi(s)\Big|ds \\
&\quad +\int_{-\infty}^t e^{a_M\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}\Big(\int_s^t|a(\tau)|\Big|\varphi_n(\tau)+\varphi(\tau)\Big|\Big|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)\Big|d\tau\Big)|b(s)|\varphi^2(s)ds \\
&\leq \Bigg(\int_{-\infty}^t e^{a_M\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}|b(s)|\Big|\varphi_n(s)+\varphi(s)\Big|ds \\
&\quad +\int_{-\infty}^t e^{a_M\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}\Big(\int_s^t|a(\tau)|\Big|\varphi_n(\tau)+\varphi(\tau)\Big|d\tau\Big)|b(s)|\varphi^2(s)ds\Bigg)\rho(\varphi_n,\varphi) \\
&\leq \Bigg(-2b_L\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\int_{-\infty}^t e^{a_M\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}ds \\
&\quad +2a_Lb_L\Big(\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\Big)^3\int_{-\infty}^t e^{a_M\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}(t-s)ds\Bigg)\rho(\varphi_n,\varphi) \\
&= \left(\frac{2b_L\big(\frac{b}{a}\big)_M}{a_M\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_L\Big)^2}+\frac{2a_Lb_L\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_M\Big)^3}{\Big(a_M\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_L\Big)^2\Big)^2}\right)\rho(\varphi_n,\varphi),
\end{aligned}$$

由 (3.20) 及上式, 可得

$$(T\varphi_n)(t)\to(T\varphi)(t),(n\to\infty) \tag{3.21}$$

因此, T 是连续映射, 由 (3.16), 易知, $T(\partial B)\subseteq B$, 根据引理 2.3, T 在 B 上至少有一个不动点, 这个不动点即为方程 (1.2) 的负 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有

$$-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\leq\gamma(t)\leq-\Big(\frac{b}{a}\Big)_L. \tag{3.22}$$

(2) 我们证明方程 (1.2) 恰有唯一非零周期解 $\gamma(t)$.

令

$$f(t,x)=a(t)x^3+b(t)x^2, \tag{3.23}$$

则有

$$f'''_{xxx}(t,x)=6a(t)<0, \tag{3.24}$$

由 (3.24), 根据引理 2.4, 方程 (1.2) 至多有三个连续周期解, 我们已经知道, 方程 (1.2) 有三个连续周期解: $\gamma(t)$ 和二重零解 $\gamma_1(t)=\gamma_2(t)=0$, 所以方程 (1.2) 只有唯一的非零 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有

$$-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\leq\gamma(t)\leq-\Big(\frac{b}{a}\Big)_L.$$

定理 3.1 证毕.

定理 3.2 考虑方程 (1.2), $a(t),b(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 如果以下条件成立:

$$(H_1)\ a(t)<0,\quad (H_2)\ b(t)>0,$$

则方程 (1.2) 存在唯一正 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有 $-\left(\frac{b}{a}\right)_M\le\gamma(t)\le-\left(\frac{b}{a}\right)_L$.

证 令

$$x=-u, \tag{3.25}$$

则方程 (1.2) 化为

$$\frac{du}{dt}=a(t)u^3-b(t)u^2, \tag{3.26}$$

由 (H_1) 和 (H_2), 方程 (3.26) 满足定理 3.1 的所有条件, 根据定理 3.1, 方程 (3.26) 有唯一的负 ω- 周期连续解 $u_1(t)$, 并且

$$-\left(-\frac{b}{a}\right)_M\le u_1(t)\le-\left(-\frac{b}{a}\right)_L, \tag{3.27}$$

即

$$\left(\frac{b}{a}\right)_L\le u_1(t)\le\left(\frac{b}{a}\right)_M. \tag{3.28}$$

由 (3.25), 可得方程 (1.2) 存在唯一的正 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 并且

$$-\left(\frac{b}{a}\right)_M\le\gamma(t)\le-\left(\frac{b}{a}\right)_L.$$

定理 3.2 证毕.

定理 3.3 考虑方程 (1.2), $a(t),b(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 如果以下条件成立:

$$(H_1)\ a(t)>0,\quad (H_2)\ b(t)>0,$$

则方程 (1.2) 存在唯一负 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有 $-\left(\frac{b}{a}\right)_M\le\gamma(t)\le-\left(\frac{b}{a}\right)_L$.

证 (1) 我们证明方程 (1.2) 的负 ω- 周期连续解的存在性.

假设

$$S=\left\{\varphi(t)\in C(R,R)\middle|\varphi(t+\omega)=\varphi(t)\right\}, \tag{3.29}$$

任取 $\varphi(t),\psi(t)\in S$, 定义度量如下:

$$\rho(\varphi,\psi)=\sup_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)-\psi(t)|, \tag{3.30}$$

则 (S,ρ) 是一个完备度量空间, 取 S 的一个闭凸集如下:

$$B=\left\{\varphi(t)\in S\middle|-\left(\frac{b}{a}\right)_M\le\varphi(t)\le-\left(\frac{b}{a}\right)_L,\quad \bmod\ (\varphi)\subseteq\quad \bmod\ (a,b)\right\}. \tag{3.31}$$

任意给定 $\varphi(t)\in B$, 考虑如下微分方程:

$$\frac{dx}{dt}=a(t)\varphi^2(t)x+b(t)\varphi^2(t), \tag{3.32}$$

因为 $a(t),b(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都是 ω- 周期连续函数, 故 $a(t)\varphi^2(t),b(t)\varphi^2(t)$ 也都是 ω- 周期连续函数.

由 (3.31), (H_1) 和 (H_2), 可得

$$0<a_L\Big(-\Big(\frac{b}{a}\Big)_L\Big)^2\le a(t)\varphi^2(t)\le a_M\Big(-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\Big)^2, \tag{3.33}$$

即

$$0<a_L\Big(\frac{b}{a}\Big)_L^2\le a(t)\varphi^2(t)\le a_M\Big(\frac{b}{a}\Big)_M^2, \tag{3.34}$$

所以有

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}a(t)\varphi^2(t)dt>0, \tag{3.35}$$

根据引理 2.1, 方程 (3.32) 存在唯一如下的 ω- 周期连续解:

$$\eta(t)=-\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}b(s)\varphi^2(s)ds, \tag{3.36}$$

且

$$\bmod\ (\eta)\subseteq\quad \bmod\ (a(t)\varphi^2(t),b(t)\varphi^2(t)), \tag{3.37}$$

由 (3.31), 可得

$$\bmod\ (a(t)\varphi^2(t))\subseteq\quad \bmod\ (a,b), \tag{3.38}$$

$$\bmod\ (b(t)\varphi^2(t))\subseteq\quad \bmod\ (a,b), \tag{3.39}$$

因此我们有

$$\bmod\ (\eta)\subseteq\quad \bmod\ (a,b). \tag{3.40}$$

由 (H_1) , (H_2), (3.36) 和 (3.38), 我们有

$$\begin{aligned}\eta(t)&=-\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\frac{b(s)}{a(s)}a(s)\varphi^2(s)ds\ge-(\frac{b}{a})_M\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}a(s)\varphi^2(s)ds\\&=(\frac{b}{a})_M\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}d\Big(\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau\Big)=(\frac{b}{a})_M\Big[e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big]_t^{+\infty}\\&=(\frac{b}{a})_M\Big[e^{\int_{+\infty}^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}-1\Big],(-\infty<t<+\infty) \qquad (3.41)\\&=-(\frac{b}{a})_M,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\eta(t)&=-\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\frac{b(s)}{a(s)}a(s)\varphi^2(s)ds\le-(\frac{b}{a})_L\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}a(s)\varphi^2(s)ds\\&=(\frac{b}{a})_L\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}d\Big(\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau\Big)=(\frac{b}{a})_L\Big[e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big]_t^{+\infty}\\&=(\frac{b}{a})_L\Big[e^{\int_{+\infty}^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}-1\Big],(-\infty<t<+\infty)\\&=-(\frac{b}{a})_L,\end{aligned}\tag{3.42}$$

故有

$$-(\frac{a}{b})_M\le\eta(t)\le-(\frac{a}{b})_L,\tag{3.43}$$

因此 $\eta(t)\in B$.

定义映射:

$$(T\varphi)(t)=\eta(t)=-\int_t^{+\infty}e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}b(s)\varphi^2(s)ds,\tag{3.44}$$

所以任意给定 $\varphi(t)\in B$, 有 $(T\varphi)(t)\in B$, 因此 $T:B\to B$.

现在, 我们证明映射 T 是紧映射. 在 B 中任取一序列 $\{\varphi_n(t)\}\subseteq B(n=1,2,\cdots)$, 则有

$$-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M\le\varphi_n(t)\le-\Big(\frac{b}{a}\Big)_L,\quad \bmod(\varphi_n)\subseteq\quad \bmod(a,b),\quad(n=1,2,\cdots),\tag{3.45}$$

另外, $(T\varphi_n)(t)=x_{\varphi_n}(t)$ 满足

$$\frac{dx_{\varphi_n}(t)}{dt}=a(t)\varphi_n^2(t)x_{\varphi_n}(t)+b(t)\varphi_n^2(t),\tag{3.46}$$

因此我们有

$$\Big|\frac{dx_{\varphi_n}(t)}{dt}\Big|\le a_M\Big((\frac{b}{a})_M\Big)^3+b_M\Big((\frac{b}{a})_M\Big)^2,\quad \bmod(x_{\varphi_n}(t))\subseteq\quad \bmod(a,b),\tag{3.47}$$

故 $\Big\{\frac{dx_{\varphi_n}(t)}{dt}\Big\}$ 是一致有界的, 所以, $\Big\{x_{\varphi_n}(t)\Big\}$ 在 R 上是一致有界、等度连续的, 根据 Ascoli-arzela 定理, 对于 B 中的任一序列 $\Big\{x_{\varphi_n}(t)\Big\}\subseteq B$, 总存在一个子列 $\Big($仍用 $\Big\{x_{\varphi_n}(t)\Big\}$ 表示$\Big)$ 使得 $\Big\{x_{\varphi_n}(t)\Big\}$ 在 R 的任一紧集上一致收敛, 由 (3.47), 根据根据引理 2.2, $\Big\{x_{\varphi_n}(t)\Big\}$ 在 R 上一致收敛, 也就是说, T 是 B 上的紧映射.

接下来, 我们证明 T 是连续映射. 假设 $\{\varphi_n(t)\}\subseteq B,\varphi(t)\in B$, 且有

$$\varphi_n(t)\to\varphi(t),(n\to\infty)\tag{3.48}$$

由 (3.44), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|(T\varphi_n)(t)-(T\varphi)(t)\right|\\
=&\left|\int_t^{+\infty} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} b(s)\varphi_n^2(s)ds-\int_t^{+\infty} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau} b(s)\varphi^2(s)ds\right|\\
=&\left|\int_t^{+\infty} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} b(s)\Big(\varphi_n^2(s)-\varphi^2(s)\Big)ds\right.\\
&\left.+\int_t^{+\infty}\Big(e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau}-e^{\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau}\Big)b(s)\varphi^2(s)ds\right|\\
=&\left|\int_t^{+\infty} e^{\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau} b(s)\Big(\varphi_n^2(s)-\varphi^2(s)\Big)ds\right.\\
&\left.+\int_t^{+\infty} e^{\xi}\Big(\int_s^t a(\tau)\big(\varphi_n^2(\tau)-\varphi^2(\tau)\big)d\tau\Big)b(s)\varphi^2(s)ds\right|.
\end{aligned}
$$

这里, ξ 介于 $\int_s^t a(\tau)\varphi^2(\tau)d\tau$ 和 $\int_s^t a(\tau)\varphi_n^2(\tau)d\tau$ 之间, 因此, ξ 在 $a_M\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_M\Big)^2(t-s)$ 和 $a_L\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_L\Big)^2(t-s)$ 之间, 故我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|(T\varphi_n)(t)-(T\varphi)(t)\right|\\
\le&\int_t^{+\infty} e^{a_L\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}|b(s)|\Big|\varphi_n(s)+\varphi(s)\Big|\Big|\varphi_n(s)-\varphi(s)\Big|ds\\
&+\int_t^{+\infty} e^{a_L\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}\Big(\int_s^t|a(\tau)|\Big|\varphi_n(\tau)+\varphi(\tau)\Big|\Big|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)\Big|d\tau\Big)|b(s)|\varphi^2(s)ds\\
\le&\Bigg(\int_t^{+\infty} e^{a_L\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}|b(s)|\Big|\varphi_n(s)+\varphi(s)\Big|ds\\
&+\int_t^{t+\infty} e^{a_L\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}\Big(\int_s^t|a(\tau)|\Big|\varphi_n(\tau)+\varphi(\tau)\Big|d\tau\Big)|b(s)|\varphi^2(s)ds\Bigg)\rho(\varphi_n,\varphi)\\
\le&\Bigg(2b_M\big(\frac{b}{a}\big)_M\int_t^{+\infty} e^{a_L\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}ds\\
&+2a_Mb_M\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_M\Big)^3\int_t^{+\infty} e^{a_L\left(\left(\frac{b}{a}\right)_L\right)^2(t-s)}(s-t)ds\Bigg)\rho(\varphi_n,\varphi)\\
=&\left(\frac{2b_M\big(\frac{b}{a}\big)_M}{a_L\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_L\Big)^2}+\frac{2a_Mb_M\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_M\Big)^3}{\Big(a_L\Big(\big(\frac{b}{a}\big)_L\Big)^2\Big)^2}\right)\rho(\varphi_n,\varphi),
\end{aligned}
$$

由 (3.48) 和上式, 可得

$$(T\varphi_n)(t) \to (T\varphi)(t), (n \to \infty). \tag{3.49}$$

因此, T 是连续映射, 由 (3.44), 易得, $T(\partial B) \subseteq B$, 根据引理 2.3, T 在 B 上至少有一个不动点, 这个不动点即为方程 (1.2) 的 ω- 周期连续解, 且有

$$-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M \leq \gamma(t) \leq -\Big(\frac{b}{a}\Big)_L. \tag{3.50}$$

(2) 我们证明方程 (1.2) 恰有唯一非零周期解 $\gamma(t)$.

令

$$f(t,x) = a(t)x^3 + b(t)x^2, \tag{3.51}$$

则有

$$f_{xxx}^{'''}(t,x) = 6a(t) > 0, \tag{3.52}$$

由 (3.52), 根据引理 2.4, 方程 (1.2) 至多有三个连续周期解, 我们已经知道, 方程 (1.2) 有三个连续周期解: $\gamma(t)$ 和二重零解 $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$, 所以方程 (1.2) 有唯一的非零 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有

$$-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M \leq \gamma(t) \leq -\Big(\frac{b}{a}\Big)_L.$$

定理 3.3 证毕.

定理 3.4 考虑方程 (1.2), $a(t), b(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 如果以下条件成立:

$$(H_1)\ a(t) > 0, \quad (H_2)\ b(t) < 0,$$

则方程 (1.2) 有唯一正 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有 $-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M \leq \gamma(t) \leq -\Big(\frac{b}{a}\Big)_L$.

证 令

$$x = -u, \tag{3.53}$$

则方程 (1.2) 化为

$$\frac{du}{dt} = a(t)u^3 - b(t)u^2, \tag{3.54}$$

由 (H_1) 和 (H_2), 方程 (3.54) 满足定理 3.3 的所有条件, 根据定理 3.3, 方程 (3.54) 有唯一负 ω- 周期连续解 $u_1(t)$, 并且

$$-\Big(-\frac{b}{a}\Big)_M \leq u_1(t) \leq -\Big(-\frac{b}{a}\Big)_L, \tag{3.55}$$

由 (3.53), 可知方程 (1.2) 有唯一的正 ω- 周期连续解 $\gamma(t)$, 且有

$$-\Big(\frac{b}{a}\Big)_M \leq \gamma(t) \leq -\Big(\frac{b}{a}\Big)_L. \tag{3.56}$$

定理 3.4 证毕.

4 阿贝尔方程的两个周期解的存在性

这一节, 我们讨论阿贝尔方程 (1.1), 当方程的系数函数满足一定的条件, 利用变量代换, 方程 (1.1) 可以化为方程 (1.2), 利用第三节的四个结论, 从而得到方程 (1.1) 的周期解的存在性.

定理 4.1 考虑方程 (1.1), $a(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 且 $a(t)$ 在 R 上具有连续导数, 如果 (H_1) $b(t)=b_1(t)+b_2(t)$ 条件成立, $b_1(t),b_2(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 并且 $b_1(t)$ 在 R 上具有连续导数,

$$(H_2)\ a(t)<0, b_2(t)<0, \qquad (H_3)\ c(t)=\frac{b_1^2(t)+2b_1(t)b_2(t)}{3a(t)},$$

$$(H_4)\ d(t)=\frac{b_1^3(t)}{27a^3(t)}+\frac{b_1^2(t)b_2(t)}{9a^2(t)}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{b_1(t)}{3a(t)}\Big),$$

则方程 (1.1) 恰有两个 ω- 周期连续解.

证 由 $(H_1),(H_2),(H_3),(H_4)$, 方程 (1.1) 化为

$$\begin{aligned}\tfrac{dx}{dt}&=a(t)x^3+b(t)x^2+c(t)x+d(t)\\&=a(t)x^3+[b_1(t)+b_2(t)]x^2+\tfrac{b_1^2(t)+2b_1(t)b_2(t)}{3a(t)}x+\tfrac{b_1^3(t)}{27a^3(t)}+\tfrac{b_1^2(t)b_2(t)}{9a^2(t)}-\tfrac{d}{dt}\Big(\tfrac{b_1(t)}{3a(t)}\Big),\end{aligned}\tag{4.1}$$

即

$$\begin{aligned}\tfrac{d(x+\frac{b_1(t)}{3a(t)})}{dt}&=a(t)x^3+b_1(t)x^2+\tfrac{b_1^2(t)}{3a(t)}x+\tfrac{b_1^3(t)}{27a^3(t)}+b_2(t)x^2+\tfrac{2b_1(t)b_2(t)}{3a(t)}x+\tfrac{b_1^2(t)b_2(t)}{9a^2(t)}\\&=a(t)\Big(x+\tfrac{b_1(t)}{3a(t)}\Big)^3+b_2(t)\Big(x+\tfrac{b_1(t)}{3a(t)}\Big)^2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

因此, $\gamma_1(t)=-\frac{b_1(t)}{3a(t)}$ 是方程 (1.1) 的一个 ω- 周期连续解.

令

$$x+\frac{b_1(t)}{3a(t)}=y,\tag{4.3}$$

则方程 (4.2) 化为

$$\frac{dy}{dt}=a(t)y^3+b_2(t)y^2,\tag{4.4}$$

由 (H_2), 方程 (4.4) 满足定理 3.1 的所有条件, 根据定理 3.1, 方程 (4.4) 有唯一非零 ω- 周期连续解 $y_1(t)$, 由 (4.3), 可得方程 (1.1) 的另一个 ω- 周期连续解 $\gamma_2(t)=y_1(t)-\frac{b_1(t)}{3a(t)}$. 定理 4.1 证毕.

注 4.1 定理 4.1 中, (H_2) $a(t)<0,b_2(t)<0$ 能被 (H_2) $a(t)<0,b_2(t)>0$ 或 (H_2) $a(t)>0,b_2(t)<0$ 或 (H_2) $a(t)>0,b_2(t)>0$ 代替, 可得类似的结论, 在此, 我们省略了证明过程.

定理 4.2 考虑方程 (1.1), $a(t),b(t),c(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, $a(t),b(t)$ 和 $c(t)$ 在 R 上具有连续导数, 如果以下条件成立:

$$(H_1)\ a(t)\neq 0, \qquad (H_2)\ b^2(t)-3a(t)c(t)>0,$$

$$\begin{aligned}(H_3)\ d(t)=&-\frac{\Big(b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}\Big)^3}{27a^2(t)}-\frac{\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}\Big(b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}\Big)^2}{9a^2(t)}\\&+\frac{d}{dt}\Big(\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}\Big),\end{aligned}$$

则方程 (1.1) 恰有两个 ω- 周期连续解.

证 由 $(H_1),(H_2),(H_3)$, 方程 (1.1) 化为

$$\frac{d\Big[x+\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}\Big]}{dt} \tag{4.5}$$

$$=a(t)\Big[x+\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}\Big]^3+\sqrt{b_2(t)-3a(t)c(t)}\Big[x+\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}\Big]^2.$$

故 $\gamma_1(t)=-\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}$ 是方程 (1.1) 一个 ω- 周期连续解.

令

$$x+\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}=y, \tag{4.6}$$

则方程 (4.5) 化为

$$\frac{dy}{dt}=a(t)y^3+\sqrt{b_2(t)-3a(t)c(t)}y^2, \tag{4.7}$$

由 $(H_1),(H_2)$, 可知方程 (4.7) 满足定理 3.2 或定理 3.3 的所有条件, 根据定理 3.2 或定理 3.3, 方程 (4.7) 有唯一非零 ω- 周期连续解 $y_1(t)$, 由 (4.6), 可得方程 (1.1) 有另一个 ω- 周期连续解

$$\gamma_2(t)=y_1(t)-\frac{b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}.$$

定理 4.2 证毕.

定理 4.3 考虑方程 (1.1), $a(t),b(t),c(t)$ 是 R 上的 ω- 周期连续函数, 并且 $a(t),b(t),c(t)$ 在 R 上具有连续导数, 如果以下条件成立:

$$(H_1)\ a(t)\neq 0,\qquad (H_2)\ b^2(t)-3a(t)c(t)>0,$$

$$(H_3)\ d(t)=\frac{\Big(-b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}\Big)^3}{27a^2(t)}-\frac{\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}\Big(-b(t)+\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}\Big)^2}{9a^2(t)}$$
$$+\frac{d}{dt}\Big(\frac{b(t)-\sqrt{b^2(t)-3a(t)c(t)}}{3a(t)}\Big),$$

则方程 (1.1) 恰有两个 ω- 周期连续解.

定理 4.3 的证明和定理 4.2 的证明相似, 在此省略.

参 考 文 献

[1] Lebrun J P M. On two coupled Abel-type differential equations arising in a magnetostatic problem[J]. IL Nuovo Cimento, 1990, 103A: 1369–1379.

[2] Mak M K and Harko T. Exact causal viscous cosmologies[J]. General Relativity and Gravitation, 1998, 30(8): 1171–1186.

[3] Matsuno Y. Two-dimensional dynamical system associated with Abel's nonlinear differential equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1992, 33(1): 412–421.

[4] Strobel G L and Reid J L. Nonlinear superposition rule for Abel's equation[J]. Physics Letter A 1982, 91(5): 209–210.

[5] Reid J L and, Strobel G L. The nonlinear superposition theorem of Lie and Abel's differential equations[J]. Lettere al Nuovo Cimento, 1983, 38(13): 448–452.
[6] Cima A , Gasull A and Manosas F. On the number of polynomial solutions of Bernoulli and Abel polynomial differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 263(11): 7099–7122.
[7] Jaume G and Claudia V. Nondegenerate centers for Abel polynomial differential equations of second kind[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 321(1): 469–477.
[8] Huang J F and Liang H H. Estimate for the number of limit cycles of Abel equation via a geometric criterion on three curves[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2017, 24(4): 24–47.
[9] Berna B and Mehmet S. A numerical approach for solving generalized Abel-type nonlinear differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 262(1): 169–177.
[10] Ni H, Tian L X and Zhang H. The existence and stability of the periodic solution on Abel differential equation[J]. Mathemtica Applicata, 2012, 25(4): 854–862.
[11] Mohanlal R, Maharaj S D, Tiwari A K and Narain R. Radiating stars with exponential Lie symmetries[J]. General Relativity and Gravitation, 2016, 48(87): arxiv:1612.08517.
[12] Misthry S S, Maharaj S D and Leach P G L. Nonlinear shear-free radiative collapse[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008, 31(3): 363–374.
[13] Mohanlal R, Narain R and Maharaj S D. Nonlinear equations in radiating stellar structures[J]. Journal of Mathematical Physics, 2017, 58(7): 072503.
[14] Mak M K, Chan H W and Harko T. Solutions generating technique for Abel-type nonlinear ordinary differential equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41(10–11): 1395–1401.
[15] Mak M K and Harko T. New method for generating general solution of Abel differential equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43(1–2): 91–94.
[16] Ni H. Transformation method for generating periodic solutions of abel' s differential equation[J]. Advances in Mathematical Physics, 2019, Article ID 3582142.
[17] 何崇佑, 概周期微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
[18] Coppel W A. Dichotomies in stability theory[M]. Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1979.
[19] Smart O R. Fixed point theories[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
[20] 韩茂安. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

THE EXISTENCE OF TWO PERIODIC SOLUTIONS OF ABEL'S DIFFERENTIAL EQUATION

NI Hua, HU Xiao-yi, YAO Yi-ping, ZHU Jie-yi

(*School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

Abstract: This paper deals with Abel's differential equation. By means of the fixed point theory and the transformation method, we obtain two periodic solutions of Abel's differential equation.

Keywords: Abel's differential equation; transformation method; fixed point theory; periodic solutions; existence

2010 MR Subject Classification: 34C25; 37C25