Vol. 41 (2021)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

W(2) 到 Kac 模的权导子空间

刘舒畅, 王淑娟
(黑龙江大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 本文研究了 Witt 型模李超代数 $W(2)$ 到 Kac 模 $K(\lambda)$ 的权导子空间问题. 利用分类讨论及线性方程组求解的方法, 获得了 $W(2)$ 到 $K(\lambda)$ 的权导子空间要么是零维要么是一维的结果, 推广了李代数到其模的权导子空间的相应结果.

关键词: Witt 型模李超代数; Kac 模; 权导子
MR(2010) **主题分类号**: 17B40; 17B50 **中图分类号**: O152.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2021)02-00151-08

1 引言

本文约定基域 $\mathbb{F}$ 的特征 $p>2$. 令 $\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$. 域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V, 连同它的值和分解 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 称为一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间. 若 $v\in V_\theta$, 其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$, 则称 v 为 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素, 用 $|v|$ 表示 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素的次数. 为方便, 如果符号 $|v|$ 出现, 那么约定 v 是 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素. 若 V 的一组基为 $v_1,\dots,v_n$, 则可记为 $V:=\langle v_1,\dots,v_n\rangle$. 用 $\mathrm{hg}(V)$ 表示 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 V 的所有 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素的集合. 设 L 是李超代数, M 为 L- 模. 称 $\mathbb{Z}_2$- 齐次线性映射 $\varphi:L\longrightarrow M$ 为次数为 $|\varphi|$ 的齐次导子, 如果

$$\varphi([x,y])=(-1)^{|\varphi||x|}x\varphi(y)-(-1)^{|y|(|\varphi|+|x|)}y\varphi(x),\ \text{其中}\ x,y\in L.$$

令 $\mathrm{Der}(L,M)$ 为 L 到 M 的所有 $\mathbb{Z}_2$- 齐次导子张成的向量空间, 称该空间中的元素为导子. 对于 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素 $m\in M$, 令

$$\mathfrak{D}_m:L\longrightarrow M,\quad x\longmapsto(-1)^{|x||m|}xm,\ \text{其中}\ x\in\mathrm{hg}(L).$$

那么 $\mathfrak{D}_m$ 是次数为 $|m|$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 齐次导子. 令 $\mathrm{Ider}(L,M)$ 为由 $\{\mathfrak{D}_m\mid m\in\mathrm{hg}(M)\}$ 张成的向量空间, 称该空间中的元素为内导子. 令 $\mathfrak{h}$ 为 $L_{\bar{0}}$ 的 Cartan 子代数. 设 L 与 M 都有关于 $\mathfrak{h}$ 的权空间分解: $L=\oplus_{\gamma\in\mathfrak{h}^*}L_\gamma,\quad M=\oplus_{\gamma\in\mathfrak{h}^*}M_\gamma$. 令

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L,M)_{(0)}=\{\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L,M)\mid\phi(L_\alpha)\subset M_\alpha,\forall\alpha\in\mathfrak{h}^*\},$$
$$\mathrm{Der}(L,M)_{(0)}=\{\phi\in\mathrm{Der}(L,M)\mid\phi(L_\alpha)\subset M_\alpha,\forall\alpha\in\mathfrak{h}^*\}.$$

称 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L,M)_{(0)}$ 与 $\mathrm{Der}(L,M)_{(0)}$ 中元素分别为关于 $\mathfrak{h}$ 的权映射与权导子. 那么

$$\mathrm{Der}(L,M)=\mathrm{Der}(L,M)_{(0)}+\mathrm{Ider}(L,M),\tag{1.1}$$

*收稿日期: 2020-07-16 **接收日期**: 2020-09-18
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11701158); 黑龙江省自然科学基金资助 (YQ2020A005).
作者简介: 刘舒畅 (1998–), 女, 山东济南, 本科生, 主要研究方向: 李超代数的表示与上同调.
通讯作者: 王淑娟

这个结论可参见文献 [1, Lemma 3.2] 或 [2, Lemma 2.1]. 值得注意的是, L 到 M 的一阶上同调

$$\mathrm{H}^1(L,M)=\mathrm{Der}(L,M)/\mathrm{Ider}(L,M). \tag{1.2}$$

(1.1) 与 (1.2) 得到, 计算一阶上同调可以先计算权导子空间. 本文目的在于决定 Witt 型模李超代数 $W(2)$ 到其 Kac 模 $K(\lambda)$ 的权导子空间, 取得下面主要结论, 其对刻画 $W(2)$ 的一阶上同调具有重要意义.

定理 1 当 $\lambda=0$ 时, $W(2)$ 到 Kac 模 $K(\lambda)$ 的权导子空间是一维的, 否则权导子空间是零维的.

本文研究的 $W(2)$ 属于 Cartan 型模李超代数的范畴, 具体地说, $W(2)$ 是一类 Witt 型模李超代数. 1986 年, 沈光宇老师对这类代数的阶化模做了研究 [4]; 2007 年, 刘文德老师和张永正老师对其导子代数做了研究 [5]; 2010 年, 舒斌老师和张朝文老师对其限制表示做了研究, 并且定义了 Kac 模 [6]. 李超代数的上同调是重要的研究课题, 其定义可追溯到 D. A. Leites 在 1975 年发表的文章 [7]. 2014 年, 孙丽萍老师、刘文德老师和吴勃英老师利用权空间分解的方法, 刻画了在特征大于 2 的代数闭域上, $\mathfrak{sl}(m,n)$ 到 Cartan 型李超代数 W 和 S 的低阶上同调, 并且指出这一计算结果与特征零的情形不同 [8].

2 预备知识

本节简要介绍一下本文所用到的定义, 符号以及一些基本的模作用关系等.

定义 2.1 [3] 设 $\Lambda(n)$ 是由 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 生成的外代数. 定义

$$W(n):=\mathrm{Der}(\Lambda(n))=\left\{\sum f_i\partial_i \mid f_i\in\Lambda(n)\right\},$$

其中 ∂_i 是 $\Lambda(n)$ 的导子, 且满足 $\partial_i(x_j)=\delta_{ij},\forall i,j\in\{1,2,\cdots n\}$, 这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号. 约定 $|\partial_i|=|x_i|=\bar{1},\forall 1\le i\le n$, 且

$$[f\partial_i,g\partial_j]:=f\partial_i(g)\partial_j-(-1)^{|f\partial_i||g\partial_j|}g\partial_j(f)\partial_i,$$

其中 $f\partial_i,g\partial_j\in W(n)$. 那么 $W(n)$ 构成一个限制李超代数, 称之为秩 n 的 Witt 型李超代数.

下文主要研究 $W(2)$ 及其 Kac 模的结构. 取 $W(2)$ 的一组基:

$$\partial_1,\quad \partial_2,\quad x_1\partial_1,\quad x_2\partial_2,\quad x_1\partial_2,\quad x_2\partial_1,\quad x_1x_2\partial_1,\quad x_1x_2\partial_2.$$

设

$$h_1:=x_1\partial_1-x_2\partial_2,\quad h_2:=x_1\partial_1+x_2\partial_2.$$

令 $\mathfrak{h}$ 为 h_1,h_2 张成的子空间, 则 $\mathfrak{h}$ 为 $W(2)_{\bar{0}}$ 的 Cartan 子代数. 用 η_1,η_2 表示 h_1,h_2 的对偶基, 即

$$\eta_i(h_j)=\delta_{ij},\forall i,j=1,2.$$

为方便, 下文用 $\mathfrak{g}$ 表示 $W(2)$. 令 x_i 与 ∂_i 的 $\mathbb{Z}$- 次数分别为 1 与 -1. 那么 $\mathfrak{g}$ 成为 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$. 设 $\Lambda:=\{\lambda=\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2|\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}_p\}$. $\mathfrak{g}_0$(同构于一般线性李代数 $\mathfrak{gl}(2)$) 的所有单模的同构类为 $\{L^0(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$. 令 v_0 为 $L^0(\lambda)$ 的属于权 λ 的最高权向量.

设 $e := x_1\partial_2,\ f := x_2\partial_1$. 归纳定义 $v_{i+1} = fv_i, 0 \le i < \lambda_1$. 本文约定符号 $0 \le i < \lambda_1$ 或者 $0 \le i \le \lambda_1$ 一旦出现, 则 λ_1 表示 $0 \sim p-1$ 的自然数 (与 λ_1 模 p 同余). 那么 $L^0(\lambda)$ 有一组基 $\{v_0, v_1, \ldots, v_{\lambda_1}\}$. 如果 $i \notin \{0, 1, \ldots, \lambda_1\}$, 那么约定 $v_i = 0$. 下面引理给出了 $L^0(\lambda)$ 的模结构.

引理 2.1 [3]

$$h_1 v_i = (\lambda_1 - 2i) v_i, \quad h_2 v_i = \lambda_2 v_i,$$

$$ev_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ i(\lambda_1 - i + 1) v_{i-1}, & 1 \le i \le \lambda_1, \end{cases}$$

$$fv_i = \begin{cases} v_{i+1}, & 0 \le i < \lambda_1, \\ 0, & i = \lambda_1. \end{cases}$$

注意到, 若规定 $\mathfrak{g}_1$ 平凡作用在 $L^0(\lambda)$ 上, 则 $L^0(\lambda)$ 可视为 $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$- 模. 定义 $\mathfrak{g}$ 的 Kac 模

$$K(\lambda) := u(\mathfrak{g}) \otimes_{u(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)} L^0(\lambda),$$

其中 $u(L)$ 表示李超代数 L 的限制包络代数. 那么作为向量空间, $K(\lambda) \cong \Lambda(\mathfrak{g}_{-1}) \otimes_{\mathbb{F}} L^0(\lambda)$. 显然, $K(\lambda)$ 具有基:

$$\{\partial_1 \otimes v_i, \quad \partial_2 \otimes v_i, \quad \partial_1\partial_2 \otimes v_i, \quad 1 \otimes v_i \mid 0 \le i \le \lambda_1\}.$$

设 $f\partial_s \in \mathfrak{g}$. 根据文献 [7], 可得如下等式:

$$f\partial_s(1 \otimes v_i) = f\partial_s \otimes v_i, \tag{2.1}$$

$$f\partial_s(\partial_j \otimes v_i) = [f\partial_s, \partial_j] + (-1)^{|f\partial_s||\partial_j|}\partial_j \cdot (f\partial_s \otimes v_i), (j = 1, 2), \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} f\partial_s(\partial_1\partial_2 \otimes v_i) = {} & [f\partial_s, \partial_1]\partial_2 \otimes v_i + (-1)^{|f\partial_s||\partial_1|}\partial_1[f\partial_s, \partial_2] \otimes v_i \\ & + (-1)^{|f\partial_s||\partial_1| + |f\partial_s||\partial_2|}\partial_1\partial_2 \cdot (f\partial_s \otimes v_i). \end{aligned} \tag{2.3}$$

利用 (2.1) – (2.3) 及引理 2.1, 可以得到 Kac 模 $K(\lambda)$ 的模作用表.

表 1 模作用表

	$\partial_1 \otimes v_i$	$\partial_2 \otimes v_i$	$\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	$1 \otimes v_i$
∂_1	0	$\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	0	$\partial_1 \otimes v_i$
∂_2	$-\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	0	0	$\partial_2 \otimes v_i$
$x_1\partial_1$	$(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2i}{2}$-$1)\partial_1 \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2i}{2})\partial_2 \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2i}{2}$-$1)\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2i}{2})1 \otimes v_i$
$x_2\partial_2$	$(\frac{\lambda_2-\lambda_1+2i}{2})\partial_1 \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_2-\lambda_1+2i}{2}$-$1)\partial_2 \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_2-\lambda_1+2i}{2}$-$1)\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_2-\lambda_1+2i}{2})1 \otimes v_i$
$x_1\partial_2$	$-\partial_2 \otimes v_i + i(\lambda_1 - i + 1)\partial_1 \otimes v_{i-1}$	$i(\lambda_1 - i + 1)\partial_2 \otimes v_{i-1}$	$i(\lambda_1 - i + 1)\partial_1\partial_2 \otimes v_{i-1}$	$i(\lambda_1 - i + 1)1 \otimes v_{i-1}$
$x_2\partial_1$	$\partial_1 \otimes v_{i+1}$	$-\partial_1 \otimes v_i + \partial_2 \otimes v_{i+1}$	$\partial_1\partial_2 \otimes v_{i+1}$	$1 \otimes v_{i+1}$
$x_1x_2\partial_1$	$1 \otimes v_{i+1}$	$-\frac{\lambda_1+\lambda_2-2i}{2} \otimes v_i$	$(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2i}{2} - 1)\partial_1 \otimes v_i + \partial_2 \otimes v_{i+1}$	0
$x_1x_2\partial_2$	$\frac{\lambda_2-\lambda_1+2i}{2}1 \otimes v_i$	$i(\lambda_1 - i + 1)1 \otimes v_{i-1}$	$(\frac{\lambda_2-\lambda_1+2i}{2} - 1)\partial_2 \otimes v_i + i(\lambda_1 - i + 1)\partial_1 \otimes v_{i-1}$	0
h_1	$(\lambda_1 - 2i - 1)\partial_1 \otimes v_i$	$(\lambda_1 - 2i + 1)\partial_2 \otimes v_i$	$(\lambda_1 - 2i)\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	$(\lambda_1 - 2i)1 \otimes v_i$
h_2	$(\lambda_2 - 1)\partial_1 \otimes v_i$	$(\lambda_2 - 1)\partial_2 \otimes v_i$	$(\lambda_2 - 2)\partial_1\partial_2 \otimes v_i$	$\lambda_2 1 \otimes v_i$

3 权导子空间

本节主要是分步骤证明定理 1.

通过计算, 容易得到 $\mathfrak{g}$ 的权空间为:

$$\mathfrak{g}_{-\eta_1+\eta_2}=\langle x_1x_2\partial_1\rangle,\quad \mathfrak{g}_{-\eta_1-\eta_2}=\langle \partial_1\rangle,$$
$$\mathfrak{g}_{\eta_1+\eta_2}=\langle x_1x_2\partial_2\rangle,\quad \mathfrak{g}_{\eta_1-\eta_2}=\langle \partial_2\rangle,$$
$$\mathfrak{g}_0=\langle x_1\partial_1,x_2\partial_2\rangle,\quad \mathfrak{g}_{-2\eta_1}=\langle x_2\partial_1\rangle,\quad \mathfrak{g}_{2\eta_1}=\langle x_1\partial_2\rangle.$$

根据表 1, $K(\lambda)$ 的权空间为:

$$\begin{aligned}&K(\lambda)_{(\lambda_1-2i-1)\eta_1+(\lambda_2-1)\eta_2}=\langle \partial_1\otimes v_i\rangle,\quad K(\lambda)_{(\lambda_1-2i)\eta_1+\lambda_2\eta_2}=\langle 1\otimes v_i\rangle,\\&K(\lambda)_{(\lambda_1-2i+1)\eta_1+(\lambda_2-1)\eta_2}=\langle \partial_2\otimes v_i\rangle,\quad K(\lambda)_{(\lambda_1-2i)\eta_1+(\lambda_2-2)\eta_2}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_i\rangle.\end{aligned}\tag{3.1}$$

进而可得如下引理:

引理 3.1 $\lambda_2\notin\{0,1,2,3,-1\}$ 时, $\mathfrak{g}$ 到 Kac 模的权映射必为零映射.

设 φ 是一个非零保权映射, 那么 λ_2 只能取 0, 1, 2, 3, -1. 下面的注记给出了 $K(\lambda)_\mu$ 的结构, 其中 μ 为 $\mathfrak{g}$ 的任一权.

注记 3.2 当 $0\le i\le\lambda_1$, $\lambda_2\in\{0,1,2,3,-1\}$ 时, 有以下结论:

(1) 当 $\lambda_2=0$ 时,

$$K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2}=\langle \partial_1\otimes v_{\frac{\lambda_1-2}{2}},\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2}=\langle \partial_1\otimes v_{\frac{\lambda_1}{2}},\partial_1\otimes v_{\frac{\lambda_1+2}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{-\eta_1+\eta_2}=K(\lambda)_{\eta_1+\eta_2}=0,\quad K(\lambda)_0=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{2\eta_1}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1-2}{2}}\rangle,\quad K(\lambda)_{2\eta_1}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1+2}{2}}\rangle.$$

(2) 当 λ_2=1 时,

$$K(\lambda)_{2\eta_1}=\langle \partial_1\otimes v_{\frac{\lambda_1-3}{2}},\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1-1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{-2\eta_1}=\langle \partial_1\otimes v_{\frac{\lambda_1+1}{2}},\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1+3}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_0=\langle \partial_1\otimes v_{\frac{\lambda_1+1}{2}},\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1-1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1-1}{2}}\rangle,\quad K(\lambda)_{\eta_1+\eta_2}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1-2}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1+1}{2}}\rangle,\quad K(\lambda)_{\eta_2-\eta_1}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1+2}{2}}\rangle.$$

(3) 当 $\lambda_2=2$ 时,

$$K(\lambda)_{\eta_1+\eta_2}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1-2}{2}},\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{\eta_2-\eta_1}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1}{2}},\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1+2}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2}=K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2}=0,\quad K(\lambda)_0=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{2\eta_1}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1-2}{2}}\rangle,\quad K(\lambda)_{-2\eta_1}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1+2}{2}}\rangle.$$

(4) 当 $\lambda_2=3$ 时,

$$K(\lambda)_{\eta_1+\eta_2}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1-1}{2}}\rangle,\quad K(\lambda)_{\eta_2-\eta_1}=\langle \partial_1\partial_2\otimes v_{\frac{\lambda_1+1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2}=K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2}=K(\lambda)_{-2\eta_1}=K(\lambda)_{2\eta_1}=K(\lambda)_0=0.$$

(5) 当 $\lambda_2=-1$ 时,

$$K(\lambda)_{\eta_1+\eta_2}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1-1}{2}}\rangle,\quad K(\lambda)_{-\eta_1+\eta_2}=\langle 1\otimes v_{\frac{\lambda_1+1}{2}}\rangle,$$
$$K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2}=K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2}=K(\lambda)_{-2\eta_1}=K(\lambda)_{2\eta_1}=K(\lambda)_0=0.$$

记 $K=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. 当 $\lambda_2\in\{0,1,2,3,-1\}$ 时, 若 $K(\lambda)_\mu\neq 0$ 且 μ 为 $\mathfrak{g}$ 的权, 则 (3.1) 中出现的 i 都是 $\frac{\lambda_1+k}{2}$ 的形式, 其中 $k\in K$. 对于 $\forall k\in K$, 当 $\lambda_1\geq 3$ 时, 作为自然数 $\frac{\lambda_1+k}{2}\in\mathbb{F}_p$; 而 $0\leq\lambda_1\leq 2$ 时, 作为自然数, $\exists\frac{\lambda_1+k}{2}\leq 0$, 所以调整 p, 使得 $\frac{\lambda_1+k+p}{2}\geq 0$. 下文将分为 $0\leq\lambda_1\leq 2$ 和 $\lambda_1\geq 3$ 两种情况讨论.

引理 3.3

(1) 当 $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ 时, $\mathfrak{g}$ 到 Kac 模的权导子空间是一维的.

(2) 当 $\lambda_1=0,\lambda_2\in\{1,2,3,-1\}$ 时, $\mathfrak{g}$ 到 Kac 模的权导子空间是零空间.

(3) 当 $\lambda_1=0,\lambda_2\in\{0,1,2,3,-1\}$ 时, $\mathfrak{g}$ 到 Kac 模的权导子空间是零空间.

证 由于特征 p 不同时, $\frac{\lambda_1+k}{2}$ 作为自然数未必满足 $1\leq i\leq\lambda_1$, 因此证明过程中我们根据特征 p 分情况讨论:

- 当 $\lambda_1=0$ 时, 考虑 $p=3$ 和 $p\geq 5$ 两种情况.
- 当 $\lambda_1=1$ 时, 考虑 $p=3$ 和 $p\geq 5$ 两种情况.
- 当 $\lambda_1=2$ 时, 考虑 $p=3,p=5$ 和 $p\geq 7$ 三种情况.

下面只证明 $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ 的情形, 其他情形可做类似证明.

(1) 当 $p=3$ 时, 作为自然数, 显然有

$$\tfrac{\lambda_1-2}{2}>\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1}{2}=\lambda_1=0,\quad \tfrac{\lambda_1+2}{2}>\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-1}{2}>\lambda_1,$$
$$\tfrac{\lambda_1+1}{2}>\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-3}{2}=\lambda_1=0,\quad \tfrac{\lambda_1+3}{2}=\lambda_1=0.$$

由注记 3.2 可知,

$$K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2}=\langle\partial_1\otimes v_0\rangle,\quad K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2}=\langle\partial_2\otimes v_0\rangle,\quad K(\lambda)_\mu=0,$$

其中 $\mu=-\eta_1+\eta_2,\eta_1+\eta_2,-2\eta_1,2\eta_1,0$. 设权映射 φ 满足:

$$\partial_1\mapsto a_1\partial_1\otimes v_0,\quad \partial_2\mapsto a_2\partial_2\otimes v_0,\quad x_1\partial_1\mapsto 0,$$

$$x_2\partial_2\mapsto 0,\quad x_1\partial_2\mapsto 0,\quad x_2\partial_1\mapsto 0,\quad x_1x_2\partial_1\mapsto 0,\quad x_1x_2\partial_2\mapsto 0,$$

则 $|\varphi|=\bar{0}$. 进而 φ 是权导子当且仅当下列方程有非零解:

$$\begin{cases}\varphi([\partial_1,\partial_2])=\partial_1\varphi(\partial_2)+\partial_2\varphi(\partial_1),\\ \varphi([\partial_2,x_2\partial_2])=\partial_2\varphi(x_2\partial_2)-x_2\partial_2\varphi(\partial_2).\end{cases}$$

即:

$$\begin{cases}a_2\partial_1\partial_2\otimes v_0-a_1\partial_1\partial_2\otimes v_0=0,\\ a_2\partial_2\otimes v_0=a_1\partial_2\otimes v_0.\end{cases}$$

整理上述方程组可得:

$$a_1 = a_2.$$

(2) 当 $p \geqslant 5$ 时, 作为自然数, 显然有

$$\tfrac{\lambda_1-2}{2} > \lambda_1, \quad \tfrac{\lambda_1}{2} > \lambda_1 = 0, \quad \tfrac{\lambda_1+2}{2} > \lambda_1, \quad \tfrac{\lambda_1-1}{2} > \lambda_1,$$

$$\tfrac{\lambda_1+1}{2} > \lambda_1, \quad \tfrac{\lambda_1-3}{2} > \lambda_1, \quad \tfrac{\lambda_1+3}{2} > \lambda_1.$$

由注记 3.2 可知,

$$\begin{aligned} &K(\lambda)_{-\eta_1-\eta_2} = \langle \partial_1 \otimes v_0 \rangle, \quad K(\lambda)_0 = \langle 1 \otimes v_0 \rangle, \\ &K(\lambda)_{\eta_1-\eta_2} = \langle \partial_2 \otimes v_0 \rangle, \quad K(\lambda)_\mu = 0, \end{aligned}$$

其中 $\mu = -\eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2, -2\eta_1, 2\eta_1$. 设权映射 φ 满足:

$$\partial_1 \mapsto a_1\partial_1 \otimes v_0, \quad \partial_2 \mapsto a_2\partial_2 \otimes v_0, \quad x_1\partial_1 \mapsto a_3 1 \otimes v_0, \quad x_2\partial_2 \mapsto a_4 1 \otimes v_0,$$

$$x_1\partial_2 \mapsto 0, \quad x_2\partial_1 \mapsto 0, \quad x_1x_2\partial_1 \mapsto 0, \quad x_1x_2\partial_2 \mapsto 0,$$

则 $|\varphi| = \bar{0}$. 于是 φ 是权导子当且仅当下列方程有非零解:

$$\begin{cases} \varphi([\partial_1, \partial_2]) = \partial_1\varphi(\partial_2) + \partial_2\varphi(\partial_1), \\ \varphi([\partial_1, x_2\partial_2]) = \partial_1\varphi(x_2\partial_2) - x_2\partial_2\varphi(\partial_1), \\ \varphi([\partial_2, x_2\partial_2]) = \partial_2\varphi(x_2\partial_2) - x_2\partial_2\varphi(\partial_2). \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} a_2\partial_1\partial_2 \otimes v_0 - a_1\partial_1\partial_2 \otimes v_0 = 0, \\ a_3\partial_1 \otimes v_0 = 0, \\ a_4\partial_2 \otimes v_0 = 0. \end{cases}$$

整理上述方程组可得:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ a_4 = 0. \end{cases}$$

综上所述, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ 时, 即 $\lambda = 0$ 时, 权导子空间是一维的.

类似的, 可以得到 $\lambda_1 = 0, 1, 2$ 时, 每一组满足导子定义的方程组. 经过计算可知, 只有 $\lambda_1 = 0$ 且 $\lambda_2 = 0$ 时才有非零解, 其余情况只有零解.

回忆 $K(\lambda)$ 的基, 下面刻画一下 v_i 的情形.

引理 3.4 对 $\forall k \in K$, 当 $\lambda_1 + k$ 为偶数时, 则 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}} \neq 0$. 当 $\lambda_1 + k$ 为奇数时, 若 $3 \leq \lambda_1 < p-3$, 则 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}} = 0$.

证 因为 $\lambda_1 + k$ 不能被 2 整除时, 不一定可以作为 i 的取值, 故按照 $\lambda_1 + k$ 为奇数和偶数两种情况讨论.

当 $\lambda_1 + k$ 为偶数时: $\frac{\lambda_1+k}{2} \in \{0, 1, \cdots, \frac{p+1}{2}, \frac{p+2}{2}\} \subset \{0, 1, \cdots, p-1\}$, 此时可以直接按自然数次序与 λ_1 比较大小, 又因为 $k \leq \lambda_1$, 从而有 $\frac{\lambda_1+k}{2} \leq \lambda_1$. 于是当 $\lambda_1 + k$ 为偶数时, $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}} \neq 0$.

当 λ_1+k 为奇数且 $3\leq\lambda_1<p-3$ 时: $\frac{\lambda_1+k+p}{2}\geq\lambda_1$. 如若不然, $\lambda_1\geq p+k$, 这与 λ_1 是介于 $0\sim p-1$ 的自然数矛盾，因此 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}}=0$.

引理 3.5 当 $\lambda_1\geq 3$, $\lambda_2\in\{0,1,2,3,-1\}$ 时, $\mathfrak{g}$ 到 Kac 模的权导子空间是零空间.

证 只需进行如下分类讨论:

(1) 当 $\lambda_1=p-1$ 时, 若 λ_1+k 为偶数, 则 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}}\neq 0$. 若 λ_1+k 为奇数, 作为自然数有

$$\tfrac{\lambda_1+3+p}{2}=1<\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1+1+p}{2}=0<\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-1+p}{2}=\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-3+p}{2}=p-2<\lambda_1.$$

易得 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}}\neq 0$.

(2) 当 $\lambda_1=p-2$ 时, 若 λ_1+k 为偶数, 则 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}}\neq 0$. 若 λ_1+k 为奇数, 作为自然数有

$$\tfrac{\lambda_1+2+p}{2}=0<\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1+p}{2}=p-1>\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-2+p}{2}=p-2=\lambda_1.$$

易得 $v_{\frac{\lambda_1}{2}}=0$, $v_{\frac{\lambda_1+2}{2}}\neq 0$, $v_{\frac{\lambda_1-2}{2}}\neq 0$.

(3) 当 $\lambda_1=p-3$ 时, 若 λ_1+k 为偶数, 则 $v_{\frac{\lambda_1+k}{2}}\neq 0$. 若 λ_1+k 为奇数, 作为自然数有

$$\tfrac{\lambda_1+3+p}{2}=0<\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1+1+p}{2}=p-1>\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-1+p}{2}=p-2>\lambda_1,\quad \tfrac{\lambda_1-3+p}{2}=p-3=\lambda_1.$$

易得 $v_{\frac{\lambda_1+1}{2}}=0$, $v_{\frac{\lambda_1-1}{2}}=0$, $v_{\frac{\lambda_1+3}{2}}\neq 0$, $v_{\frac{\lambda_1-3}{2}}\neq 0$.

(4) 当 $3\leq\lambda_1<p-3$ 时, 若 λ_1+k 为奇数, 由引理 3.4 可知, $\mathfrak{g}$ 在 φ 下的象只有零空间, 若 λ_1+k 为偶数, 与 $\lambda_1=p-1$ 的情形下计算过程相似.

下面证明 $\lambda_1=p-2,\lambda_2=2$ 的情形. 由注记 3.2 可知,

$$K(\lambda)_{\eta_1+\eta_2}=\langle 1\otimes v_{\lambda_1}\rangle,\quad K(\lambda)_{-\eta_1+\eta_2}=\langle\partial_2\otimes v_0\rangle,$$

$$K(\lambda)_{2\eta_1}=\langle\partial_1\partial_2\otimes v_{\lambda_1}\rangle,\quad K(\lambda)_{-2\eta_1}=\langle\partial_1\partial_2\otimes v_0\rangle,\quad K(\lambda)_{\mu}=0,$$

其中 $\mu=-\eta_1-\eta_2,\eta_1-\eta_2,0$. 设权映射 φ 满足:

$$x_1x_2\partial_2\mapsto a_1 1\otimes v_{\lambda_1},\quad x_1x_2\partial_1\mapsto a_2\partial_2\otimes v_0,\quad x_1\partial_2\mapsto a_3\partial_1\partial_2\otimes v_{\lambda_1},$$

$$x_2\partial_1\mapsto a_4\partial_1\partial_2\otimes v_0,\quad x_1\partial_1\mapsto 0,\quad x_2\partial_2\mapsto 0,\quad \partial_1\mapsto 0,\quad \partial_2\mapsto 0,$$

则 $|\varphi|=\bar{0}$. 那么 φ 是权导子当且仅当下列方程有非零解:

$$\begin{cases}\varphi([x_1\partial_2,x_1x_2\partial_1])=x_1\partial_2\varphi(x_1x_2\partial_1)-x_1x_2\partial_1\varphi(x_1\partial_2),\\ \varphi([x_2\partial_1,x_1x_2\partial_1)=x_2\partial_1\varphi(x_1x_2\partial_1)-x_1x_2\partial_1\varphi(x_2\partial_1).\end{cases}$$

即:

$$\begin{cases}-a_1 1\otimes v_{\lambda_1}=0-\frac{\lambda_1}{2}a_3\partial_1\otimes v_0,\\ (\frac{p-2}{2}a_4-a_2)\partial_1\otimes v_{\lambda_1}-(a_2+a_4)\partial_1\partial_2\otimes v_0=0.\end{cases}$$

整理上述方程组可得:

$$\begin{cases}a_1=0,\\ a_3=0,\\ a_4+a_2=0,\\ \frac{p-2}{2}a_4-a_2=0.\end{cases}$$

解得:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.$$

经过上述计算, 上述所有情况中, 满足导子定义的每个方程组都只有零解, 结论得证.

由引理 3.1, 3.3 以及 3.5 易得定理 1.

参 考 文 献

[1] Bai W, Liu W D. Superderivations for modular graded Lie superalgebras of Cartan type[J]. Algebr. Represent. Theory, 2014, 17(1): 69–86.

[2] Wang S J, Liu W D. The first cohomology of $\mathfrak{sl}(2,1)$ with coefficients in χ-reduced Kac modules and simple modules[J]. Pure Appl. Algebra, 2020, 224(1): 106403.

[3] Duan F F. Representations of the Witt superalgebra $W(2)$[J]. Journal of Algebra, 2013, 396: 272–286.

[4] Shen G Y. Graded modules of graded Lie algebras of Cartan type(1)[J]. Sci. Sinica., 1986, 29(10): 570–581.

[5] Liu W D, Zhang Y Z. Derivations for the even parts of modular Lie superalgebras W and S of Cartan type[J]. Internat. Algebra. Comput., 2007, 17(4): 661–714.

[6] Shu B, Zhang C W. Restricted representations of the Witt superalgebras[J]. Journal of Algebra, 2010, 324(4): 652–672.

[7] Leites D A. Cohomology of Lie superalgebras[J]. Func. Anal. Appl, 1975, 9(4): 75–79.

[8] Sun L P, Liu W D, Wu B Y. Low-Dimensional cohomology of Lie superalgebra $\mathfrak{sl}_{m|n}$ with coefficients in Witt or special superalgebras[J]. Indag. Math. (N. S.), 2014, 25(1): 59–77.

WEIGHT-DERIVATION SPACE FROM W(2) TO KAC MODULE

LIU Shu-chang, WANG Shu-juan

(*School of Mathematical Sciences, Heilongjiang University, Harbin 150080, China*)

Abstract: This paper studies the weight-derivation space from the modular Lie superalgebra $W(2)$ to Kac module $K(\lambda)$. By using the method of classification discussion and linear equations, we obtain that the weight-derivations space from $W(2)$ to $K(\lambda)$ is either 0 dimensional or 1 dimensional, which generalizes the corresponding results on the weight-derivations space from Lie algebras to their modules.

Keywords: modular Lie superalgebras of Witt type; Kac modules; weight-derivations

2010 MR Subject Classification: 17B40; 17B50