

## 一种求解带底部浅水波方程组的平衡保正的 MUSCL-Hancock 中心迎风格式

王静舟, 童 帷, 闫瑞芳, 陈国贤

(武汉大学数学与统计学院, 计算科学湖北省重点实验室(武汉大学), 武汉 430072)

**摘要:** 本文改进了基于 MUSCL 方法求解一维浅水波方程组的中心迎风格式. 利用 MUSCL-Hancock 方法在每个时间步的中间时刻求解 Riemann 问题, 并分别在  $t_n$  时刻和  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻对自由面的斜率进行了修正, 得到了 MUSCL-Hancock 中心迎风格式. 在合理的 CFL 条件下, 我们证明了该格式的平衡性与保正性. 数值结果表明, 与 MUSCL 格式相比, 本文格式能有效减少计算量并具有更高的分辨率.

**关键词:** 浅水波方程组; MUSCL-Hancock 中心迎风格式; 保正性; 平衡性

MR(2010) 主题分类号: 35L65; 65M08; 76M12

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2021)04-0329-13

### 1 引言

浅水波可以由 Saint-Venant<sup>[1]</sup> 方程组来描述, 该方程组被广泛地应用于河流和海洋流动的数值模拟. 一维的 Saint-Venant 方程组具有如下形式:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghB_x. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $h(x, t)$  表示水深,  $u(x, t)$  表示速度,  $g$  表示重力加速度, 与时间无关的函数  $B(x)$  表示底部地形.

我们将许多实际问题描述成一种“静稳态”附近的小扰动. 这里“静稳态”指的是水流速度等于 0, 且水面保持水平的一种状态, 即

$$u = 0, \quad w := h + B = \text{const}. \quad (1.2)$$

这里的  $w$  也称作自由面. 特别的,  $h = 0$  表示干底情形. 在数值上精准捕捉这种静稳态附近的小扰动, 是设计格式的一大挑战. “平衡性”(Well-balanced property) 的提出可以很好地刻画数值格式捕捉小扰动解的能力. 本文讨论的平衡性是指在数值上能够精确求解稳态解. 同时由于物理的限制, 水深需要保持恒非负  $h \geq 0$ . 我们称能够保持水深恒非负的数值格式为“保正性”(Positivity-preserving property) 格式. 对于本文研究的求解一维浅水波方程的二阶格式, “带底部”与“不带底部”在数值方法上都需要保持高阶、无震荡以及保持水深非

\*收稿日期: 2020-09-17      接收日期: 2021-01-12

基金项目: 国家自然科学基金资助(11371023).

作者简介: 王静舟(1994-), 男, 安徽合肥, 硕士, 主要研究方向: 计算流体力学.

通讯作者: 陈国贤

负. 对于这两种情形, 人们常常关心静稳态及其扰动时的波动现象. “不带底部”时各物理量成为常数(包括水深和水速), 而“带底部”的浅水方程只有速度是常数而水深却不再是常数, 这给数值格式的设计带来很大的困难, 尤其这种困难和保正性困难相互影响. 我们在设计格式时需要保证二阶、无震荡、保正和平衡性.

为方便讨论, 我们将 (1.1) 式写成向量形式:

$$U_t + (F(U, B))_x = S(U, B). \quad (1.3)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} w \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(U, B) = \begin{pmatrix} hu \\ \frac{(hu)^2}{w-B} + \frac{g}{2}(w-B)^2 \end{pmatrix}, \quad S(U, B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(w-B)B_x \end{pmatrix}.$$

浅水波方程组是一类双曲守恒律方程组, 由于这类方程组在实际问题中的广泛应用, 如何求它的数值解一直是一个热点问题. 近年来出现了许多高分辨率重构方法(如 WENO<sup>[2]</sup>, CWENO<sup>[3,4]</sup> 等). 自 1990 年 Nessyahu 和 Tadmor<sup>[5]</sup> 提出全离散中心格式之后, 中心格式引起了人们的广泛关注, Kurganov 等<sup>[6]</sup> 提出了半离散形式的中心迎风格式. 近年来, Chen 和 Noelle<sup>[7]</sup>, Bollermann 等<sup>[8]</sup> 对半离散的中心迎风格式进行了改进, 使其具有更良好的性质. MUSCL 格式<sup>[9]</sup> 是一种求解双曲守恒律方程组的高阶格式, 它在提高了数值精度和分辨率的同时, 也能够保持本质无振荡. Van Leer 和 Hancock<sup>[10]</sup> 改进了 MUSCL 格式, 并提出了 MUSCL-Hancock 方法.

对于带底部地形的浅水波方程组, Kurganov 和 Petrova<sup>[11]</sup> 提出了一种具有平衡性和保正性的中心迎风格式. 该格式在时间和空间上均达到二阶精度, 但在每个时间步里, 需要在同一个单元边界处求解两次 Riemann 问题. 本文运用 MUSCL-Hancock 方法对其进行了改进, 不仅能保证数值精度, 而且在每个时间步里只求解一次 Riemann 问题, 从而减小计算量. 同时, 在合理的 CFL 条件下, 本文格式依然具有平衡性和保正性. 经过理论分析和数值实验, 我们验证了本文格式具备平衡性和保正性, 并且是稳定高效可信的; 格式在时间和空间都达到了二阶精度, 并且能有效捕捉间断, 具备高分辨率.

本文内容安排如下: 第 2 节, 简单介绍中心迎风格式; 第 3 节, 详细介绍本文设计的新格式, 即基于 MUSCL-Hancock 方法的中心迎风格式, 该格式在时间和空间上均能达到二阶精度, 同时对水深进行保正重构; 第 4 节是理论分析部分, 证明了基于 MUSCL-Hancock 方法的中心迎风格式具有保正性和平衡性; 第 5 节, 通过数值算例验证了该格式的鲁棒性.

## 2 中心迎风格式

中心迎风格式是一种求解双曲型方程组的有限体积方法, 该方法具有高分辨率. 该格式利用分片线性重构使其具有空间二阶精度, 通过增加恰当的数值粘性使其具有了迎风的性质. 本节简要介绍其计算方法.

我们将定义域等分为有限体积单元  $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), 其单元长度为  $\Delta x := x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$ . 对 (1.3) 式在单元  $I_j$  上做积分平均, 得到如下半离散格式:

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = -\frac{H_{j+\frac{1}{2}}(t) - H_{j-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta x} + S_j(t). \quad (2.1)$$

其中  $S_j$  为源项的单元平均的一个合适离散,

$$S_j(t) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} S(U(x,t), B(x)) dx = \left( 0, -g \left( \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^- + w_{j-\frac{1}{2}}^+}{2} - B_j \right) \frac{B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right)^\top. \quad (2.2)$$

$H_{j+\frac{1}{2}}$  是中心迎风数值通量:

$$H_{j+\frac{1}{2}}(t) = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^+ F(U_{j+\frac{1}{2}}^-, B_{j+\frac{1}{2}}) - a_{j+\frac{1}{2}}^- F(U_{j+\frac{1}{2}}^+, B_{j+\frac{1}{2}}) + a_{j+\frac{1}{2}}^+ a_{j+\frac{1}{2}}^- (U_{j+\frac{1}{2}}^+ - U_{j+\frac{1}{2}}^-)}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-}. \quad (2.3)$$

这里的  $U_{j+\frac{1}{2}}^\pm$  为  $U$  在单元边界  $x_{j+\frac{1}{2}}$  处的左右极限值 (如图 所示), 并通过如下线性重构给出

$$\tilde{q} := q_j + (q_x)_j (x - x_j), \quad x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

其中  $q$  分别代表  $w$  和  $u$ . 对于  $U_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ , 我们令  $h_{j+\frac{1}{2}}^\pm = w_{j+\frac{1}{2}}^\pm - B_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $(hu)_{j+\frac{1}{2}}^\pm = h_{j+\frac{1}{2}}^\pm u_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ . 为避免分母过小, 单元平均速度定义为

$$u_j := \begin{cases} \frac{(hu)_j}{h_j}, & h_j \geq \epsilon, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

其中  $\epsilon$  是一个很小的正数, 本文取  $\epsilon = 10^{-9}$ .

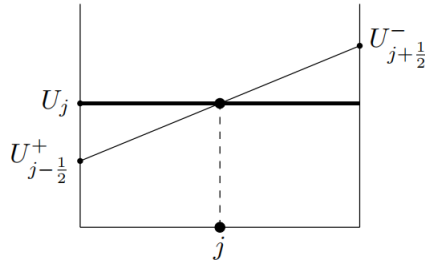


图 1 对  $U_j$  进行线性重构, 得到单元  $I_j$  的左右边界值  $U_{j-\frac{1}{2}}^+, U_{j+\frac{1}{2}}^-$

为消除数值振荡, 我们对斜率采用如下方法重构:

$$(q_x)_j = \text{minmod} \left( \theta \frac{q_j - q_{j-1}}{\Delta x}, \frac{q_{j+1} - q_{j-1}}{2\Delta x}, \theta \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta x} \right), \quad \theta \in [1, 2]. \quad (2.5)$$

其中 minmod 函数定义为:

$$\text{minmod}(z_1, z_2, \dots) := \begin{cases} \min_j \{z_j\}, & z_j > 0, \forall j \\ \max_j \{z_j\}, & z_j < 0, \forall j \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

在数值通量 (2.3) 式的求解中, 波速估计如下

$$\begin{aligned} a_{j+\frac{1}{2}}^+ &= \max\{u_{j+\frac{1}{2}}^+ + \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2}}^+}, u_{j+\frac{1}{2}}^- + \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2}}^-}, 0\}, \\ a_{j+\frac{1}{2}}^- &= \min\{u_{j+\frac{1}{2}}^+ - \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2}}^+}, u_{j+\frac{1}{2}}^- - \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2}}^-}, 0\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

为了使得重构后的水深非负, 即  $\tilde{w}(x) \geq B(x)$ , 我们对自由面梯度作如下“保正性修正”<sup>[11]</sup>:

- 如果  $w_{j+\frac{1}{2}}^- < B_{j+\frac{1}{2}}$ , 则令  $(w_x)_j := (B_{j+\frac{1}{2}} - w_j) / \frac{\Delta x}{2}$   
 $\Rightarrow w_{j+\frac{1}{2}}^- = B_{j+\frac{1}{2}}, \quad w_{j-\frac{1}{2}}^+ = 2w_j - w_{j+\frac{1}{2}}^-;$
- 如果  $w_{j-\frac{1}{2}}^+ < B_{j-\frac{1}{2}}$ , 则令  $(w_x)_j := (w_j - B_{j-\frac{1}{2}}) / \frac{\Delta x}{2}$   
 $\Rightarrow w_{j-\frac{1}{2}}^+ = B_{j-\frac{1}{2}}, \quad w_{j+\frac{1}{2}}^- = 2w_j - w_{j-\frac{1}{2}}^+.$

注 如下对半离散格式(2.1)的时间方向离散采用具有二阶精度的强稳定的两步 Runge-Kutta 法(SSP-RK)<sup>[12]</sup>:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1,(1)} &= U_j^n + \Delta t R_j^n, \\ U_j^{n+1,(2)} &= U_j^{n+1,(1)} + \Delta t R_j^{n+1,(1)}, \\ U_j^{n+1} &= \frac{U_j^n + U_j^{n+1,(2)}}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 3 基于 MUSCL-Hancock 方法的中心迎风格式

在第 2 节中描述的传统中心迎风格式, 为了在时间方向达到二阶精度, 对半离散格式 (2.1) 采用两步 Runge-Kutta 方法<sup>[12]</sup> 更新物理量在新时刻的值. 从而在每一个时间步里, 在单元边界处求解两次 Riemann 问题. 为了减少 Riemann 问题的求解次数, 我们采用 MUSCL-Hancock 方法来更新物理量. 本文提出的数值格式在时间和空间上均达到二阶精度.

MUSCL-Hancock 方法的一般步骤为:

1. 重构  $U(x, t_n)$  在单元边界处的左右极限值  $U_{j-\frac{1}{2}}^{n,+}, U_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}$ ;
2. 计算  $U(x, t_{n+\frac{1}{2}})$  在单元边界处的左右极限值  $U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}$ ;
3. 利用第 2 步得到的单元边界值计算数值通量  $H_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  和源项  $S_j^{n+\frac{1}{2}}$ , 从而更新  $t_{n+1}$  时刻的单元平均值  $U_j^{n+1}$ .

上述方法第 1 步对自由面的重构与传统中心迎风格式相同, 下文 3.1 节和 3.2 节详细说明第 2 步和第 3 步.

#### 3.1 在 $t_{n+\frac{1}{2}}$ 时刻单元边界处的数据重构

为了计算在  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻的数值源项  $S_j^{n+\frac{1}{2}}$  (见 (2.2)) 和数值通量  $H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  (见 (2.3)), 我们在这一节估计  $U(x, t_{n+\frac{1}{2}})$  在  $x_{j+\frac{1}{2}}$  处的左右极限值 (如图 2 所示).

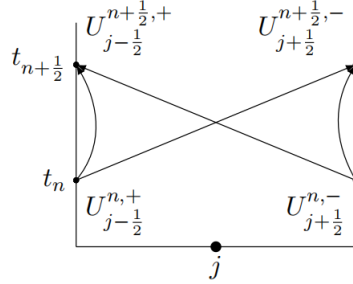


图 2 利用  $U_{j-1/2}^{n,+}, U_{j+1/2}^{n,-}$  计算  $t_{n+1/2}$  时刻的单元  $j$  的边界值  $U_{j-1/2}^{n+1/2,+}, U_{j+1/2}^{n+1/2,-}$

记  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . 利用 (2.4) 式重构  $U(x, t_n)$  在单元边界处的左右极限值  $U_{i+1/2}^{n,\pm}$  之后, 我们用下式计算在  $t_{n+1/2}$  时刻的单元边界值

$$\begin{cases} w_{j+1/2}^{n+1/2,\pm} = w_{j+1/2}^{n,\pm} - \frac{\lambda}{2} \left( (hu)_{j+1/2}^{n,-} - (hu)_{j+1/2}^{n,+} \right), \\ (hu)_{j+1/2}^{n+1/2,\pm} = (hu)_{j+1/2}^{n,\pm} - \frac{\lambda}{2} \left( (\frac{1}{2}gh^2 + hu^2)_{j+1/2}^{n,-} - (\frac{1}{2}gh^2 + hu^2)_{j+1/2}^{n,+} \right) \\ \quad - \frac{\lambda}{2} g(w_j^n - B_j)(B_{j+1/2} - B_{j-1/2}). \end{cases} \quad (3.1)$$

并记

$$w_j^{n+1/2} = \frac{w_{j+1/2}^{n+1/2,-} + w_{j-1/2}^{n+1/2,+}}{2}. \quad (3.2)$$

虽然在进行“保正性修正”之后, 有  $w_{j+1/2}^{n,\pm} \geq B_{j+1/2}$  成立, 但是我们仍然不能保证在半时间步的保正性, 即  $w_{j+1/2}^{n+1/2,\pm} \geq B_{j+1/2}$  可能被破坏. 然而, 在一定的 CFL 条件限制下  $w_j^{n+1/2} \geq B_j$  成立 (其证明见引理 4.1), 于是我们可以类似地在半时间步作如下的“保正性修正”<sup>[11]</sup>:

- 如果  $w_{j+1/2}^{n+1/2,-} < B_{j+1/2}$ , 则令

$$w_{j+1/2}^{n+1/2,-} = B_{j+1/2}, \quad w_{j-1/2}^{n+1/2,+} = 2w_j^{n+1/2} - w_{j+1/2}^{n+1/2,-}; \quad (3.3)$$

- 如果  $w_{j-1/2}^{n+1/2,+} < B_{j-1/2}$ , 则令

$$w_{j-1/2}^{n+1/2,+} = B_{j-1/2}, \quad w_{j+1/2}^{n+1/2,-} = 2w_j^{n+1/2} - w_{j-1/2}^{n+1/2,+}. \quad (3.4)$$

### 3.2 $t_{n+1}$ 时刻物理量的更新

利用已经估算出来的守恒量  $U_{j+1/2}^{n+1/2,\pm}$ , 我们可以更新其在  $t_{n+1}$  时刻的单元平均值

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left( H_{j+1/2}^{n+1/2} - H_{j-1/2}^{n+1/2} \right) + \Delta t S_j^{n+1/2}. \quad (3.5)$$

其中数值通量  $H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  与数值源项  $S_j^{n+\frac{1}{2}}$  分别由 (2.3) 式和 (2.2) 式在  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻求得, 即利用  $U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}, \pm}$  去实现.

## 4 理论分析

我们在设计求解带底部的一维浅水波方程组的数值格式时, 常常关注两种重要性质: 一是格式要能保证水深非负  $h \geq 0$ , 即“保正性”; 二是要能在静稳态条件下, 维持稳态解, 即“平衡性”. 本节我们理论证明了本文设计的 MUSCL-Hancock 中心迎风格式具有这两种性质.

### 4.1 保正性

保正性 (Positivity-preserving property) 证明包含两个步骤, 首先是考虑在  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻的保正性, 其次考虑在  $t_{n+1}$  时刻的保正性.

下面引理给出  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻的保正性.

**引理 4.1** 如果时间步长满足 CFL 条件限制,  $\lambda \max_j |u_{j\pm\frac{1}{2}}^{n,\pm}| \leq \frac{1}{3}$ , 则由公式(3.1)计算所得在  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻的单元平均水深恒非负, 即  $w_j^{n+\frac{1}{2}} \geq B_j$ .

**证** 利用 (3.2) 式可以得到

$$\begin{aligned} w_j^{n+\frac{1}{2}} - B_j &= \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} + w_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}}{2} - \frac{B_{j+\frac{1}{2}} + B_{j-\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} + w_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} - \lambda((hu)_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - (hu)_{j-\frac{1}{2}}^{n,+})}{2} - \frac{B_{j+\frac{1}{2}} + B_{j-\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} + h_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} - \lambda((hu)_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - (hu)_{j-\frac{1}{2}}^{n,+})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \lambda u_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}\right) h_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} + \frac{1}{2} \left(1 + \lambda u_{j-\frac{1}{2}}^{n,+}\right) h_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中第二个等式中用到了 (3.1) 式; 由 CFL 条件, 有  $1 - \lambda u_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} > 0$ ,  $1 + \lambda u_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} > 0$ , 从而最后的不等式成立. 引理得证.

下面讨论  $t_{n+1}$  时刻的保正性.

**定理 4.1** 如果时间步长满足 CFL 条件限制,  $\lambda \max_j |a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm}| \leq \frac{1}{3}$ , 则由公式(3.5)更新的在  $t_{n+1}$  时刻的单元平均水深恒非负, 即  $w_j^{n+1} \geq B_j$ .

**证** 我们仅考虑 (3.5) 式的第一个分量式, 首先将其减去底部  $B_j$ , 类似 (4.1) 式, 再代入

由 (2.3) 式计算出的数值通量, 可以得到

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} - B_j &= h_j^n - \lambda \left( H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},(1)} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},(1)} \right) \\ &= h_j^n - \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} - a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}}{a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}} h_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} - \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}}{a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - a_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}} h_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} \\ &\quad + \lambda a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} - a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}}{a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}} h_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} + \lambda a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} \frac{a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}}{a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - a_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-}} h_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

由引理 4.1 和第 3.1 节的保正性修正, 可以得到  $h_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm} \geq 0$ . 又由波速估计 (2.6) 式可知  $a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} \geq 0$ ,  $a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} \leq 0$ , 且  $a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} \geq a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - u_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} \geq 0$  及  $a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} - a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} \geq u_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} - a_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} \geq 0$ . 因此

$$w_j^{n+1} - B_j \geq h_j^n - \frac{1}{3}(h_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},-} + h_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}) = h_j^n - \frac{2}{3}h_j^{n+\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

(4.3) 中的等号利用了第 3.1 节中 (3.1) 式和修正步的守恒性. 由 (4.1) 式知  $h_j^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{4}{3}h_j^n$ , 于是  $w_j^{n+1} - B_j \geq \frac{1}{9}h_j^n \geq 0$ . 定理得证.

## 4.2 平衡性

“平衡性”(Well-balanced property) 可以很好的刻画数值格式捕捉稳态附近的小扰动解的能力. 本节讨论格式的平衡性. 如同保正性分析, 这里同样也包含两个步骤: 首先是考虑在单元边界处的不变性, 即  $U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = U_{j+\frac{1}{2}}^n$ ; 然后考虑单元中心处的不变性, 即  $U_j^{n+1} = U_j^n$ .

**定理 4.2** 如果初值满足  $w_j = \text{const}, u_j = 0, \forall j$ , 那么可以得到  $U_j^{n+1} = U_j^n, \forall j$ .

**证** 首先考虑在  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻物理量的计算. 由静稳态初始条件和初始数据重构可以保证  $w_{j\pm\frac{1}{2}}^{n,\pm} = w_j^n = \text{const}$  且  $u_{j\pm\frac{1}{2}}^{n,\pm} = 0$ , 从而  $h_{j\pm\frac{1}{2}}^{n,\pm} = w_j^n - B_{j\pm\frac{1}{2}}$ . 利用 (3.1) 式可得

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm} = w_{j+\frac{1}{2}}^{n,\pm} = w_j^n, \quad (4.4)$$

以及

$$\begin{aligned} (hu)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm} &= -\frac{\lambda}{2} \left( \left( \frac{1}{2}gh^2 \right)_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - \left( \frac{1}{2}gh^2 \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} + g(w_j^n - B_j)(B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= -\frac{\lambda}{2}gh_j^n \left( h_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} + B_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} - B_{j-\frac{1}{2}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

于是  $w_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm} = 0$  和  $h_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm} = w_j^n - B_{j\pm\frac{1}{2}}$ .

下面考虑  $t_{n+1}$  时刻物理量的更新. 将  $U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},\pm}$  代入 (2.2) 式和 (2.3) 式计算可得数值源项和数值通量分别为

$$S_j^{n+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(w_j^n - B_j) \frac{B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \end{pmatrix}, \quad H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(w_j^n - B_{j+\frac{1}{2}})^2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

代入 (3.5) 式可得

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} - U_j^n &= -\lambda \left( H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta t S_j^{n+\frac{1}{2}} \\ &= -\lambda \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{g}{2}(w_j^n - B_{j+\frac{1}{2}})^2 - \frac{g}{2}(w_j^n - B_{j-\frac{1}{2}})^2 + g(w_j^n - B_j)(B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}) \end{array} \right) \quad (4.7) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是  $U_j^{n+1} = U_j^n$ . 定理得证.

## 5 数值验证

本文在第 2 节通过 (2.4) 式的分片线性重构使得格式在空间上达到二阶精度, 同时第 2 节的 (2.7) 式使用两步 Runge-Kutta 方法使得格式在时间上达到二阶精度. 本节我们通过一系列数值算例来验证本文格式的精度、有效性和鲁棒性. 第一个算例验证格式的数值精度; 第二个算例验证格式捕捉静稳态解的小扰动的能力; 第三个算例验证格式的保正性以及处理干界面的能力. 最后我们来验证格式对于间断底部上复合波的高分辨率. 在所有的计算中, 斜率限制器 (2.5) 中的参数  $\theta$  均取为 1.3. 由于这些算例缺少解析解, 对于以下所有数值算例, 我们均取在同等条件下的密网格 (网格数为 3200) 上的数值结果作为参考解.

### 5.1 数值精度

本算例选自参考文献 [13], 旨在验证本文格式的数值精度. 本算例中使用的初始数据均为连续函数. 水深  $h$ , 动量  $hu$  的初始值分别为

$$h(x, 0) = 5 + e^{\cos(2\pi x)}, \quad hu(x, 0) = \sin(\cos(2\pi x)), \quad \forall x \in [0, 1]$$

底部函数  $B(x)$  为

$$B(x) = \sin^2(\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

重力加速度  $g = 9.812$ . 为了比较精度, 模拟结束时间选在解出现间断之前, 这里取  $t_{\text{stop}} = 0.1$ . 本算例采用周期边界条件. 我们分别用传统的 MUSCL 中心迎风格式和本文设计的 MUSCL-Hancock 中心迎风格式进行模拟, 当计算单元数分别为 25, 50, 100, 200, 400 和 800 时, 表 1 显示的是的  $L^1$  误差和精度, 表 2 显示的是两种格式程序计算时间. 结果表明这两种格式均能达到二阶数值精度, 同时我们还发现本文格式的  $L^1$  误差约为已有的 MUSCL 中心迎风格式的  $1/3$ , 计算时间减少了约  $1/3$ .

### 5.2 静稳态及其小扰动问题

本算例选自文献 [11], 我们将用它来验证格式的平衡性, 以及捕捉稳态解的微小扰动传播的能力.

表 1 MUSCL 中心迎风格式和 MUSCL-Hancock 中心迎风格式的  $L^1$  误差和精度

单元数	MUSCL		MUSCL-Hancock		MUSCL		MUSCL-Hancock	
	$h$ 误差	精度	$h$ 误差	精度	$hu$ 误差	精度	$hu$ 误差	精度
25	$3.72e-02$		$2.68e-02$		$1.70e-01$		$1.46e-01$	
50	$1.11e-02$	1.74	$7.10e-03$	1.92	$8.89e-02$	0.94	$5.62e-02$	1.37
100	$3.10e-03$	1.84	$1.50e-03$	2.24	$2.97e-02$	1.58	$1.34e-02$	2.07
200	$8.77e-04$	1.82	$3.32e-04$	2.18	$7.30e-03$	2.02	$2.80e-03$	2.26
400	$2.24e-04$	1.97	$7.27e-05$	2.19	$1.80e-03$	2.02	$5.92e-04$	2.24
800	$5.55e-05$	2.01	$1.70e-05$	2.09	$4.44e-04$	2.02	$1.38e-04$	2.10

表 2 MUSCL 中心迎风格式和 MUSCL-Hancock 中心迎风格式的计算时间比较

单元数	MUSCL	MUSCL-Hancock	计算时间比值
25	0.545	0.542	0.994
50	0.868	0.783	0.850
100	1.897	0.738	0.794
200	6.174	4.453	0.721
400	22.916	15.444	0.674
800	91.586	63.496	0.693
1600	359.74	234.275	0.676

这里底部定义为一个复杂的分段函数

$$B(x) = \begin{cases} 10(x-3), & 0.3 \leq x \leq 0.4, \\ 1 - 0.0025 \sin^2(25\pi(x-0.4)), & 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ -10(x-0.7), & 0.6 \leq x \leq 0.7, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5.1)$$

初始条件为

$$(w(x,0), u(x,0)) = \begin{cases} (1+\epsilon, 0), & 0.1 < x < 0.2, \\ (1, 0), & \text{其它.} \end{cases} \quad (5.2)$$

常数  $g = 1$ , 计算区域为  $[-1,1]$ .  $\epsilon$  为一个小参数. 当取  $\epsilon = 0$ , 表示静稳态. 我们选择程序结束时间为  $t_{\text{stop}} = 10$ , 并把单元数为 200 时的水深  $h$  和动量  $hu$  的  $L^\infty$  误差显示在表 3 中. 结果显示无论是  $h$  还是  $hu$ , 数值误差都处于机器精度范围内, 这从数值上证明了这两种中心迎风格式都具有平衡性. 我们也模拟在稳态附近的小扰动问题. 在  $[0.1, 0.2]$  上的微小扰动参数取为  $\epsilon = 0.001$ , 结束时间  $t_{\text{stop}} = 1$ , 单元数为 100 和 200 时的计算结果显示在图 3 中. 结果表明两种迎风格式都能很好的捕获这种小扰动的传播. 我们需要强调的是, 数值结果也显示了 MUSCL-Hancock 中心迎风格式比 MUSCL 中心迎风格式具有更好的分辨率.

表 3 静稳态解  $h$  和  $hu$  的  $L^\infty$  误差

误差	MUSCL	MUSCL-Hancock
$h$	$1.11e-16$	$2.22e-16$
$hu$	$2.34e-16$	$1.89e-16$

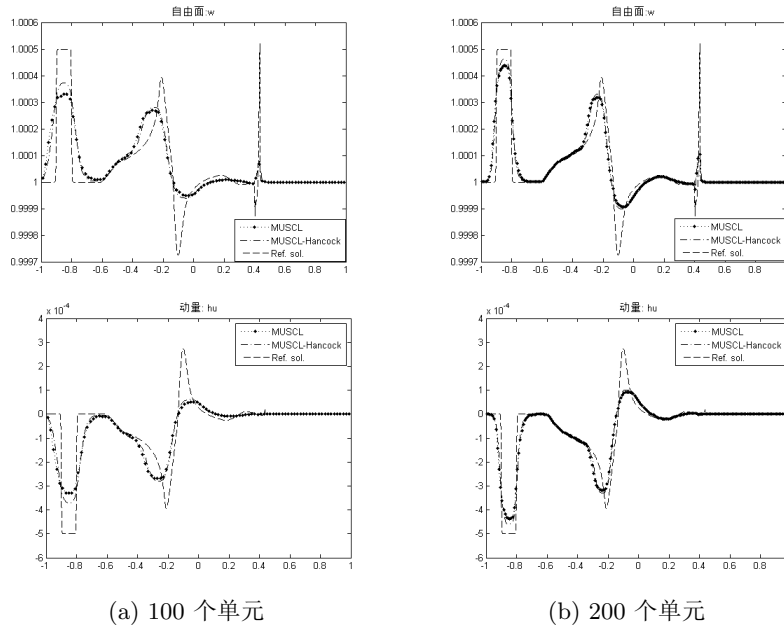


图 3 算例 5.2: 静稳态的小扰动传播问题. 第一列为在 100 个单元上的模拟结果, 第二列为在 200 个单元上的模拟结果. 第一行显示的是自由面  $w$ , 第二行显示的是动量  $hu$ . MUSCL 中心迎风格式和 MUSCL-Hancock 中心迎风格式的结果分别用点线和点虚线显示. 参考解为在 3200 个网格点上的模拟结果, 用虚线显示.

### 5.3 干界面与间断底部

本算例选自文献 [11], 底部为阶梯函数:

$$B(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0.5, \\ 0.1, & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.3)$$

初始值:

$$(w(x, 0), u(x, 0)) = \begin{cases} (2.222, -1), & x \leq 0.5, \\ (0.8246, -1.6359), & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.4)$$

定义域为  $[0, 1]$ , 常数  $g = 2$ , 结束时间为  $t_{\text{stop}} = 0.2$ . 该问题的精确解由一个稀疏波, 接触间断和激波组成. 使用本文设计的 MUSCL-Hancock 中心迎风格式分别在 100 个单元和 200 个单元上进行计算, 结果显示在图 4 中. 计算结果表明本文格式能够很好的捕捉这几个波. 在底部跳跃点  $x = 0.5$  附近, 水深已经非常接近于 0. 由于格式具有保正性, 所以对于这种几乎干底问题也能够进行很好的模拟.

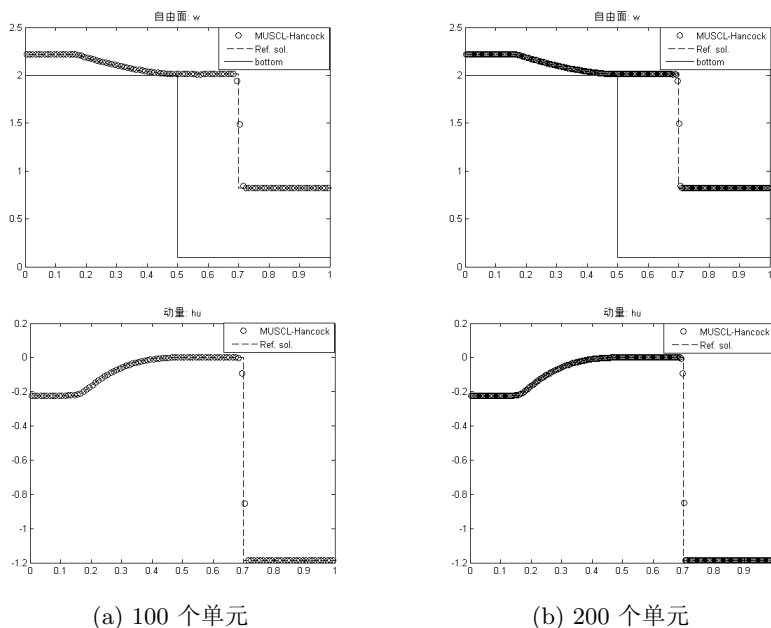


图 4 算例 5.3: 干界面与底部间断. 第一列为在 100 个单元上的模拟结果, 第二列为在 200 个单元上的模拟结果. 第一行显示的是自由面  $w$ , 第二行显示的是动量  $hu$ . MUSCL-Hancock 中心迎风格式的结果用圆圈显示, 底部  $B(x)$  用实线显示. 参考解为在 3200 个网格点上的模拟结果, 用虚线显示.

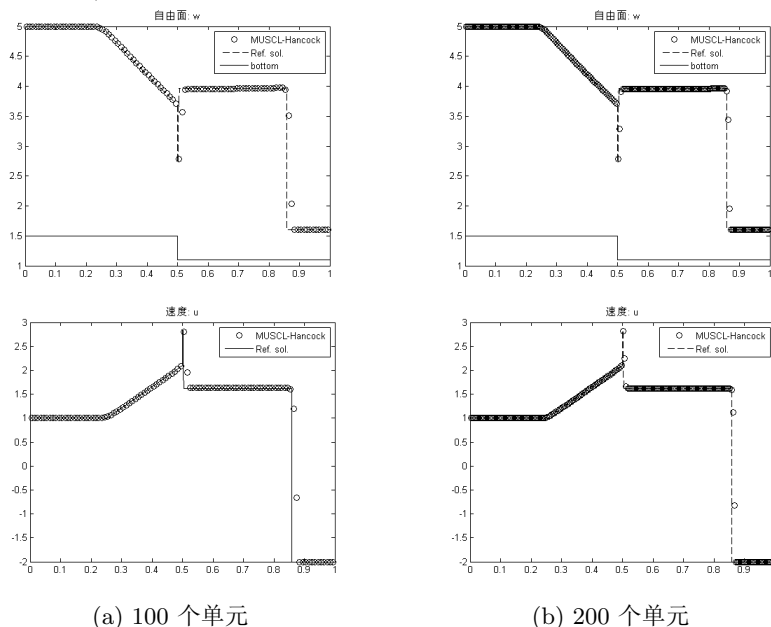


图 5 算例 5.4: 复合波和间断底部. 第一列为在 100 个单元上的模拟结果, 第二列为在 200 个单元上的模拟结果. 第一行显示的是自由面  $w$ , 第二行显示的是速度  $u$ . MUSCL-Hancock 中心迎风格式的结果用圆圈显示, 底部  $B(x)$  用实线显示. 参考解为在 3200 个网格点上的模拟结果, 用虚线显示.

#### 5.4 复合波和间断底部

本算例选自文献 [11], 底部是阶梯函数:

$$B(x) = \begin{cases} 1.5, & x \leq 0.5, \\ 1.1, & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.5)$$

初始 Riemann 条件:

$$(w(x, 0), u(x, 0)) = \begin{cases} (5, 1), & x \leq 0.5, \\ (1.6, -2), & x > 0.5. \end{cases} \quad (5.6)$$

取常数  $g = 2$ , 定义域为  $[0, 1]$ , 结束时间为  $t_{\text{stop}} = 0.15$ . 该问题的精确解包含一个复合三波, 它由声速稀疏波连接到一个接触间断, 并伴随着零速度激波和另一个接触间断. 我们可以从图 5 中明显地看出, 本文格式具有非常高的整体分辨率. 数值模拟结果在底部间断处有一个突降和突升.

## 6 总结

关于求解带底部地形的一维浅水波方程, 本文给出基于 MUSCL-Hancock 方法的中心迎风格式. 相对于传统的 MUSCL 中心迎风格式而言, 在每个时间步  $[t_n, t_{n+1}]$ , 本文设计的格式只在  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻求解 Riemann 问题, 并更新数值通量和数值源项, 从而达到减少计算量的目的. 为了格式的保正性, 在每个时间步, 我们分别在  $t_n$  时刻和  $t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻对自由面的斜率进行了修正. 这种修正对于数据重构具有保正性和守恒性. 然后我们严格证明了在一定的 CFL 条件限制下, 格式对于解的更新具有平衡性与保正性. 数值算例也验证了这些性质. 另外, 数值结果表明, 与 MUSCL 格式相比, 本文格式具有更高的分辨率. 我们下一步将考虑格式的高维推广, 以及更一般的稳态解的捕捉能力, 例如动稳态解.

## 参 考 文 献

- [1] Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues at à l'introduction des warées dans leur lit[J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1871, 73(99): 147–154.
- [2] Zhang X, Liu Y, Shu C W. Maximum-principle-satisfying high order finite volume weighted essentially nonoscillatory schemes for convection-diffusion equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2012, 34(2): A627–A658.
- [3] Levy D, Puppo G, Russo G. A third order central WENO scheme for 2D conservation laws[J]. Applied Numerical Mathematics, 2000, 33(1-4): 415–421.
- [4] Levy D, Puppo G, Russo G. A fourth-order central WENO scheme for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2): 480–506.
- [5] Nessyahu H, Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 1990, 87(2): 408–463.
- [6] Kurganov A, Noelle S, Petrova G. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton–Jacobi equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2001, 23(3): 707–740.

- [7] Chen G, Noelle S. A new hydrostatic reconstruction scheme based on subcell reconstructions[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2017, 55(2): 758–784.
- [8] Bollermann A, Chen G, Kurganov A, Noelle S. A well-balanced reconstruction of wet/dry fronts for the shallow water equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 56(2): 267–290.
- [9] Van Leer B. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist - Osher and Roe[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1984, 5(1): 1–20.
- [10] Toro E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] Kurganov A, Petrova G. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system[J]. Communications in Mathematical Sciences, 2007, 5(1): 133–160.
- [12] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439–471.
- [13] Xing Y, Shu C W. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208(1): 206–227.

## A WELL-BALANCED POSITIVITY PRESERVING MUSCL-HANCOCK CENTRAL-UPWIND SCHEME FOR SHALLOW WATER EQUATIONS WITH TOPOGRAPHY

WANG Jing-zhou, TONG Wei, YAN Rui-fang, CHEN Guo-xian

*(School of Mathematics and Statistics Wuhan University,*

*Hubei Key Laboratory of Computational Science (Wuhan University), Wuhan 430072, China)*

**Abstract:** In this paper, we improve the central-upwind scheme for solving one-dimensional shallow water wave equations based on MUSCL method. This method adopted MUSCL-Hancock method to solve the Riemann problem at the middle of each time step, and correct the slope of the free surface at  $t_n$  and  $t_{n+\frac{1}{2}}$  respectively, which is called MUSCL-Hancock central-upwind scheme. Under the reasonable CFL condition, we prove that the new scheme is well-balanced and preserves non-negativity of the water height. Compared with MUSCL scheme, numerical examples show that the method can effectively reduce computation and has higher resolution.

**Keywords:** shallow water equations; MUSCL-Hancock central-upwind scheme; positivity preserving property; well-balanced property

**2010 MR Subject Classification:** 35L65; 65M08; 76M12