Vol. 41 (2021)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

解两点边值问题的一种新方法

张杰华 [1]，周实然 [2]
(1. 凯里学院理学院, 贵州 凯里 556011)
(2. 凯里学院教育科学学院, 贵州 凯里 556011)

摘 要: 本文研究了一种新的数值方法求解两点边值问题. 利用异于 Lagrange 二次有限体积法的一种新方法, 获得了该方法的超收敛估计结果, 推广了 Lagrange 二次有限体积法的超收敛结果.

关 键 词: 有限体积法; 插值弱估计; 超收敛
MR(2010) **主题分类号**: 65L10; 65L12; 65L20 **中 图 分 类 号**: O241.1; O241.81; O175.8
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2021)02-0170-19

1 引言

随着微分方程理论的不断发展, 两点边值问题的研究也日益活跃, 它在工程力学、天文学、经济学、控制论及生命科学等领域的许多实际问题中都有着广泛的应用. 有限体积法, 又被称之为广义差分法、控制体积法, 它兼顾了有限差分法和有限元法各自的优点, 是求解偏微分方程的一种有效数值方法 [1].

众所周知, 有限元法及其超收敛理论研究已经比较完善 [2, 3], 而有限体积法的研究还不尽人意. 关于求解两点边值问题的有限体积法研究, 多年来硕果累累. 上世纪八、九年代, 学者们已经开始致力于有限体积法的基础理论研究 [4–7]. 到了本世纪初, 关于高阶有限体积法及其超收敛理论分析的研究, 开始逐渐成为关注的热点, 进入学者们的视野 [8–15]. 特别地, 文献 [16] 证明了线性有限体积法的解与相应的有限元法的解具有 H^1 模超逼近性质. 专著 [17] 给出了两点边值问题二阶与三阶有限体积法的 H^1 模超逼近及其应力佳点的超收敛结论. 文献 [18] 建立了基于应力佳点的三阶有限体积法并得到了关于其导数误差估计的超收敛结果. 文献 [19–21] 给出了两点边值问题的任意阶有限体积法在节点处与高斯点处的超收敛分析. 虽然, 大部分的这些研究工作分析了对应的有限体积法的最优 H^1 模和 L^2 模误差估计, 给出了应力佳点处的导数误差估计以及整体的 H^1 模超收敛结果, 但都很少提及有限体积法的 L^2 模超逼近和超收敛后处理估计.

此外, 近年来基于三角形网格剖分的有限体积法研究也取得了突破性的进展. 文献 [22, 23] 借助于离散范数等价, 在三角形网格上分析了一类椭圆问题的高阶有限体积法的强制性要求. 文献 [24] 通过选取特殊的三角形对偶剖分, 利用从试验函数空间到检验函数空间的特殊映射, 构建了与三角形形状无关的无条件稳定的二阶有限体积法. 正是这些已有的研究成果启发了本文的工作.

本文基于 Lagrange 二次有限体积法, 构造求解两点边值问题的一种新 Lagrange 二次数值方法, 得到了新方法的 H^1 模和 L^2 模的超逼近估计. 具体地, 基于有限体积法 [24] 构造特

*收稿日期: 2020-05-05 接收日期: 2020-09-29
基金项目: 贵州省教育厅基金资助 ([2018]361); 凯里学院基金资助 (BS201710).
作者简介: 张杰华 (1981–), 男, 湖南怀化, 讲师, 研究方向: 偏微分方程数值解.

殊对偶剖分及其特殊映射的思想, 引入从 Lagrange 二次有限体积法的试验函数空间到检验函数空间的一个新映射, 从而得到求解两点边值问题的一种 Lagrange 二次新数值方法. 此数值方法在特殊对偶剖分时即为 Lagrange 二次有限体积法. 借助于文献 [22, 23] 中离散等价范数的技巧, 利用等价二次型的性质, 本文构造了与 H^1 模, H^2 离散半模等价的离散范数, 证明了对任意的 Lagrange 二次对偶剖分此文的数值方法均具有最优 H^1 模误差估计. 特别地, 当对偶剖分单元节点取为应力佳点 (Gauss 点) 时, 本文分析了新数值方法的第一型和第二型插值弱估计, 从而得到了 H^1 模和 L^2 模的超逼近估计 (第二型插值弱估计是得到 L^2 模超逼近的关键). 对此特殊对偶剖分的数值解作局部二级插值处理, 则可得到新数值方法的整体 H^1 模和 L^2 模超收敛估计, 其收敛阶与其对应的二次 Lagrange 有限元法结论一致. 利用本文的技巧, 同样可分析 Lagrange 二次有限体积法的超收敛结论. 另外, 本文的思想与方法可以扩展至高维高阶的数值方法情形.

下一节, 本文将给出求解两点边值问题的 Lagrange 二次新数值方法. 第三节将给出离散范数等价估计. 第四节考虑对任意二次对偶剖分新数值方法的最优 H^1 模误差估计. 第五节, 采用特殊对偶剖分, 分析新数值方法的第一型及第二型插值弱估计, 并证明数值解的 H^1 模和 L^2 模超逼近估计, 以及利用二级插值处理后的超收敛估计. 最后, 给出数值算例, 说明本文理论结果的正确性.

2 新 Lagrange 二次数值方法

考虑区间 $\mathrm{I} := [a,b]$ 上两点边值问题:

$$\begin{aligned} -(p(x)u(x)')' &= f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) &= u'(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中已知函数 $f \in L^2(\mathrm{I})$, $p \in C^1(\mathrm{I})$ 且满足 $p_1 \geqslant p(x) \geqslant p_0$, 而 p_1, p_0 为正常数.

众所周知, 问题 (2.1) 的变分形式为: 求 $u \in H_E^1(\mathrm{I}) := \{u : u \in H^1(\mathrm{I}), u(a) = 0\}$ 满足

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_E^1(\mathrm{I}), \tag{2.2}$$

其中 $a(u,v) := (pu', v')$, $(\cdot,\cdot)$ 表示在区间 I 上的 L^2 内积.

下面介绍 Lagrange 二次有限体积法的网格剖分及其试验函数空间, 对偶网格剖分及其检验函数空间. 然后通过引入从试验函数空间到检验函数空间的映射, 建立求解问题 (2.1) 的 Lagrange 二次新数值方法格式.

1. 网格剖分 $\mathcal{T}_n$. 设剖分单元为 $\mathrm{I}_i := [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$, 其中 $x_0 := a$, $x_n := b$. 因此 $\mathrm{I} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} \mathrm{I}_i$ 和 $\mathrm{I}_i \in \mathcal{T}_n$, $i \in \mathbb{N}_n$. 在网格拟一致剖分 [25, 26] 的假设条件下, 不妨设 $\mathcal{T}_n$ 为均匀剖分, 即单元 I_i 的长度恒为 $h := h_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{meas}(\mathrm{I})$, $i \in \mathbb{N}_n$.

2. 试验函数空间 $U_{\mathcal{T}_n}$. 设在区间 $[0,1]$ 上的 Lagrange 二次插值基函数为

$$N_0(\xi) := (2\xi - 1)(\xi - 1), \quad N_{\frac{1}{2}}(\xi) := 4\xi(1 - \xi), \quad N_1(\xi) := (2\xi - 1)\xi.$$

当 $x \in \mathrm{I}_i$ 时, $i \in \mathbb{N}_n$, 令 $\xi := \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$, 则在单元 I_i 上关于节点 x_{i-1}, $x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i 处的分片插值基函数分别为 $\varphi_{i,1}(x) := N_0(\xi)$, $\varphi_{i,12}(x) := N_{\frac{1}{2}}(\xi)$, $\varphi_{i,2}(x) := N_1(\xi)$, 其中 $x_{i-\frac{1}{2}} := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ 为单元 $\mathrm{I}_i = [x_{i-1}, x_i]$ 的中点. 取

$$U_{\mathcal{T}_n} := \mathrm{span}\,\{\varphi_{i,1}(x), \varphi_{i,12}(x), \varphi_{i,2}(x), i \in \mathbb{N}_n\} \cap H_E^1(\mathrm{I})$$

为二次 Lagrange 有限体积法的试验函数空间. 则对任意的 $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 可表示为 $u_h(x)=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{u}_{i-\frac12}\Phi_i(x)^T$, 此处 $\mathbf{u}_i:=(u_{i-\frac12},u_i,u_{i+\frac12})$, $u_i:=u_h(x_i)$, $u_{i-\frac12}:=u_h(x_{i-\frac12})$, $\Phi_i(x):=(\varphi_{i,1}(x),\varphi_{i,12}(x),\varphi_{i,2}(x))$.

3. 对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*$. 设 $\alpha\in(0,\frac12)$. 记 $\mathrm{I}_0^*=[x_0,x_\alpha]$, $\mathrm{I}_i^*=[x_{i-1+\alpha},x_{i-\alpha}]$, $i\in\mathbb{N}_n$, $\mathrm{I}_i^{**}=[x_{i-\alpha},x_{i+\alpha}]$, $i\in\mathbb{N}_{n-1}$, $\mathrm{I}_n^*=[x_{n-\alpha},x_n]$, 其中, $x_{i-\alpha}=x_i-\alpha h_i$, $x_{j+\alpha}=x_j+\alpha h_{j+1}$, $j\in\{i-1,i\}$. 所有的这些小区间 I_0^*, I_i^*, I_i^{**}, I_n^*, 我们称之为控制体积, 构成了 $\mathcal{T}_n$ 的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*$, 即 $\mathcal{T}_n^*:=\{\mathrm{I}_0^*,\mathrm{I}_i^*,i\in\mathbb{N}_n,\mathrm{I}_i^{**},i\in\mathbb{N}_{n-1},\mathrm{I}_n^*\}$. 易见对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*$ 与参数 α 有关, 因此可记作 $\mathcal{T}_n^*=\mathcal{T}_n^*(\alpha)$.

4. 检验函数空间 $V_{\mathcal{T}_n^*}$. 记 $L_0^2(\mathrm{I}):=\{u:u\in L^2(\mathrm{I}),u(a)=0\}$. 令在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 上关于节点 x_{i-1}, $x_{i-\frac12}$, x_i 处的控制体积的分片特征函数分别为 $\chi_{i.1}(x)$, $\chi_{i,12}(x)$, $\chi_{i,2}(x)$. 取 $V_{\mathcal{T}_n^*}:=\mathrm{span}\{\chi_{i,1}(x),\chi_{i,12}(x),\chi_{i,2}(x),i\in\mathbb{N}_n\}\cap L_0^2(\mathrm{I})$, 即检验函数空间 $V_{\mathcal{T}_n^*}$ 为对应于对偶剖分 $\mathcal{T}_h^*(\alpha)$ 的分片常数函数空间. 易见检验函数空间可记作 $V_{\mathcal{T}_n^*}=V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$. 则对任意的 $v_h\in V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$ 可表示为 $v_h(x)=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{v}_{i-\frac12}\mathbf{X}_i(x)^T$, 其中 $\mathbf{v}_i:=(v_{i-\frac12},v_i,v_{i+\frac12})$, $\mathbf{X}_i(x):=\{\chi_{i,1}(x),\chi_{i,12}(x),\chi_{i,2}(x)\}$.

5. 线性映射 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}$. 设 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}:U_{\mathcal{T}_n}\to V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$ 为从 $U_{\mathcal{T}_n}$ 到 $V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$ 的一个映射, 在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 的两端点 x_{i-1}, x_i 处, 对任意的 $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 满足

$$\Pi_{\mathcal{T}_n^*}u_h(x_{i-1})=u_h(x_{i-1})\text{ 和 }\Pi_{\mathcal{T}_n^*}u_h(x_i)=u_h(x_i),\ i\in\mathbb{N}_n,\tag{2.3}$$

在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 的中点 $x_{i-\frac12}$ 处, 对任意的 $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 满足

$$\Pi_{\mathcal{T}_n^*}u_h(x_{i-\frac12})=b_1(u_h(x_{i-1})+u_h(x_i))+b_2u_h(x_{i-\frac12}),\ i\in\mathbb{N}_n,\tag{2.4}$$

这里

$$b_1=\frac{6\alpha-1}{6(2\alpha-1)},\ \ b_2=-\frac{2}{3(2\alpha-1)},\ \ \alpha\in(0,\frac12).\tag{2.5}$$

易证对任意的 $\alpha\in(0,\frac12)$, 映射 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}$ 为从 $U_{\mathcal{T}_n}$ 到 $V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$ 的一个线性可逆映射. 特别地, 取 $\alpha=\frac16$ 时, 映射 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}$ 即为文献 [27] 首次引入的一对一的简单映射.

6. 数值方程. 利用从 $U_{\mathcal{T}_n}$ 到 $V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$ 上的可逆线性映射 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}:U_{\mathcal{T}_n}\to V_{\mathcal{T}_n^*}(\alpha)$, 建立如下求解问题 (2.1) 的数值方法: 求 $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 满足

$$a_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)=\left(f,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h\right),\quad\forall v_h\in U_{\mathcal{T}_n},\tag{2.6}$$

这里

$$\begin{aligned}a_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)=&\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p(x_{i-1+\alpha})u_h'(x_{i-1+\alpha})\left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-1+\alpha}^+)-\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-1+\alpha}^-)\right]\\&+\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p(x_{i-\alpha})u_h'(x_{i-\alpha})\left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-\alpha}^+)-\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-\alpha}^-)\right],\end{aligned}\tag{2.7}$$

以及 $\left(f,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h\right)=\sum_{I^*\in T_n^*}\int_{I^*}f\cdot\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h$. 可参见文献 [17].

实际上, 在 (2.1) 中取 $u:=u_h\in U_{\mathcal{T}_n}\subset H_E^1(\mathrm{I})$, 将方程 (2.1) 的第一式左端乘以 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h$, $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$, 并在所有的控制体积上积分求和, 再利用分步积分法及 (2.1) 的边界条件即可得 (2.7) 式.

方程 (2.6) 即为本文所分析的求解两点边值问题的 Lagrange 二次新数值方法.

3 等价范数

本节主要引入一个离散等价范数估计的结论. 这些等价范数将对建立离散双线性型的一致有界性和弱估计起到至关重要的作用.

引理 3.1 设 $\mathbf{E} := (e_{ij})_{i\in\mathbb{N}_n, j\in\mathbb{N}_n}$ 为实对称方阵, $\mathbf{1}_n := (1)_{i\in\mathbb{N}_n}$, $\mathbf{0}_n := (0)_{i\in\mathbb{N}_n}$, $\mathbf{w} := (w_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ 均为 n 维常数行向量. 如果

$$\mathbf{1}_n\mathbf{E} = \mathbf{0}_n, \tag{3.1}$$

则二次型 $\mathbf{wEw}^T = 0$ 的充要条件为 $w_i = \bar{w}$, $i \in \mathbb{N}_n$, 其中 $\bar{w} := \frac{\sum_{i\in\mathbb{N}_n} w_i}{n}$.

证 先证必要性. 注意到对任意的 $i \in \mathbb{N}_n$, $w_i = \bar{w} = \frac{\sum_{j\in\mathbb{N}_n} w_j}{n}$, 因此 $\mathbf{w} = \bar{w}\mathbf{1}_n$. 则利用 (3.1) 直接计算二次型可得

$$\mathbf{wEw}^T = (\bar{w}\mathbf{1}_n)\,\mathbf{E}\left(\bar{w}\mathbf{1}_n^T\right) = (\bar{w})^2\mathbf{0}_n\mathbf{1}_n^T = 0,$$

即证必要性.

再证充分性. 注意到 $\mathbf{E}$ 为对称矩阵, 即 $e_{ji} = e_{ij}$, $i < j$, 则二次型可写成

$$\mathbf{wEw}^T = \sum_{i\in\mathbb{N}_n}\sum_{j\in\mathbb{N}_n} e_{ij}w_iw_j = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} e_{ii}w_i^2 + \sum_{i<j}\sum_{j\in\mathbb{N}_n} 2e_{ij}w_iw_j. \tag{3.2}$$

下面采用反证法. 如果存在一个 $i_0 \in \mathbb{N}_n$ 使得 $w_{i_0} \neq \bar{w}$, 则至少存在一个 $j_0 \in \mathbb{N}_n$ 使得 $w_{i_0} \neq w_{j_0} = \bar{w}$. 因此由均值不等式可知 $2w_{i_0}w_{j_0} < w_{i_0}^2 + w_{j_0}^2$, 以及当 $i \neq i_0$, $j \neq j_0$ 时有 $2w_iw_j \leqslant w_i^2 + w_j^2, \forall i < j$. 将以上两式代入二次型 (3.2) 有

$$\mathbf{wEw}^T < \sum_{j\in\mathbb{N}_n}\sum_{i\in\mathbb{N}_n} e_{ij}w_j^2.$$

由 (3.1) 式可知 $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n} e_{ij} = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}_n$, 因此 $\mathbf{wEw}^T < 0$. 这与已知条件 $\mathbf{wEw}^T = 0$ 矛盾. 所以 $w_i = \bar{w}$, $i \in \mathbb{N}_n$. 证毕.

记关于参数 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 的行向量

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = (4\alpha - 3, 4 - 8\alpha, 4\alpha - 1), \ \ \mathbf{a}_2 = (1 - 4\alpha, 8\alpha - 4, 3 - 4\alpha), \\ \mathbf{b}_1 = (b_1 - 1, b_2, b_1), \ \ \mathbf{b}_2 = (-b_1, -b_2, 1 - b_1), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 b_1, b_2 为 (2.5) 式所定义. 令 $\mathbf{F} := \mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2$, $\mathbf{G} := \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2$. 则有如下估计.

引理 3.2 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则对任意的 $u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 存在正常数 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ 使得

$$c_2h^{\frac{3}{2}}|u_h|_2' \leqslant c_1h^{\frac{1}{2}}|u_h|_1 \leqslant \mathbf{K_u} \leqslant C_1h^{\frac{1}{2}}|u_h|_1 \leqslant C_2h^{\frac{3}{2}}|u_h|_2', \tag{3.4}$$

其中

$$|u_h|_2' = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}_n} |u_h|_{2,\mathbf{I}_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{K_u} := \left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{K} \in \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}.$$

证 此处主要利用引理 3.1 来证明结论.

不妨设 $u_h(x)=\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\Phi_i(x)^T\in U_{\mathcal{T}_n}$. 注意到 $|u_h|_1=(\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n}|u_h|^2_{1,\mathbf{I}_i})^{\frac{1}{2}}$, $|u_h|'_2=(\sum_{i\in\mathbb{N}_n}|u_h|^2_{2,\mathbf{I}_i})^{\frac{1}{2}}$, 则直接计算可得

$$|u_h|_1=\left\{\frac{1}{3}\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad |u_h|'_2=\left\{16\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{N}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}}{h_i^3}\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{3.5}$$

其中常数矩阵 $\mathbf{N}=\mathbf{c}^T\mathbf{c}$, $\mathbf{c}=(1,-2,1)$,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{pmatrix}.\tag{3.6}$$

注意到关于参数 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 的矩阵

$$\begin{aligned}\mathbf{G}&=\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}(4\alpha-1)^2+(4\alpha-3)^2&-16(2\alpha-1)^2&2(4\alpha-1)(4\alpha-3)\\-16(2\alpha-1)^2&2(8\alpha-4)^2&-16(2\alpha-1)^2\\2(4\alpha-1)(4\alpha-3)&-16(2\alpha-1)^2&(4\alpha-1)^2+(4\alpha-3)^2\end{pmatrix},\\ \mathbf{F}&=\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}(b_1-1)^2+b_1^2&(b_1-1)b_2+b_1b_2&2b_1(b_1-1)\\(b_1-1)b_2+b_1b_2&2b_2^2&(b_1-1)b_2+b_1b_2\\2b_1(b_1-1)&(b_1-1)b_2+b_1b_2&(b_1-1)^2+b_1^2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ 为 (3.3) 中所定义. 容易验证, 对任意的 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 半正定对称矩阵 $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ 满足 $\mathbf{1}_3\mathbf{F}=\mathbf{1}_3\mathbf{G}=\mathbf{1}_3\mathbf{M}=\mathbf{1}_3\mathbf{N}=\mathbf{0}_3$. 从而由引理 3.1 可知, 对任意的行向量 $\mathbf{u}_m\in\mathbb{R}^3$, 二次型 $\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{F}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}=0,\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{G}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}=0,\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}=0,\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{N}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}=0$ 彼此等价, 即半正定对称矩阵 $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ 具有相同的零空间. 从而存在着与单元尺寸 h 无关的正常数 $c_1>0$, $c_2>0$, $C_1>0$, $C_2>0$ 使得对任意 $\mathbf{K}\in\{\mathbf{F},\mathbf{G}\}$ 有

$$c_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{N}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}\leqslant c_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}\leqslant \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}\leqslant C_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}\leqslant C_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{N}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}.$$

由于 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则由上式易知

$$c_2\left\{h^3\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{N}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}}{h_i^3}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant c_1\left\{h\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant C_1\left\{h\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant C_2\left\{h^3\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{N}\mathbf{u}^T_{i-\frac{1}{2}}}{h_i^3}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

再结合 (3.5) 式可知, 对任意的 $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 和 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 范数估计 (3.4) 式成立. 证毕.

实际上范数估计 (3.4) 的第一个不等式可由有限元的逆估计得到. 而对于最后一个不等式也不难推导. 事实上, 利用文献 [26] 的定理 3.1.2 和 3.1.3 可知, 对任意的 $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$, 在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 上有 $ch^{\frac{1}{2}}|u_h|_{1,I_i}\leqslant|\hat{u}_h|_{1,\hat{I}}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|u_h|_{1,I_i}$, $ch^{\frac{3}{2}}|u_h|_{2,I_i}\leqslant|\hat{u}_h|_{2,\hat{I}}\leqslant Ch^{\frac{3}{2}}|u_h|_{2,I_i}$, 这里

$\hat{\mathrm{I}}$ 表示参考单元, 函数 $\hat{u}_h \in U_{\hat{\mathrm{I}}}$ 为 $u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 经可逆仿射变换后在参考元空间 $U_{\hat{\mathrm{I}}}$ 上所对应的函数 [26]. 易知, 空间 $U_{\hat{\mathrm{I}}}$ 为有穷维线性空间, 且 $|\cdot|_{1,\hat{I}}$ 和 $|\cdot|_{2,\hat{I}}$ 都是 $U_{\hat{\mathrm{I}}}$ 上的范数, 因此等价, 即

$$c|\hat{u}_h|_{2,\hat{I}} \leqslant |\hat{u}_h|_{1,\hat{I}} \leqslant C|\hat{u}_h|_{2,\hat{I}}, \quad \hat{u}_h \in U_{\hat{\mathrm{I}}}.$$

结合以上三式, 有 $ch|u_h|_{2,I_i} \leqslant |u_h|_{1,I_i} \leqslant Ch|u_h|_{2,I_i}$. 从而利用范数 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2'$ 的定义, 可知范数估计 (3.4) 的最后一个不等式成立.

4 H^1 误差分析

本节主要通过分析双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 的一致强制性和连续性, 建立数值方程 (2.6) 对任意二次对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 的最优 $H^1(\mathrm{I})$ 模误差估计.

首先考虑双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 的强制性, 为此需要以下几个引理. 注意到 $p(x) \in C^1(\mathrm{I})$, 记 $p(x)$ 在单元 I_i, $i \in \mathbb{N}_n$ 上的均值为 $p_{\mathrm{I}_i} = \frac{1}{\mathrm{meas}(\mathrm{I}_i)} \displaystyle\int_{\mathrm{I}_i} p(x)$. 则当 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分时, 可知存在与网格尺寸 h 无关的正常数 $C > 0$ 满足

$$|p(x) - p_{\mathrm{I}_i}| \leqslant Ch|p|_{1,\infty}, \ \forall x \in \mathrm{I}. \tag{4.1}$$

对任意的 u_h, $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 记

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) = &\sum_{i\in\mathbb{N}_n} p_{\mathrm{I}_i} u_h'(x_{i-1+\alpha}) \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-1+\alpha}^+) - \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-1+\alpha}^-)\right] \\ &+ \sum_{i\in\mathbb{N}_n} p_{\mathrm{I}_i} u_h'(x_{i-\alpha}) \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-\alpha}^+) - \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-\alpha}^-)\right],\end{aligned}$$

及 $\bar{a}(u_h, v_h) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n} p_{\mathrm{I}_i} \left(u_h', v_h'\right)_{\mathrm{I}_i}$. 则有如下特殊结论.

引理 4.1 对任意的 u_h, $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 有

$$\bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) = \bar{a}(u_h, v_h). \tag{4.2}$$

证 此处主要利用单元化技巧证明结论. 对任意的 $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 可设 $v_h(x) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n} \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \Phi_i(x)^T$, 从而有

$$\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left(v_{i-1}\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\varphi_{i,1} + v_{i-\frac{1}{2}}\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\varphi_{i,12} + v_i\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\varphi_{i,2}\right) \in V_{\mathcal{T}_*^h}(\alpha), \ \alpha \in (0, \tfrac{1}{2}) \ . \tag{4.3}$$

由映射 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}$ 的定义 (2.3) 和 (2.4) 可知, 在单元 I_i, $i \in \mathbb{N}_n$ 上 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\varphi_{i,1} = \chi_{i,1} + b_1\chi_{i,12}$, $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\varphi_{i,12} = b_2\chi_{i,12}$, $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\varphi_{i,2} = b_1\chi_{i,12} + \chi_{i,2}$. 将这些等式代入 (4.3) 式, 可得 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{B} \mathbf{X}_i^T$, 其中 $\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{X}_i$ 为上一节所定义的记号,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

注意到 $\chi_{i,1}$, $\chi_{i,12}$, $\chi_{i,2}$ 分别为节点 x_{i-1}, $x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i 处的控制体积的分片特征函数, 因此有

$$\begin{aligned}\left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-1+\alpha}^+)-\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-1+\alpha}^-)\right]&=\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{B}(0,1,0)^T-\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{B}(1,0,0)^T=\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_1^T,\\ \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-\alpha}^+)-\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-\alpha}^-)\right]&=\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{B}(0,0,1)^T-\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{B}(0,1,0)^T=\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_2^T.\end{aligned}\tag{4.5}$$

此处 $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ 为 (3.3) 式所定义. 同理可设 $u_h(x)=\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\Phi_i(x)^T$, 则在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 上有

$$\begin{aligned}u_h|_{\mathrm{I}_i}&=u_{i-1}\varphi_{i,1}+u_{i-\frac{1}{2}}\varphi_{i,12}+u_i\varphi_{i,2},\\ u_h'|_{\mathrm{I}_i}&=u_{i-1}\varphi_{i,1}'+u_{i-\frac{1}{2}}\varphi_{i,12}'+u_i\varphi_{i,2}'=u_{i-1}\frac{4\xi-3}{h_i}+u_{i-\frac{1}{2}}\frac{4-8\xi}{h_i}+u_i\frac{4\xi-1}{h_i},\end{aligned}$$

其中 $\xi=\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$. 注意到 $x_{i-\alpha}=x_i-\alpha h_i$, $i\in\mathbb{N}_n$, $x_{j+\alpha}=x_j+\alpha h_{j+1}$, $j\in\{i-1,i\}$, $i\in\mathbb{N}_{n-1}$, 则

$$u_h'(x_{i-1+\alpha})=\frac{1}{h_i}\mathbf{a}_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T,\quad u_h'(x_{i-\alpha})=\frac{1}{h_i}\mathbf{a}_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T.\tag{4.6}$$

此处 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ 见 (3.3) 式所定义.

因此由 $\bar{a}_{\mathcal{T}}(\cdot,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 的定义及 (4.5) 和 (4.6) 直接计算可知

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)&=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p_{\mathrm{I}_i}u_h'(x_{i-1+\alpha})\left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-1+\alpha}^+)-\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-1+\alpha}^-)\right]\\ &\quad+\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p_{\mathrm{I}_i}u_h'(x_{i-\alpha})\left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-\alpha}^+)-\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h(x_{i-\alpha}^-)\right]\\ &=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p_{\mathrm{I}_i}\frac{1}{h_i}\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}(\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_2)\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\\ &=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p_{\mathrm{I}_i}\frac{1}{h_i}\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T,\end{aligned}\tag{4.7}$$

其中矩阵 $\mathbf{B}$ 为 (4.4) 所定义, 矩阵 $\mathbf{C}:=\left(-\mathbf{a}_1^T,(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)^T,\mathbf{a}_2^T\right)^T$. 注意到矩阵 $\mathbf{B}$ 中的元素 $b_1=\frac{6\alpha-1}{6(2\alpha-1)}$, $b_2=-\frac{2}{3(2\alpha-1)}$, 直接计算可知, 对任意的 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 有 $\mathbf{BC}=\frac{1}{3}\mathbf{M}$, 其中 $\mathbf{M}$ 为 (3.6) 所给出. 另一方面, 利用边界条件 $u_0=v_0=0$, 直接计算可知

$$\bar{a}(u_h,v_h)=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p_{\mathrm{I}_i}\left(u_h',v_h'\right)_{\mathrm{I}_i}=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\frac{1}{3}p_{\mathrm{I}_i}\frac{1}{h_i}\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}p_{\mathrm{I}_i}\frac{1}{h_i}\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T.\tag{4.8}$$

因此结合 (4.7), (4.8) 即得结论.

此引理说明, 对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 数值方程 (2.6) 双线性型 $\bar{a}_{\mathcal{T}}(\cdot,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 与对应的有限元法双线性型 $\bar{a}(\cdot,\cdot)$ 等价. 从而可知, 对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 数值方程 (2.6) 双线性型 $\bar{a}_{\mathcal{T}}(\cdot,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 具有一致强制性.

特别地, 当 $\alpha=\frac{1}{6}$ 时, 数值方程 (2.6) 即为所对应的 Lagrange 二次有限体积法 [17, 27]. 因此由引理 4.1 可知, 当对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$ 取 $\alpha=\frac{1}{6}$ 时, Lagrange 二次有限体积法的双线性型 $\bar{a}_{\mathcal{T}}(\cdot,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 与对应的有限元法双线性型等价, 从而立得其强制性.

下面给出数值方程 (2.6) 双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 与 $\bar{a}_{\mathcal{T}}(\cdot,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 之间的误差关系.

引理 4.2 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则对任意的 $u_h,\, v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 存在正常数 $C > 0$ 满足

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant Ch|u_h|_1|v_h|_1. \tag{4.9}$$

证 由双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$, $\bar{a}_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\cdot)$ 的定义可知, 对任意的 $u_h,\, v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$

$$\begin{aligned}
&a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h)\\
=&\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left[p(x_{i-1+\alpha}) - p_{I_i}\right] u_h'(x_{i-1+\alpha}) \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-1+\alpha}^+) - \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-1+\alpha}^-)\right]\\
&+\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left[p(x_{i-\alpha}) - p_{I_i}\right] u_h'(x_{i-\alpha}) \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-\alpha}^+) - \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-\alpha}^-)\right].
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 注意到 $p(x) \in C^1(\mathrm{I})$ 及估计 (4.1) 式成立, 因此由上式可得

$$\begin{aligned}
a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant& Ch\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left|u_h'(x_{i-1+\alpha}) \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-1+\alpha}^+) - \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-1+\alpha}^-)\right]\right|\\
&+ Ch\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left|u_h'(x_{i-\alpha}) \left[\Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-\alpha}^+) - \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h(x_{i-\alpha}^-)\right]\right|.
\end{aligned}$$

再将 (4.5) 和 (4.6) 式代入上式可知

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant C\sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left(\left|\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right| + \left|\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right|\right). \tag{4.10}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left|\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right| \leqslant \left(\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_1^T\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\\
\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left|\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right| \leqslant \left(\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_2^T\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\mathbf{a}_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

代入 (4.10) 式, 利用均值不等式进一步放大可得

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant C\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2, \tag{4.11}$$

其中

$$\mathbf{E}_1 := \left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left[\left(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_1^T\right)^2 + \left(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_2^T\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{E}_2 := \left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left[\left(\mathbf{a}_1\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right)^2 + \left(\mathbf{a}_2\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

直接计算可知 $\mathbf{E}_1 = \left\{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n}\left[\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{F}\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}^T\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{E}_2 = \left\{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n}\left[\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}\mathbf{G}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^T\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$, 从而利用等价范数估计 (3.4) 得 $\mathbf{E}_1 \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|v|_1$, $\mathbf{E}_2 \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|u|_1$. 将此两式代入 (4.11), 可知对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 有

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant Ch|u_h|_1|v_h|_1,\ \forall u_h,\, v_h \in U_{\mathcal{T}_n}.$$

证毕.

结合以上各引理, 可得数值方程 (2.6) 双线性型的强制性成立.

命题 4.1 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则对任意的 $u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 存在正整数 n_0 和常数 $c > 0$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) \geqslant c|u_h|_1^2.$$

证 对任意的 $u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 注意到 $a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) = a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) - \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) + \bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h)$. 在 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分的条件下, 将引理 4.1, 引理 4.2 的结果代入上式, 可得

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) \geqslant \bar{a}(u_h, u_h) - Ch|u_h|_1^2.$$

易知对任意的 $u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 有 $\bar{a}(u_h, u_h) \geqslant p_0 |u_h|_1^2$, 从而上式可写成 $a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) \geqslant (p_0 - Ch)|u_h|_1^2$. 注意到 $h = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{meas}(\mathrm{I})$, 取 $n_0 = [\mathrm{meas}(\mathrm{I})\frac{C}{p_0}] + 1$, 则当 $n > n_0$ 时, $p_0 - Ch > 0$. 从而存在一个正常数 $c > 0$ 使得

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} u_h) \geqslant c|u_h|_1^2.$$

证毕.

下面考虑数值方程 (2.6) 双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} \cdot)$ 的一致连续性. 为此需要如下引理. 令 $\Pi_h u$ 为从 $u \in H_E^1(\mathrm{I})$ 到试验函数空间 $U_{\mathcal{T}_n}$ 上的分片 Lagrange 二次插值函数.

引理 4.3 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则对任意的 $u \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^2(\mathrm{I})$, $u_h, v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_*^h(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 存在着正常数 $C > 0$ 满足

$$a_{\mathcal{T}}(u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant C|u_h|_1 |v_h|_1, \tag{4.12}$$

$$a_{\mathcal{T}}(u - \Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant Ch\,|u|_2\,|v_h|_1. \tag{4.13}$$

证 先证估计 (4.13) 式. 对任意的 $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 不妨设 $v_h(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \Phi_i(x)^T$. 注意到 $p(x) \in C^1(\mathrm{I})$ 且 $p_1 \geqslant p(x) \geqslant p_0 > 0$, 则由双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} \cdot)$ 的定义及 (4.5) 可知, 对任意的 $u \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^2(\mathrm{I})$, $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 有

$$\begin{aligned} &a_{\mathcal{T}}(u - \Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \\ \leqslant\ & C \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\left| \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_1^T (u - \Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha}) \right| + \left| \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_2^T (u - \Pi_h u)'(x_{i-\alpha}) \right| \right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

对上式右端利用 Cauchy-Schwartz 不等式及均值不等式可得

$$a_{\mathcal{T}}(u - \Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant C\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_3, \tag{4.15}$$

其中 $\mathbf{E}_1$ 见 (4.11) 式定义, $\mathbf{E}_3 = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \left[\left((u - \Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})\right)^2 + \left((u - \Pi_h u)'(x_{i-\alpha})\right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$.

下面证明对任意的 $u \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^2(\mathrm{I})$ 及对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 均有

$$\mathbf{E}_3 \leqslant Ch^{\frac{1}{2}} |u|_2. \tag{4.16}$$

不妨证明在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 上有如下估计成立

$$|(u-\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})|\leqslant Ch_i^{\frac{1}{2}}|u|_{2,\mathrm{I}_i},\quad |(u-\Pi_h u)'(x_{i-\alpha})|\leqslant Ch_i^{\frac{1}{2}}|u|_{2,\mathrm{I}_i}. \tag{4.17}$$

下面证明不等式 (4.17) 的第一式. 事实上, 在单元 I_i, $i\in\mathbb{N}_n$ 上, 由分片二次插值函数的定义可知

$$(\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})=\frac{1}{h_i}\mathbf{a}_1\left(u(x_{i-1}),u(x_{i-\frac{1}{2}}),u(x_i)\right)^T. \tag{4.18}$$

利用带积分型余项的 Taylor 公式, 有

$$u(x)=u(x_{i-1+\alpha})+(x-x_{i-1+\alpha})u'(x_{i-1+\alpha})+\int_{x_{i-1+\alpha}}^{x}(x-t)u''(t)dt.$$

在上式中分别取 $x=x_{i-1}$, $x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i 代入 (4.18) 式的右端项, 整理可得

$$\begin{aligned}&(u-\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})\\ =&-\frac{1}{h_i}(3-4\alpha)\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1+\alpha}}(x_{i-1}-t)u''(t)dt-\frac{1}{h_i}(4-8\alpha)\int_{x_{i-1+\alpha}}^{x_{i-\frac{1}{2}}}(x_{i-\frac{1}{2}}-t)u''(t)dt\\ &-\frac{1}{h_i}(4\alpha-1)\int_{x_{i-1+\alpha}}^{x_i}(x_i-t)u''(t)dt.\end{aligned} \tag{4.19}$$

下面考虑上式右端的第一项估计. 注意到 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 为常数, 因此采用 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h_i}(3-4\alpha)\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1+\alpha}}(x_{i-1}-t)u''(t)dt&\leqslant\frac{C}{h_i}\left(\int_{x_i}^{x_{i-1}}(x_i-t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x_i}^{x_{i-1}}(u'')^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant Ch_i^{\frac{1}{2}}|u|_{2,I_i}.\end{aligned}$$

同理处理另外两项的估计, 从而有

$$|(u-\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})|\leqslant Ch_i^{\frac{1}{2}}|u|_{2,I_i},$$

即得 (4.17) 的第一式. 同理可证 (4.17) 的第二式. 因此

$$\mathbf{E}_3=\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left[\left((u-\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})\right)^2+\left((u-\Pi_h u)'(x_{i-\alpha})\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|u|_2,$$

即 (4.16) 式成立. 由等价范数估计 (3.4) 知 $\mathbf{E}_1\leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|v_h|_1$ 成立. 则将 (4.16) 代入 (4.15) 即知 (4.13) 式对任意的 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^2(\mathrm{I})$, $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 均成立.

类似引理 4.2 的证明, 易知 (4.12) 成立. 证毕.

利用如上引理 4.3, 可得如下估计.

命题 4.2 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则对任意的 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^2(\mathrm{I})$, $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 存在正常数 $C>0$ 满足

$$a_{\mathcal{T}}(u,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)\leqslant C(|u|_1+h\,|u|_2)|v_h|_1. \tag{4.20}$$

证 对任意的 $u \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^2(\mathrm{I})$, $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 有 $a_{\mathcal{T}}(u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) = a_{\mathcal{T}}(u - \Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) + a_{\mathcal{T}}(\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h)$. 注意到 $\Pi_h u \in U_{\mathcal{T}_n}$, $v_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 因此由引理 4.3 可知

$$a_{\mathcal{T}}(\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant C|\Pi_h u|_1 |v_h|_1 \leqslant C|u|_1 |v_h|_1, \quad a_{\mathcal{T}}(u - \Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v_h) \leqslant Ch|u|_2 |v_h|_1.$$

合并以上各式即得 (4.20). 证毕.

此命题说明, 对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 数值方程 (2.6) 的双线性型 $a_{\mathcal{T}}(\cdot, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} \cdot)$ 满足一致连续性.

因此, 利用命题 4.1 的强制性与命题 4.2 的连续性结果即得数值方程 (2.6) 的最优 $H^1(\mathrm{I})$ 模误差估计.

定理 4.1 设 $u \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^3(\mathrm{I})$ 为方程 (2.1) 的解, $u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$ 为数值方程 (2.6) 对应于对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 的解. 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则存在正整数 n_0 和常数 $C > 0$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$|u - u_h|_1 \leqslant Ch^2 |u|_3. \tag{4.21}$$

证 注意到 $\Pi_h u - u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, 因此由命题 4.1 可知, 当 $n > n_0$ 时有 $|\Pi_h u - u_h|_1^2 \leqslant Ca_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u - u_h), \Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h u - u_h)\right)$. 由方程 (2.1) 易知, 对任意的 $v \in U_{\mathcal{T}_n}$ 有 $a_{\mathcal{T}}\left(u - u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*} v\right) = 0$. 则由以上两式可知

$$\begin{aligned} |\Pi_h u - u_h|_1^2 &\leqslant Ca_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u - u + u - u_h,\ \Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h u - u_h)\right) \\ &= Ca_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u - u,\ \Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h u - u_h)\right). \end{aligned} \tag{4.22}$$

注意到 $\Pi_h u - u \in H_0^1(\mathrm{I}) \cap H^3(\mathrm{I})$, 则由命题 4.2 可知上式的右端满足如下估计,

$$a_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u - u,\ \Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h u - u_h)\right) \leqslant C\left(|\Pi_h u - u|_1 + h\,|\Pi_h u - u|_2\right)|\Pi_h u - u_h|_1,$$

从而综合以上两式可得

$$|\Pi_h u - u_h|_1 \leqslant C|\Pi_h u - u|_1 + h\,|\Pi_h u - u|_2.$$

最后, 利用三角不等式及插值估计, 即得

$$|u - u_h|_1 \leqslant |u - \Pi_h u|_1 + |\Pi_h u - u_h|_1 \leqslant Ch^2 |u|_3.$$

证毕.

此定理说明, 对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 方程 (2.6) 的数值解均具有最优 H^1 模误差估计. 注意, 当 $\alpha = \frac{1}{6}$ 时, 此处的 H^1 模估计 (4.21) 即为 Lagrange 二次有限体积法当对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$ 为 $\alpha = \frac{1}{6}$ 时的误差估计.

5 超收敛估计

本节分析数值方法 (2.6) 的超收敛估计. 令 $\alpha_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. 当对偶网格剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$ 取 $\alpha = \alpha_0$ 时, 即取应力佳点 (Gauss 点) 作为对偶单元的剖分节点时, 方程 (2.6) 的数值解具有整体 H^1 模和 L^2 模的超逼近估计, 再对此解作二级插值后处理, 则可得到与对应有限元法结论相一致的整体超收敛估计.

下面首先给出数值方法 (2.6) 的第一型与第二型插值弱估计. 利用等价范数估计 (3.4), 可得如下插值弱估计.

命题 5.1 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分且对偶网格剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$ 满足 $\alpha=\alpha_0$, 则对任意的 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$, $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$, 存在正常数 $C>0$ 满足

$$a_{\mathcal{T}}(u-\Pi_h u,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)\leqslant Ch^3\left|u\right|_4\left|v_h\right|_1. \tag{5.1}$$

另外, 对任意的 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$ 和 $v\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^2(\mathrm{I})$, 存在正常数 $C>0$ 满足

$$a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h v)\right)\leqslant Ch^4\left|u\right|_4\left|\Pi_h v\right|_2'. \tag{5.2}$$

证 先证 (5.1). 对任意的 $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$, 不妨设 $v_h(x)=\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\mathbf{v}_{i-\frac12}\Phi_i(x)^T$. 则由 (4.15) 式可知 $a_{\mathcal{T}}(u-\Pi_h u,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)\leqslant C\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_3$.

下面证明当 $\alpha=\alpha_0$ 时, 对任意的 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$, $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 如下估计成立

$$\mathbf{E}_3\leqslant Ch^{\frac52}\left|u\right|_4. \tag{5.3}$$

事实上, 注意到 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$, 利用带积分型余项的 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}u(x)=&u(x_{i-1+\alpha})+(x-x_{i-1+\alpha})u'(x_{i-1+\alpha})+\frac{(x-x_{i-1+\alpha})^2}{2}u''(x_{i-1+\alpha})\\&+\frac{(x-x_{i-1+\alpha})^3}{6}u^{(3)}(x_{i-1+\alpha})+\int_{x_{i-1+\alpha}}^{x}\frac{(x-t)^3}{6}u^{(4)}(t)dt.\end{aligned}$$

类似于 (4.19) 式的推导, 并注意到 $\alpha=\alpha_0$, 可得

$$\begin{aligned}&(u-\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})\\=&-\frac{1}{h_i}(3-4\alpha)\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1+\alpha}}\frac{(x_{i-1}-t)^3}{6}u^{(4)}(t)dt-\frac{1}{h_i}(4-8\alpha)\int_{x_{i-1+\alpha}}^{x_{i-\frac12}}\frac{(x_{i-\frac12}-t)^3}{6}u^{(4)}(t)dt\\&-\frac{1}{h_i}(4\alpha-1)\int_{x_{i-1+\alpha}}^{x_i}\frac{(x_i-t)^3}{6}u^{(4)}(t)dt.\end{aligned}$$

采用 Cauchy-Schwartz 不等式估计上式右端的每一项, 易得

$$\left|(u-\Pi_h u)'(x_{i-1+\alpha})\right|\leqslant\frac{C}{h_i}\left(\int_{x_i}^{x_{i-1}}(x_i-t)^6dt\right)^{\frac12}\left(\int_{x_i}^{x_{i-1}}(u^{(4)})^2(t)dt\right)^{\frac12}\leqslant Ch_i^{\frac52}|u|_{4,I_i}.$$

同理可证 $|(u-\Pi_h u)'(x_{i-\alpha})|\leqslant Ch_i^{\frac52}|u|_{4,I_i}$. 从而有 $\mathbf{E}_3\leqslant Ch^{\frac52}|u|_4$, 即为 (5.3) 式.

注意到 $\mathbf{E}_1=\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\left[\mathbf{v}_{i-\frac12}\mathbf{F}\mathbf{v}_{i-\frac12}^T\right]\right\}^{\frac12}$, 由等价范数估计 (3.4) 知 $\mathbf{E}_1\leqslant Ch^{\frac12}|v_h|_1$, 结合 (5.3) 式即得估计 (5.1) 式.

再证 (5.2). 注意到对任意的 $v\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^2(\mathrm{I})$, 有 $\Pi_h v\in U_{\mathcal{T}_n}$. 从而类似上述证明可知, 对任意的 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$ 和 $v\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^2(\mathrm{I})$, 存在正常数 $C>0$ 满足 $a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h v)\right)\leqslant Ch^3\left|u\right|_4\left|\Pi_h v\right|_1$. 结合等价范数估计 (3.4) 的第二式可知

$$a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h v)\right)\leqslant Ch^4\left|u\right|_4\left|\Pi_h v\right|_2',$$

即为估计 (5.2) 式. 证毕.

此命题说明, 在特殊对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha=\alpha_0$ 的情况下, 对应的数值方法 (2.6) 满足第一型与第二型插值弱估计, 其中等价范数在弱估计的证明过程中起到了至关重要的作用.

下面考虑数值方法 (2.6) 的超逼近估计, 为此需要如下引理.

引理 5.1 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则对任意的 $u_h, v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 和对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 存在正常数 $C>0$ 使得

$$a(u_h,v_h)-a_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)\leqslant Ch|u_h|_1|v_h|_1. \tag{5.4}$$

证 对任意的 u_h, $v_h\in U_{\mathcal{T}_n}$, (5.4) 式左端可写成

$$\begin{aligned}&a(u_h,v_h)-a_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)\\=&a(u_h,v_h)-\bar{a}(u_h,v_h)+\bar{a}(u_h,v_h)-a_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)+\bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)-\bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h).\end{aligned} \tag{5.5}$$

由引理 4.2 可知, 对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, 有

$$-a_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)+\bar{a}_{\mathcal{T}}(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h)\leqslant Ch|u_h|_1|v_h|_1,$$

同理可证

$$a(u_h,v_h)-\bar{a}(u_h,v_h)\leqslant Ch|u_h|_1|v_h|_1.$$

又由引理 4.1 知, 对任意的对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$, $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 有 $\bar{a}\,(u_h,v_h)=\bar{a}_{\mathcal{T}}\left(u_h,\Pi_{\mathcal{T}_n^*}v_h\right)$. 从而将以上各式代入 (5.5) 式可得 (5.4) 式.

从而利用上述插值弱估计 (5.1) 和 (5.2) 及引理 5.1, 可得数值方法 (2.6) 关于 H^1 模和 L^2 模的整体超逼近性质.

定理 5.2 设 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$ 为方程 (2.1) 的解, $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 为数值方法 (2.6) 对应于对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 的解. 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则存在正整数 n_0 和常数 $C>0$, 当 $n>n_0$ 时, 满足

$$|\Pi_h(u-u_h)|_1\leqslant Ch^3|u|_4, \tag{5.6}$$

$$\|\Pi_h(u-u_h)\|_0\leqslant Ch^4|u|_4. \tag{5.7}$$

证 注意到 $\Pi_h(u-u_h)=\Pi_hu-u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$, 因此当 $n>n_0$ 时 (4.22) 式成立, 即

$$|\Pi_h(u-u_h)|_1^2\leqslant Ca_{\mathcal{T}}\left(\Pi_hu-u,\ \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h(u-u_h)\right).$$

注意到 $\alpha=\alpha_0$, 则利用命题 5.1 中的 (5.1) 式可知上式的右端满足如下估计,

$$a_{\mathcal{T}}\left(\Pi_hu-u,\ \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h(u-u_h)\right)\leqslant Ch^3|u|_4|\Pi_h(u-u_h)|_1,$$

从而 $|\Pi_h(u-u_h)|_1^2\leqslant Ch^3|u|_4|\Pi_h(u-u_h)|_1$, 即证 (5.6) 式.

下面证明 (5.7) 式. 考虑如下辅助问题: 求 $w\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^2(\mathrm{I})$ 满足

$$a(v,w)=(v,\Pi_h(u-u_h)),\ \ v\in H_E^1(\mathrm{I}), \tag{5.8}$$

且其唯一解满足正则性估计

$$\|w\|_2 \leqslant C\|\Pi_h(u-u_h)\|_0. \tag{5.9}$$

设 $\Pi_h^1 w$ 为从 $w \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^2(\mathrm{I})$ 到试验函数空间 $U_{\mathcal{T}_n}$ 上的分片 Lagrange 线性插值函数. 则在 (5.8) 中取 $v = \Pi_h(u-u_h) \in U_{\mathcal{T}_n} \subset H_E^1(\mathrm{I})$, 有

$$\begin{aligned} \|\Pi_h(u-u_h)\|_0^2 &= a\left(\Pi_h(u-u_h), w\right) \\ &= a\left(\Pi_h(u-u_h), w-\Pi_h^1 w\right) + a\left(\Pi_h(u-u_h), \Pi_h^1 w\right). \end{aligned}$$

注意到 $a_{\mathcal{T}}\left(u-u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) = 0$, 即 $a_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u-u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) + a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) = 0$. 则上式可写成

$$\begin{aligned} \|\Pi_h(u-u_h)\|_0^2 =& a\left(\Pi_h(u-u_h), w-\Pi_h^1 w\right) + a\left(\Pi_h u-u_h, \Pi_h^1 w\right) \\ &- a_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u-u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) - a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

下面依次估计 (5.10) 式的右端项. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式及插值估计, 易知 (5.10) 式右端第一项满足

$$a\left(\Pi_h(u-u_h), w-\Pi_h^1 w\right) \leqslant C\left|w-\Pi_h^1 w\right|_1 |\Pi_h(u-u_h)|_1 \leqslant Ch|\Pi_h(u-u_h)|_1 \|w\|_2.$$

注意到 $\Pi_h u - u_h \in U_{\mathcal{T}_n}$, $\Pi_h^1 w \in U_{\mathcal{T}_n}$, 则由引理 5.1 的 (5.4) 式可知,

$$a\left(\Pi_h u-u_h, \Pi_h^1 w\right) - a_{\mathcal{T}}\left(\Pi_h u-u_h, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) \leqslant Ch|\Pi_h u-u_h|_1 |\Pi_h^1 w|_1 \leqslant Ch|\Pi_h u-u_h|_1 \|w\|_2.$$

又因为 $\alpha = \alpha_0$, $w \in H_E^1(\mathrm{I}) \cap H^2(\mathrm{I})$, 则利用命题 5.1 中的 (5.2) 式可知, 等式 (5.10) 右端最后一项满足如下估计

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) &\leqslant a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}(\Pi_h^1 w-\Pi_h w)\right) + a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h w\right) \\ &\leqslant Ch^4 |u|_4 |\Pi_h^1 w-\Pi_h w|_2' + Ch^4 |u|_4 |\Pi_h w|_2' \\ &\leqslant Ch^4 |u|_4 |\Pi_h w|_2'. \end{aligned}$$

类似于文 [28] 第四章第三节引理 1 的证明, 可得 $|\Pi_h w|_2' \leqslant C|w|_2$. 从而由上式可得

$$a_{\mathcal{T}}\left(u-\Pi_h u, \Pi_{\mathcal{T}_n^*}\Pi_h^1 w\right) \leqslant Ch^4 |u|_4 \|w\|_2.$$

综合以上各个估计代入 (5.10), 可得

$$\|\Pi_h(u-u_h)\|_0^2 \leqslant Ch|\Pi_h(u-u_h)|_1 \|w\|_2 + Ch^4 |u|_4 \|w\|_2.$$

注意到当 $\alpha = \alpha_0$ 时 (5.6) 式成立, 因此结合 (5.6) 式, 利用正则估计 (5.9), 上式可写成

$$\|\Pi_h(u-u_h)\|_0^2 \leqslant Ch^4|u|_4\|w\|_2 \leqslant Ch^4|u|_4 \|\Pi_h(u-u_h)\|_0.$$

化简即得 (5.7) 式. 证毕.

此定理说明, 当取特殊对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 时, $\alpha_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$, 原方程 (2.1) 真解的二次插值与方程 (2.6) 数值解之间的误差具有整体 H^1 模和 L^2 模超逼近性质.

类似地, 利用本文的证明方法与技巧, 可以得到 Lagrange 二次有限体积法在对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 为 $\alpha_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时的 L^2 模超逼近. 即相当于, 取本文中的映射 $\Pi_{\mathcal{T}_n^*}$ 的参数为 $\alpha=\frac{1}{6}$(参见 (2.3), (2.4), (2.5) 式), 而对偶网格剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$ 中的参数另取为 $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$. 不过此时引理 4.1 结论不再成立, 从而引理 5.1 结论需另证. 数值算例可验证 Lagrange 二次有限体积法的 L^2 模超逼近结论.

注 由文献 [28] 可知, 一维 Lagrange 型二次元的插值应力佳点集在 I 上为 $N_k=\{x_{i-1}+\alpha_0h_i,\ x_i-\alpha_0h_i,\ \ i\in\mathbb{N}_n\}$, 即对于任意的 $x_0\in N_k$, $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$ 有

$$|\overline{\nabla}(u-\Pi_hu)(x_0)|\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}\|u\|_{4,E},$$

其中 E 为含 x_0 点的相邻单元的并, 它的测度为 $O(h)$, 应力佳点集 N_k 中的点的个数为 $\gamma=O(h^{-1})$, 而 $\overline{\nabla}u(x_0)$ 表示在各个含 x_0 点的单元上 $\nabla u(x_0)$ 的值的算术平均. 因此利用定理 5.2, 类似文 [28] 的证明, 可得数值方法 (2.6) 在应力佳点处平均导数的超收敛估计和整体最优 L^2 模误差估计.

命题 5.4 设 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$ 为方程 (2.1) 的解, $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 为数值方法 (2.6) 对应于对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 的解. 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则存在正整数 n_0 和常数 $C>0$, 当 $n>n_0$ 时, 使得

$$\Big(\frac{1}{\gamma}\sum_{x_0\in N_k}\big|\overline{\nabla}(u-u_h)(x_0)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ch^3\|u\|_4,\quad \|u-u_h\|_0\leqslant Ch^3\|u\|_4.$$

证明略.

本节最后对方程 (2.6) 的数值解进行二级插值处理, 从而利用超逼近结论可得数值方法 (2.6) 解的整体 H^1 模和 L^2 模超收敛估计.

设 $\mathcal{T}_{\frac{n}{2}}$ 是 I 上的一个以 $2h$ 为尺寸的剖分, 则 $\mathcal{T}_n$ 可看作是剖分 $\mathcal{T}_{\frac{n}{2}}$ 经中点加密后所得的剖分, 且 $\mathcal{T}_{\frac{n}{2}}$ 与 $\mathcal{T}_n$ 两个结点集完全相同. 设有限元空间 $U_{\frac{n}{2}}=:\{v\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I}):v|_E\in\mathcal{P}_4(E),E\in\mathcal{T}_{\frac{n}{2}}\}$. 记 $U_{\frac{n}{2}}$ 上的 Lagrange 四次插值算子为 Π_{2h}^4. 则采用类似于文献 [29] 定理 2.3.1 的证明方法可得如下超收敛估计.

定理 5.3 设 $u\in H_E^1(\mathrm{I})\cap H^4(\mathrm{I})$ 为方程 (2.1) 的解, $u_h\in U_{\mathcal{T}_n}$ 为数值方法 (2.6) 对应于对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 的解. 如果 $\mathcal{T}_n$ 为拟一致剖分, 则存在正整数 n_0 和常数 $C>0$, 当 $n>n_0$ 时, 使得 $|u-\Pi_{2h}^4u_h|_1\leqslant Ch^3\|u\|_4$, $\|u-\Pi_{2h}^4u_h\|_0\leqslant Ch^4\|u\|_4$.

证明略.

此定理说明, 当取特殊对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 时, $\alpha_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$, 对应的数值方法 (2.6) 的解被二级插值处理之后具有 H^1 模和 L^2 模超收敛估计, 且其收敛阶与对应的有限元法结果相一致. 此结论对两点边值问题的 Lagrange 二次有限体积法依然成立.

6 算例

本节给出数值算例, 验证数值方法 (2.6) 的有效性及其超逼近, 超收敛估计. 本文中的所有数值计算均是在个人 PC 机上利用 Matlab(R2010b) 软件计算得到. 采用 GMRES 迭代方法求解线性方程组 (2.6), 取其截断误差为 10^{-10}. 表格中的 $N=\frac{1}{h}$, h 为单元长度.

考虑如下两个两点边值问题.

例 6.1 设方程 (2.1) 中的 $p(x)=1$, $a=0$, $b=1$, 其真解为 $u=e^x sin(\pi x)+\pi e^x-\pi,\quad x\in(0,1)$. 显然有 $u(0)=u'(1)=0$.

例 6.2 设方程 (2.1) 中的 $p(x)=e^{-\pi x}$, $a=0$, $b=1$, 其真解为 $u=e^{\pi x}sin(\pi x)+\pi e^{\pi}x,\quad x\in(0,1)$. 显然也有 $u(0)=u'(1)=0$.

表 1 数值方法 (2.6), 例 6.1, $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

N	$\lvert u-u_h\rvert_1$	$Order$	$\lVert\Pi_h u-u_h\rVert_0$	$Order$	$\lVert\Pi_h u-u_h\rVert_1$	$Order$
4	8.02640e-2	-	4.14592e-4	-	5.32098e-3	-
8	2.06660e-2	1.957493	2.57620e-5	4.008374	6.68766e-4	2.992119
16	5.20305e-3	1.989832	1.60757e-6	4.002296	8.37055e-5	2.998107
32	1.30303e-3	1.997486	1.00432e-7	4.000587	1.04666e-5	2.999531
64	3.25899e-4	1.999373	6.27605e-9	4.000219	1.30843e-6	2.999883
128	8.14837e-5	1.999843	3.90959e-10	4.004766	1.63557e-7	2.999971

表 2 数值方法 (2.6), 例 6.1, $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

N	$\lVert u-u_h\rVert_0$	$Order$	$\lVert u-\Pi_{2h}^4 u_h\rVert_0$	$Order$	$\lVert u-\Pi_{2h}^4 u_h\rVert_1$	$Order$
8	3.99663e-4	-	3.10952e-5	-	1.07284e-3	-
16	5.02110e-5	2.992708	1.89730e-6	4.034675	1.27489e-4	3.072983
32	6.28422e-6	2.998199	1.17852e-7	4.008896	1.57213e-5	3.019584
64	7.85772e-7	2.999551	7.35405e-9	4.002295	1.95838e-6	3.004991
128	9.82291e-8	2.999888	4.58286e-10	4.004219	2.44585e-7	3.001254

表 1 和表 2 列出了数值方法 (2.6) 关于例 6.1 的计算结果. 其中, 取参数 $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$. 从表 1 的数值结果不难发现, 数值方法 (2.6) 具有最优阶 H^1 模误差估计和 H^1 模, L^2 模超逼近估计. 而表 2 的数值结果显示, 数值方法 (2.6) 的解经过二级插值处理之后具有 H^1 模, L^2 模超收敛结果. 这些数值结果与本文的理论结果相一致, 且与相对应的有限元法具有相同的收敛阶.

表 3 列出了数值方法 (2.6) 关于例 6.2 的最优阶 H^1 模误差估计和 H^1 模, L^2 模的超逼近估计. 表 4 列出了数值方法 (2.6) 关于例 6.2 的 H^1 模, L^2 模的整体超收敛结果. 其中参数仍取 $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$. 其数据结果再次表明, 本文采用的数值方法 (2.6) 对变系数 $p(x)$ 的两点边值问题是有效的, 且具有最优阶 H^1 模误差估计, H^1 模和 L^2 模的超逼近及超收敛结果.

当参数 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 但 $\alpha\neq\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, 数值试验结果显示, 数值方法 (2.6) 具有最优阶 H^1 模误差估计, 但没有超逼近及超收敛结果. 这仍然说明本文的超逼近及超收敛理论结果的正

确性. 表 5 给出了数值方法 (2.6) 关于例 6.2 当对 $\alpha=\frac{1}{6}$ 时的部分计算结果. 这也是 Lagrange 二次有限体积法在对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha)$ 为 $\alpha=\frac{1}{6}$ 时的数值结果.

对于 Lagrange 二次有限体积法, 当对偶剖分 $\mathcal{T}_n^*(\alpha_0)$ 为 $\alpha_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, 有限体积法具有 H^1 模和 L^2 模的超逼近及超收敛结果. 其关于例 6.1 的数值计算结果, 与表 1 和表 2 中的数据几乎完全一致, 此处略. 从而说明, 本文的结论对有限体积法同样成立.

表 3 数值方法 (2.6), 例 6.2, $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

N	$\lvert u-u_h\rvert_1$	*Order*	$\\|\Pi_h u-u_h\\|_0$	*Order*	$\\|\Pi_h u-u_h\\|_1$	*Order*
4	1.62187e+0	-	3.28276e-3	-	5.62933e-2	-
8	4.07429e-1	1.993042	1.93032e-4	4.087997	7.01979e-3	3.003463
16	1.01948e-1	1.998712	1.19176e-5	4.017672	8.78792e-4	2.997835
32	2.54924e-2	1.999699	7.42771e-7	4.004036	1.09907e-4	2.999241
64	6.37341e-3	1.999926	4.63899e-8	4.001035	1.37403e-5	2.999796
128	1.59337e-3	1.999982	2.89841e-9	4.000476	1.71760e-6	2.999949

表 4 数值方法 (2.6), 例 6.2, $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

N	$\\|u-u_h\\|_0$	*Order*	$\\|u-\Pi_{2h}^4 u_h\\|_0$	*Order*	$\\|u-\Pi_{2h}^4 u_h\\|_1$	*Order*
8	7.86798e-3	-	2.62651e-4	-	1.16978e-2	-
16	9.83483e-4	3.000021	1.57159e-5	4.062851	1.37097e-3	3.092966
32	1.22933e-4	3.000028	9.64183e-7	4.026774	1.66284e-4	3.043471
64	1.53665e-5	3.000008	5.99440e-8	4.007619	2.06046e-5	3.012612
128	1.92081e-6	3.000002	3.74103e-9	4.002110	2.56974e-6	3.003273

表 5 数值方法 (2.6), 例 6.2, $\alpha=\frac{1}{6}$

N	$\lvert u-u_h\rvert_1$	*Order*	$\\|\Pi_h u-u_h\\|_0$	*Order*	$\\|\Pi_h u-u_h\\|_1$	*Order*
4	1.63231e+0	-	3.15357e-2	-	1.80229e-1	-
8	4.08929e-1	1.996993	8.58828e-3	1.876545	3.47342e-2	2.375403
16	1.02261e-1	1.999590	2.19802e-3	1.966162	7.97950e-3	2.121986
32	2.55669e-2	1.999908	5.52761e-4	1.991480	1.95022e-3	2.032659
64	6.39183e-3	1.999978	1.38394e-4	1.997868	4.84757e-4	2.008306
128	1.59796e-3	1.999994	3.46114e-5	1.999467	1.21014e-4	2.002086

7 结论

本文构造了求解两点边值问题的一种新 Lagrange 二次数值方法, 利用等价离散范数证明了该方法的第一型与第二型弱估计, 从而得到该数值方法的整体 H^1 模和 L^2 模超逼近结果, 其收敛阶与对应的有限元法结果相一致. 本文的思想与方法可以扩展至高维高阶的有限体积法情形.

参 考 文 献

[1] Eymard R, Gallouet T, Herbin R. Finite volume methods[J]. Handbook of Numerical Analysis, 2000, 7(4): 713–1018.

[2] Yan Ningning. Superconvergence analysis and a posteriori error estimation in finite element methods[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[3] 朱起定. 有限元高精度后处理理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] Li Ronghua. Generalized difference methods for two point boundary value problems[J]. Acta Sci. Natur. Univ. Jilin, 1982, 1: 26–40.

[5] 吴微, 李荣华. 解一维二阶椭圆和抛物型微分方程的广义差分法 [J]. 数学年刊 A 辑 (中文版), 1984, 5(3): 303–312.

[6] 陈仲英. 两点边值问题的二次广义差分法 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1994, 33(3): 19–24.

[7] 陈仲英. 广义差分法一次元格式的 L^2- 估计 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1994, 33(4): 22–28.

[8] 于长华, 李永海. 解两点边值问题的基于应力佳点的二次有限体积元法 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2009, 47(4): 639–648.

[9] 郭伟利, 王同科. 两点边值问题基于应力佳点的一类二次有限体积元方法 [J]. 应用数学, 2008, 21(4): 748–756.

[10] 于长华, 王晓玲, 李永海. 解两点边值问题的一类修改的三次有限体积元法 [J]. 计算数学, 2010, 32(4): 385–398.

[11] 王同科. 一维二阶椭圆和抛物型微分方程的高精度有限体积元方法 [J]. 数值计算与计算机应用, 2002, 23(4): 264–274.

[12] 李莎莎, 左平. 一维 Lagrange 四次元有限体积法的超收敛性 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2012, 50(3): 397–403.

[13] 王帅, 左平, 李永海. 两点边值问题的五次元有限体积法 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2010, 48(4): 521–528.

[14] 田万福, 吕俊良, 王彦鹤, 李永海. 两点边值问题的 Hermite 五次元有限体积法 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2009, 47(2): 165–173.

[15] 张栏辉, 李永海. 基于 Lobatto-Gauss 结构的五次元有限体积法 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2014, 52(3): 397–407.

[16] Xu Jinchao, Zou Qingsong. Analysis of linear and quadratic simplicial finite volume methods for elliptic equations[J]. Numerische Mathematik, 2009, 111(3): 469–492.

[17] Li Ronghua, Chen Zhongying, Wu Wei. Generalized difference methods for differential equations: numerical analysis of finite volume methods[M]. New York: CRC Press, 2000.

[18] Gao Guanghua, Wang Tongke. Cubic superconvergent finite volume element method for one-dimensional elliptic and parabolic equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233(9): 2285–2301.

[19] Cao Waixiang, Zhang Zhimin, Zou Qingsong. Superconvergence of any order finite volume schemes for 1D general elliptic equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 56(3): 566–590.

[20] Cao Waixiang, Zhang Zhimin, Zou Qingsong. Finite volume superconvergence approximation for one-dimesional singularly perturbed problems[J]. Journal of Computational Mathematics, 2013, 31(5): 488–508.

[21] Cao Waixiang, Zhang Zhimin, Zou Qingsong. Analysis of a p-version finite volume method for 1D elliptic problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 265: 17–32.

[22] Chen Zhongying, Wu Junfeng, Xu Yuesheng. Higher-order finite volume methods for elliptic boundary value problems[J]. Advances in Computational Mathematics, 2012, 37(2): 191–253.

[23] Chen Zhongying, Xu Yuesheng, Zhang Yueyue. A construction of higher-order finite volume methods[J]. Mathematics of Computation, 2015, 84(292): 599–628 .

[24] Zou Qingsong. An unconditionally stable quadratic finite volume scheme over triangular meshes for elliptic equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 70(1): 112–124.

[25] Brenner B, Ridgwayscott L. The mathematical theory of finite element methods[M]. New York: Springer Press, 2008.

[26] Philippe G, Ciarlet. The finite element method for elliptic problems[M]. New York: North-Holland Press, 1978.

[27] 李荣华, 祝丕琦. 二阶椭圆偏微分方程的广义差分法 (I)– 三角网情形 [J]. 高等学校计算数学学报, 1982, (2): 140–152.

[28] 朱起定, 林群. 有限元超收敛理论 [M]. 长沙: 湖南科技出版社, 1989.

[29] 林群, 朱起定. 有限元的预处理与后处理理论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1994.

A NEW METHOD FOR SOLVING TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS

ZHANG Jie-hua[1] , ZHOU Shi-ran[2]

(*1.School of Science, Kaili University, Guizhou 556011, China*)

(*2.School of Education, Kaili University, Guizhou 556011, China*)

Abstract: This paper studies a new numerical method for two-point boundary value problems. By using a new method different from the Lagrange quadratic finite volume method, the superconvergence estimates of the new method are obtained, and thus the superconvergence results of the Lagrange quadratic finite volume method are extended.

Keywords: finite volume method; weak estimates; super-convergence

2010 MR Subject Classification: 65N08; 65N12; 65N30