Vol. 41 (2021)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类四阶常微分方程周期边值问题的正解

王天祥, 李永祥
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了四阶周期边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - \beta u''(t) + \alpha u(t) = f(t,\ u(t),\ u'(t),\ u''(t),\ u'''(t)), \quad t \in [0,1], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), \quad i = 0,1,2,3 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $f : [0,1] \times [0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty)$ 连续. 利用锥上的不动点指数理论, 获得了该问题正解的存在性结果, 推广了已有文献的相关结果.

关 键 词: 四阶常微分方程; 正解; 锥; 不动点指数理论
MR(2010) **主题分类号**: 34B15; 34B18 **中 图 分 类 号**: O175.8
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2021)02-0141-10

1 引言

本文讨论四阶非线性常微分方程

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - \beta u''(t) + \alpha u(t) = f(t,\ u(t),\ u'(t),\ u''(t),\ u'''(t)), \quad t \in [0,1], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), \quad i = 0,1,2,3 \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 其中 $f : [0,1] \times [0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty)$ 连续. 该问题描述了静态弹性梁在周期边界条件下的形变, f 中的未知函数项 u 表示梁形变的位移, u' 表示隅角, u'' 表示弯矩, u''' 表示剪切力刚度. 而在弹性梁模型中, 只有正解才有实际意义.

四阶常微分方程周期边值问题在非线性振动, 流体力学和非线性弹性现象等诸多领域有着广泛的应用, 因而受到了许多学者的研究 [1–16]. 主要应用的非线性分析的工具和方法有锥上的不动点指数理论 [1–3, 6, 16], Krasnoselskii 不动点定理 [6, 7, 15], 单调迭代技巧 [4, 5, 9, 12–14], 拓扑度方法 [8] 等.

对非线性项 f 不含导数项的简单四阶周期边值问题 (PBVP), 文献 [1] 中作者利用锥上的不动点指数理论获得了四阶周期边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - m^4 u(t) + f(t,\ u(t)) = 0, \quad t \in [0,2\pi], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), \quad i = 0,1,2,3, \end{cases} \tag{1.2}$$

正解的存在性和多重性. 文献 [2] 在周期边界下对四阶微分算子 $L_4 u = u^{(4)} - \beta u'' + \alpha u$ 在 $F_4 = \{u \in C^4[0,1] | u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), i = 0,1,2; u^{(3)}(0) \geq u^{(3)}(1)\}$ 中建立了强极大值原理, 并

*收稿日期: 2020-09-07 接收日期: 2020-10-21
基金项目: 国家自然科学基金基金资助 (11661071).
作者简介: 王天祥 (1992–), 男, 甘肃天水, 硕士, 主要研究方向: 非线性泛函分析.

用锥上的不动点指数理论, 在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足条件

$$0<\alpha<\left(\frac{\beta}{2}+2\pi^2\right)^2,\ \beta>-2\pi^2,\ \frac{\alpha}{\pi^4}+\frac{\beta}{\pi^2}+1>0 \tag{1.3}$$

时, 获得了四阶周期边值问题 (PBVP)

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)-\beta u''(t)+\alpha u(t)=f(t,\,u(t)), \quad t\in[0,1] \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1), \quad i=0,1,2,3, \end{cases} \tag{1.4}$$

正解的存在性. 文献 [3] 中作者利用锥上的不动点指数理论获得了四阶变系数周期边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)-a(t)u(t)=f(t,\ u(t)), \quad t\in[0,\omega] \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(\omega), \quad i=0,1,2,3, \end{cases} \tag{1.5}$$

正解的存在性.

对非线性项 f 含有 u'' 项的四阶周期边值问题 (PBVP)

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,\,u(t),\,u''(t)), \quad t\in[0,1] \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1), \quad i=0,1,2,3, \end{cases} \tag{1.6}$$

文献 [12] 在上下解存在的情形下, 利用 Banach 压缩原理, 获得了周期解的存在性与唯一性. 文献 [13] 应用单调迭代方法在 $f(t,u,v)$ 关于 u, v 满足单边 Lipschitz 条件时, 获得了 PBVP (1.6) 解的存在性结果. 文献 [14] 利用建立的新极大值原理和 Fredholm 抉择, 用上下解方法获得了 PBVP (1.6) 解的存在性结果. 文献 [16] 推广了文献 [2] 中的结果, 用锥上的不动点指数理论获得了四阶周期边值问题 (PBVP)

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)-\beta u''(t)+\alpha u(t)=f(t,\,u(t),\,u''(t)), \quad t\in[0,1] \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1), \quad i=0,1,2,3, \end{cases} \tag{1.7}$$

正解的存在性. 以上工作讨论的均是非线性项 f 不含未知函数的导数项或仅含二阶导数项 u'' 的特殊情形, 而在较为复杂的弹性梁模型中, 非线性项中可能会出现 u' 与 u'''. 对非线性项 f 含有 u',u'',u''' 的完全四阶周期边值问题 (1.1), 未见有人研究. 本文利用锥上的不动点指数理论, 在允许非线性项 $f(t,x_0,x_1,x_2,x_3)$ 关于 x_0, x_1, x_2, x_3 超线性增长的不等式条件下, 获得了四阶周期边值问题 (1.1) 正解的存在性.

2 预备知识

记 $I=[0,1]$, $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$, $C(I)$ 表示定义在 I 上的全体连续函数按范数 $\|u\|_C=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 构成的 Banach 空间. $C^+(I)$ 表示 $C(I)$ 中全体非负连续函数. 对 $n\in\mathbb{N}$, $C^n(I)$ 表示定义在 I 上的全体 n 阶连续可微函数按范数 $\|u\|_{C^n}=\max\limits_{t\in I}\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\cdots,\|u^{(n)}\|_C\}$ 构成的 Banach 空间.

根据文献 [2] 中的引理 3, 微分算子 $Lu=u^{(4)}(t)-\beta u''(t)+\alpha u(t)$ 在周期边界条件下满足极大值原理, 且有下面引理.

引理 1 [2] 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足条件 (1.3), 则四阶线性边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)-\beta u''(t)+\alpha u(t)=0, \quad t\in[\,0,1\,], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1), \quad i=0,1,2, \\ u^{(3)}(0)-u^{(3)}(1)=1 \end{cases} \tag{2.1}$$

存在唯一解 $r(t)\in C^4(I)$, 且 $r(t)>0$ 于 I.

引理 2 [2] 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足条件 (1.3), 则对 $\forall\ h\in C(I)$, 四阶线性边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)-\beta u''(t)+\alpha u(t)=h(t), \quad t\in[\,0,1\,], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1), \quad i=0,1,2,3, \end{cases} \tag{2.2}$$

存在唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)ds:=Sh(t), \quad \forall\ t\in[0,1], \tag{2.3}$$

且解算子 $S:C(I)\to C^3(I)$ 为线性全连续算子, 其中

$$G(t,s)=\begin{cases} r(t-s), \quad 0\le s\le t\le 1, \\ r(1+t-s), \quad 0\le t<s\le 1. \end{cases}$$

定义正常数 σ, C_i 为

$$\sigma=\frac{\min\limits_{t\in[0,1]} r(t)}{\max\limits_{t\in[0,1]} r(t)}, \quad C_i=\frac{\max\limits_{t\in[0,1]}|r^{(i)}(t)|}{\min\limits_{t\in[0,1]} r(t)}, \quad i=1,\ 2,\ 3. \tag{2.4}$$

在 $C^3(I)$ 中取闭凸锥

$$K=\{u\in C^3(I)\mid\ u(t)\ge\sigma\|u\|_C,\ \ |u^{(i)}(t)|\le C_i u(t),\ \ i=1,\ 2,\ 3,\ t\in\mathbb{R}\}. \tag{2.5}$$

引理 3 设 $\alpha,\beta\in R$ 满足条件 (1.3)), 则对 $\forall\ h\in C^+(I)$, 四阶线性周期边值问题 (2.2) 的解 $u=Sh\in K$, 即 $S(C^+(I))\subset K$.

证 对 $\forall\ t\in I$, 由线性边值问题 (2.2) 解的表达式 (2.3), 有

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)ds\le\max_{t\in[0,1]} r(t)\int_0^1 h(s)ds, \quad t\in I,$$

所以

$$\|u\|_C\le\max_{t\in[0,1]} r(t)\int_0^1 h(s)ds, \quad t\in I.$$

再由 (2.3) 式, 有

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)ds\ge\min_{t\in[0,1]} r(t)\int_0^1 h(s)ds\ge\sigma\|u\|_C.$$

由 $G(t,s)$ 的定义, 有

$$u(t)=\int_0^t r(t-s)h(s)ds+\int_t^1 r(1+t-s)h(s)ds,\quad t\in I,$$

对上式两端关于 t 求导, 有

$$u^{(i)}(t)=\int_0^t r^{(i)}(t-s)h(s)ds+\int_t^1 r^{(i)}(1+t-s)h(s)ds,\quad t\in I,$$

因此, 有

$$\begin{aligned}|u^{(i)}(t)| &\le |\int_0^t r^{(i)}(t-s)h(s)ds|+|\int_t^1 r^{(i)}(1+t-s)h(s)ds|\\ &\le \max_{t\in[0,1]} r^{(i)}(t)\int_0^t h(s)ds+\max_{t\in[0,1]} r^{(i)}(t)\int_t^1 h(s)d\\ &\le \max_{t\in[0,1]} r^{(i)}(t)\int_0^1 h(s)ds\\ &= C_i\min_{t\in[0,1]} r(t)\int_0^1 h(s)ds\\ &\le C_iu(t)\quad i=1,\ 2,\ 3.\end{aligned}$$

因此, $u\in K$, 即 $S(C^+(I))\subset K$. 对 $u\in K$, 如果 $u\ \neq 0$, 那么 $\|u\|_C>0$. 由锥 K 的定义,

$$u(t)\ge\sigma\|u\|_C>0,\quad \forall\, t\in I.$$

令

$$F(u)(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)),\quad t\in I, \tag{2.6}$$

则 $F:K\to C^+(I)$ 连续. 定义锥 K 上的积分算子 $A:K\to K$

$$Au(t)=S(F(u))=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds. \tag{2.7}$$

引理 4 $A:K\to K$ 是全连续算子.

按算子 S 的定义, 方程 (1.1) 的正解等价于 A 的非零不动点. 下面将用锥上的不动点指数理论寻找 A 的非零不动点. 设 E 是 Banach 空间, $K\subset E$ 为 E 中的闭凸锥. 设 $\Omega\subset E$ 为有界开集, 其边界为 $\partial\Omega$, 且满足 $K\cap\Omega\neq\varnothing$. 设 $A:K\cap\overline{\Omega}\to K$ 为全连续映射, 若对 $\forall u\in K\cap\partial\Omega$, 都有 $Au\neq u$, 则不动点指数 $i(A,\ K\cap\Omega,\ K)$ 有定义. 特别地, 若 $i(A,\ K\cap\Omega,\ K)\neq 0$, 则 A 在 $K\cap\Omega$ 中有不动点.

引理 5 [17] 设 $\Omega\subset E$ 是有界开集, $\theta\in\Omega$, 且 $A:\overline{\Omega}\cap K\to K$ 为全连续映射. 若 $\mu Au\neq u,\ \ \forall\, u\in\partial\Omega\cap K,\ \ 0<\mu\le 1$, 则 $i(A,\Omega\cap K,K)=1$.

引理 6 [17] 设 $\Omega\subset E$ 是有界开集, $A:\overline{\Omega}\cap K\to K$ 为全连续映射. 若 $\exists\, v\in K\backslash\{\theta\}$, 使得 $u-Au\neq\tau v,\ \ \forall\, u\in\partial\Omega\cap K,\quad \tau\ge 0$, 则 $i(A,\Omega\cap K,K)=0$.

3 主要结果

定理 1 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足条件 (1.3), $f: I\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^+$ 连续, 且满足下列条件

(H1) $\exists\,\delta>0$ 及 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3\geq 0,\ a_0+a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3<\alpha$, 使得

$$f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\leq a_0x_0+a_1|x_1|+a_2|x_2|+a_3|x_3|,\ |(x_0,x_1,x_2,x_3)|<\delta,\ x_0\geq 0,\ t\in I;$$

(H2) $\exists\,H>0$ 及 $b_0>\alpha$, 使得

$$f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\geq b_0x_0,\ |(x_0,x_1,x_2,x_3)|>H,\ x_0\geq 0,\ t\in I.$$

则四阶周期边值问题 (1.1) 至少存在一个正解.

证 取工作空间 $E=C^3(I)$. $K\subset C^3(I)$ 为 (2.5) 定义的 $C^3(I)$ 中的闭凸锥, $A: K\to K$ 是 (2.7) 式所定义的全连续算子, 则方程 (1.1) 的正解等价于算子 A 的非零不动点. 取 $0<r<R<+\infty$, 令

$$\Omega_1=\{u\in C^3(I)|\ \|u\|_{C^3}<r\},\quad \Omega_2=\{u\in C^3(I)|\ \|u\|_{C^3}<R\}. \tag{3.1}$$

下证当 r 充分小, R 充分大时, 算子 A 在 $(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\cap K$ 中有不动点.

取 $r\in(0,\frac{\delta}{2})$, 下证 A 在 $\partial\Omega_1\cap K$ 中满足引理 5 的条件, 即

$$\mu Au\neq u,\quad 0<\mu\leq 1,\quad u\in\partial\Omega_1\cap K. \tag{3.2}$$

反设 (3.2) 式不成立, 即 $\exists\ u_0\in\partial\Omega_1\cap K$ 及 $0<\mu_0\leq 1$, 使得 $\mu_0Au_0=u_0$. 因为 $u_0=S(\mu_0F(u_0))$, 按 S 的定义, u_0 为 $h=\mu_0F(u_0)\in C^+(I)$ 相应线性边值问题 (2.2) 的解. 因此, $u_0\in C^4(I)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} u_0^{(4)}(t)-\beta u_0''(t)+\alpha u_0(t)=\mu_0 f(t,u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t)),\quad t\in[\,0,1\,],\\ u_0^{(i)}(0)=u_0^{(i)}(1),\quad i=0,1,2,3.\end{cases} \tag{3.3}$$

因为 $u_0\in\partial\Omega_1\cap K$, 由锥 K 的定义, 对 $\forall\,t\in I$, 有

$$\|u_0\|_{C^3}=r,\quad |u_0^{(i)}(t)|\leq\|u_0^{(i)}\|_C\leq\|u_0\|_{C^3}=r,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

所以

$$|(u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))|=(\sum_{i=0}^{3}|u_0^{(i)}(t)|^2)^{\frac12}\leq 2r<\delta.$$

由条件 (H1), 有

$$f(t,u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))\leq a_0u_0(t)+a_1|u_0'(t)|+a_2|u_2''(t)|+a_3|u_3'''(t)|,\quad\forall\,t\in I. \tag{3.4}$$

将 ((3.3) 式中的方程在 I 上积分, 并利用 (3.4) 式可得

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^1 u_0(t)dt &= \mu_0\int_0^1 f(t,u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))dt\\ &\leq (a_0+a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3)\int_0^1 u_0(t)dt.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 u_0(t)dt \geq \sigma\|u_0\|_C > 0$. 由上式, $\alpha \leq a_0 + a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3$, 与 (H1) 中的条件矛盾. 故算子 A 满足 (3.2) 式, 由引理 5 知

$$i(A, \Omega_1 \cap K, K) = 1. \tag{3.5}$$

另一方面, 取 $v_0(t) \equiv 1$, 则 $v_0 = S(\alpha)$. 下证 A 在 $\partial\Omega_2 \cap K$ 上满足引理 6 的条件, 即

$$u - Au \neq \tau v_0,\ \ \forall\, u \in \partial\Omega_2 \cap K,\ \tau \geq 0. \tag{3.6}$$

反设 (3.6) 式不成立, 则 $\exists\, u_1 \in \partial\Omega_2 \cap K$ 及 $\tau_0 \geq 0$, 使得

$$u_1 - Au_1 = \tau_0 v_0,\ \ \forall\, u_1 \in \partial\Omega_2 \cap K,\ \tau_0 \geq 0.$$

即 $u_1 = Au_1 + \tau_0 v_0 = S(F(u_1)) + S(\tau_0\alpha) = S(F(u_1) + \tau_0\alpha)$. 按 S 的定义, u_1 为 $h = F(u_1) + \tau_0\alpha \in C^+(I)$ 相应线性边值问题 (2.2) 的解. 因此, $u_0 \in C^4(I)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} u_1^{(4)}(t) - \beta u_1''(t) + \alpha u_1(t) = f(t, u_1(t), u_1'(t), u_1''(t), u_1'''(t)) + \tau_0\alpha, \quad t \in [\,0, 1\,], \\ u_1^{(i)}(0) = u_1^{(i)}(1), \quad i = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3.7}$$

因为 $u_1 \in \partial\Omega_2 \cap K$, 由 K 的定义, 有

$$u_1(t) \geq \sigma\|u_1\|_C, \quad |u_1^{(i)}(t)| \leq C_i u_1(t), \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.8}$$

令 $C_0 = \max\{|f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) - b_0x_0| : t \in I,\ |(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)| \leq H\} + 1$, 则由 (F2) 式, 有

$$f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \geq b_0x_0 - C_0, \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ x_0 \geq 0. \tag{3.9}$$

将 (3.7) 式中的方程在 I 上积分, 并利用 (3.9) 式可得

$$\begin{aligned} \alpha\int_0^1 u_1(t)dt &= \int_0^1 f(t, u_1(t), u_1'(t), u_1''(t), u_1'''(t))dt + \tau_0\alpha \\ &\geq \int_0^1 (b_0u_1(t) - C_0)dt \\ &= b_0\int_0^1 u_1(t)dt - C_0, \end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 u_1(t)dt \leq \frac{C_0}{b_0-\alpha}$. 因此, 由 (3.8) 式, 有

$$\|u_1\|_C \leq \frac{C_0}{\sigma(b_0-\alpha)} := R_0, \quad \|u_1^{(i)}\|_C \leq C_i\|u_1\|_C \leq C_iR_0, \ \ i = 1,\ 2,\ 3.$$

所以

$$\|u_1\|_{C^3} = \max\{1,\ C_1,\ C_2,\ C_3\}R_0 := R_1. \tag{3.10}$$

取 $R > \max\{R_1,\ \frac{\delta}{2}\}$, 则当 $u_1 \in \partial\Omega_2 \cap K$ 时,

$$\|u_1\|_{C^3} = R > R_1,$$

与 (3.10) 式矛盾. 因此, (3.6) 式成立, 由引理 6, 有

$$i(A,\Omega_2\cap K,K)=0. \tag{3.11}$$

故由不动点指数的区域可加性及 (3.5) 与 (3.11), 有

$$i(A,K\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1),K)=i(A,K\cap\Omega_2,K)-i(A,K\cap\Omega_1,K)=-1$$

从而由可解性知, A 在 $K\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)$ 上存在不动点, 该不动点为方程 (1.1) 的正解.

定理 2 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足条件 (1.3), $f:I\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^+$ 连续, 且满足下列条件

(H3) $\exists\,\delta>0$ 及 $b_0>\alpha$, 使得

$$f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\ge b_0x_0,\ |(x_0,x_1,x_2,x_3)|<\delta,\ x_0\ge 0,\ t\in I;$$

(H4) $\exists\,H>0$ 及 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3\ge 0,\ a_0+a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3<\alpha$, 使得

$$f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\le a_0x_0+a_1|x_1|+a_2|x_2|+a_3|x_3|,\ |(x_0,x_1,x_2,x_3)|>H,\ x_0\ge 0,\ t\in I,$$

则四阶周期边值问题 (1.1) 至少存在一个正解.

证 设 Ω_1,Ω_2 是 (3.1) 定义的集合, $K\subset C^3(I)$ 为 (2.5) 定义的闭凸锥, $A:K\to K$ 是 (2.7) 式所定义的全连续算子. 下证当 r 充分小, R 充分大时, 算子 A 在 $(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\cap K$ 中有不动点.

取 $r\in(0,\frac{\delta}{2})$, $v_0(t)\equiv 1$. 下证 A 在 $\partial\Omega_1\cap K$ 中满足引理 6 的条件, 即

$$u-Au\ne\tau v_0,\ \ \forall\,u\in\partial\Omega_1\cap K,\ \tau\ge 0. \tag{3.12}$$

反设上式不成立, 即 $\exists\,u_0\in\partial\Omega_1\cap K$ 及 $\tau_0\ge 0$, 使得 $u_0-Au_0=\tau_0v_0$, 所以 $u_0=Au_0+\tau_0v_0$, 即 $u_0=S(F(u_0))+S(\tau_0\alpha)=S(F(u_0)+\tau_0\alpha)$, 由 S 的定义, u_0 为 $h=F(u_0)+\tau_0M\in C^+(I)$ 相应线性边值问题 (2.2) 的解. 因此, $u_0\in C^4(I)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}u_0^{(4)}(t)-\beta u_0''(t)+\alpha u_0(t)=f(t,u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))+\tau_0\alpha, & t\in[\,0,1\,],\\ u_0^{(i)}(0)=u_0^{(i)}(1), & i=0,1,2,3.\end{cases} \tag{3.13}$$

因为 $u_0\in\partial\Omega_1\cap K$, 由锥 K 的定义, 对 $\forall\,t\in I$, 有

$$\|u_0\|_{C^3}=r,\quad |u_0^{(i)}(t)|\le\|u_0^{(i)}\|_C\le\|u_0\|_{C^3}=r,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

所以

$$|(u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))|=(\sum_{i=0}^{3}|u_0^{(i)}(t)|^2)^{\frac{1}{2}}\le 2r.$$

由条件 (H3), 有

$$f(t,u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))\ge b_0u_0(t),\quad\forall\,t\in I. \tag{3.14}$$

将 (3.13) 式中的方程在 I 上积分, 并利用 (3.14) 式可得

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^1 u_0(t)dt &= \int_0^1 f(t,u_0(t),u_0'(t),u_0''(t),u_0'''(t))dt\\ &\geq b_0\int_0^1 u_0(t)dt.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 u_0(t)dt \geq \sigma\|u_0\|_C > 0$, 由上式, $\alpha \geq b_0$, 与 (H3) 中的条件矛盾. 故算子 A 满足 (3.12) 式, 由引理 6 知

$$i(A,\Omega_1\cap K,K)=0. \tag{3.15}$$

另一方面, 取 $R > \max\{\frac{\max\{1,C_1,C_2,C_3\}}{\sigma}H,\delta\}$, 下证 A 在 $\partial\Omega_2\cap K$ 上满足引理 5 的条件, 即

$$\mu Au \neq u,\quad 0<\mu\leq 1,\ u\in\partial\Omega_2\cap K. \tag{3.16}$$

反设 (3.16) 式不成立, 则 $\exists\, u_1\in\partial\Omega_2\cap K$ 及 $0<\mu_0\leq 1$, 使得 $\mu_0Au_1=u_1$, 即 $u_1=S(F(u_1))$. 由 S 的定义, u_1 为 $h=\mu_0F(u_1)\in C^+(I)$ 相应线性边值问题 (2.2) 的解. 因此, $u_1\in C^4(I)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} u_1^{(4)}(t)-\beta u_1''(t)+\alpha u_1(t)=\mu_0 f(t,u_1(t),u_1'(t),u_1''(t),u_1'''(t)), & t\in[\,0,1\,],\\ u_1^{(i)}(0)=u_1^{(i)}(1), & i=0,1,2,3.\end{cases} \tag{3.17}$$

因为 $u_1\in\partial\Omega_2\cap K$, 由 K 的定义, u_1 满足 (3.8) 式, 则有

$$\|u_1\|_{C^2}=\max_{t\in I}\{\|u_1\|_C,\|u_1'\|_C,\|u_1''\|_C,\|u_1'''\|_C\}=\max\{1,C_1,C_2,C_3\}\|u_1\|_C. \tag{3.18}$$

所以有

$$\begin{aligned}|(u_1(t),u_1'(t),u_1''(t),u_1'''(t))| &\geq |u_1(t)|\geq\sigma\|u_1\|_C\\ &\geq \frac{\sigma}{\max\{1,C_1,C_2,C_3\}}\|u_1\|_{C^2}\\ &= \frac{\sigma R}{\max\{1,C_1,C_2,C_3\}}>H,\quad t\in I.\end{aligned}$$

从而由 (H4), 有

$$f(t,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\leq a_0x_0+a_1|x_1|+a_2|x_2|+a_3|x_3|,\quad t\in I,\quad x_0\geq 0. \tag{3.19}$$

将 (3.17) 式中的方程在 I 上积分, 并利用 (3.19) 式可得

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^1 u_1(t)dt &= \mu_0\int_0^1 f(t,u_1(t),u_1'(t),u_1''(t),u_1'''(t))dt\\ &\leq (a_0+a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3)\int_0^1 u_1(t)dt.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 u_1(t)dt\geq\sigma\|u_1\|_C>0$. 由上式, $a_0+a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3>\alpha$, 与 (H4) 中的条件矛盾. 故算子 A 满足 (3.16) 式, 由引理 5 知

$$i(A,\Omega_2\cap K,K)=1. \tag{3.20}$$

故由不动点指数的区域可加性及 (3.15) 与 (3.20), 有

$$i(A, K\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1), K) = i(A, K\cap\Omega_2, K) - i(A, K\cap\Omega_1, K) = 1$$

从而由可解性知, A 在 $K\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)$ 上存在不动点, 该不动点为方程 (1.1) 的正解.

例 1 考虑如下的超线性四阶周期边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - u''(t) + u(t) = a_0(t)u^2(t) + a_1(t)(u'(t))^2 + a_2(t)(u''(t))^2 + a_3(t)(u'''(t))^2, \quad t\in[0,1], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), \quad i = 0,1,2,3, \end{cases} \tag{3.21}$$

其中 $a_i(t)\in C^+(I), \quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ t\in I$. 显然 $\alpha=1,\ \beta=1$ 满足条件 (1.3). 若 $a_0(t)>1$, 则相应的非线性项 $f(t,x_0,x_1,x_2,x_3) = a_0(t)x_0^2 + a_1(t)x_1^2 + a_2(t)x_2^2 + a_3(t)x_3^2$ 满足条件 (H1) 及 (H2), 由定理 1 知, 方程 (3.21) 至少有一个正解.

例 2 考虑如下的次线性四阶周期边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + u''(t) + u(t) = b_0(t)\sqrt[3]{u(t)} + b_1(t)\sqrt[3]{u'(t)} + b_1(t)\sqrt[3]{u''(t)} + b_1(t)\sqrt[3]{u'''(t)}, \quad t\in[0,1], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), \quad i = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{3.22}$$

其中 $a_i(t)\in C^+(I), \quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ t\in I$. 显然 $\alpha=1,\ \beta=-1$ 满足条件 (1.3)). 若 $b_0(t)>1$, 则相应的非线性项 $f(t,x_0,x_1,x_2,x_3) = b_0(t)\sqrt[3]{x_0} + b_1(t)\sqrt[3]{x_1} + b_1(t)\sqrt[3]{x_2} + b_1(t)\sqrt[3]{x_3}$ 满足条件 (H3) 及 (H4), 由定理 2 知, 方程 (3.22) 至少有一个正解.

参 考 文 献

[1] Kong Lingbin, Jiang Daqing. Multiple positive solutions of a nonlinear fourth order periodic boundary value problem[J]. Ann. Polon. Math, 1998, 69(3): 265–270.

[2] Li Yongxiang. Positive periodic solutions of fourth order periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2003, 54(6): 1069–1078.

[3] Bouteraa N, Benaicha S. Positive periodic solutions for a class of fourth order nonlinear differential equations[J]. Numerical Analysis and Applications, 2019, 12(1): 1–14.

[4] Cabada A, Lois S. Maximum principles for fourth and sixth order periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 1997, 29(10): 1161–1171.

[5] Cabada A. The method of lower and upper solutions for second, third, fourth and higher order boundary value problems[J]. Mathematical Analysis and Applications, 1994, 185(2): 302–320.

[6] Yao Qingliu. Existence of multiplicity and infinite solvability of positive solutions to a nonlinear fourth order periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 63(2): 237–246.

[7] 刘仁义. 一类四阶周期边值问题的正解存在性与多解性 [J]. 兰州大学学报, 2005, 41(1): 112–114.

[8] Bereanu C. Periodic solutions of some fourth order nonlinear differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(1): 53–57.

[9] Zuo Wenjie, Jiang Daqing. A monotone method for fourth order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations[J]. Methods and Applications of Analysis, 2005, 12(1): 53–57.

[10] Ma Ruyun, Dai Guowei. Periodic solutions of nonlocal semilinear fourth-order differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(15): 5023–5029.

[11] Li Wei, Zhang Meirong. Non-degeneracy and uniqueness of periodic solutions for some superlinear beam equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(3): 314–319.

[12] Jiang Daqing, Gao Wenjie , Wan Aying. A monotone method for constructing extremal solutions to fourth-order periodic boundary value problems [J] Com Appl Math, 2002, 132(2): 411–421.

[13] Weng Shiyou, Gao Haiyin, Jiang Daqing, Hou Xuezhang. Upper and lower solutions method for fourth-order periodic boundary value problems [J] Journal of Applied Analysis, 2008, 14(1): 53–61.

[14] Bai Zhanbing. Iterative solutions for some fourth-order periodic boundary value problems [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2008, 12(7): 1681–1690.

[15] Jiang Daqing, Liu Zhaoli, Zhang Lili. Optimal existence theory for single and multiple positive solutions to fourth order periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 7(4): 841–852.

[16] Li Yongxiang. Existence of positive solutions for a fourth-order periodic boundary value problems [J]. Abstract and Applied Analysis, 2011, Article ID 829783.

[17] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. New York: Academic Press,1988.

POSITIVE SOLUTIONS OF PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF FOURTH ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

WANG Tian-xiang, LI Yong-xiang

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

Abstract: In this paper, we discuss the existence of positive solution for the fourth-order periodic boundary value problem

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - \beta u''(t) + \alpha u(t) = f(t,\ u(t),\ u'(t),\ u''(t),\ u'''(t)),\ \ t \in [0,1], \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1), \quad i = 0,1,2,3, \end{cases}$$

where $f : [0,1] \times [0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty)$ continuous. By using the fixed point index theory on cone, the existence of positive solution is obtained, and extends some related conclusions on this topic.

Keywords: fourth-order ordinary differential equations; positive solution; cone; fixed point index theory

2010 MR Subject Classification: 34B15; 34B18