Vol. 41 (2021)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

$|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 在改进的正切节点组的有理逼近

程一元 [1] , 查星星 [1], 张永全 [2]
(1. 巢湖学院数学与统计学院, 安徽 合肥 238024)
(2. 浙江财经大学数据科学学院, 浙江 杭州 310018)

摘 要: 本文研究了 $|x|^\alpha$ 在改进的正切结点组的有理逼近的问题. 利用改变结点的方法, 获得其逼近阶为 $O(\frac{1}{n^{4\alpha}})$ 的结果. 推广了一些学者在正切结点组下的研究的逼近阶, 而且优于等距结点组、第一和第二类 Chebyshev 结点组的结果.

关 键 词: Newman-α 有理算子; 逼近阶; 有理插值逼近
MR(2010) **主题分类号**: 41A05; 41A20; 41A25 **中 图 分 类 号**: O174.41
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2021)02-0134-07

1 引言

函数 $|x|$ 在逼近理论中有着重要应用. 最早于 1913 年, Bernstein 开始研究 $|x|$ 的逼近问题, 他采用多项式逼近, 得到了逼近阶为 $O(\frac{1}{n})$. 于是, 关于 $|x|$ 的逼近逐渐成为逼近论的热点问题. 1964 年, Newman D J[1] 采用了一种结点组

$$X=\{-a,-a^2,\cdots,-a^{n-1},0,a^{n-1},\cdots,a^2,a\},$$

其中 $a=e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$, 构建一个有理插值函数 $r_n(X;x)=x\frac{p_n(x)-p_n(-x)}{p_n(x)+p_n(-x)}$,$p_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x_k+x)$. 并应用 $r_n(X;x)$ 逼近 $|x|$, 证明出逼近定理: 当 $n\ge5$, $\frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}}\le R_n(|x|)\le 3e^{-\sqrt{n}}$ 成立, 此逼近结论远远优于 Bernstein 的多项式逼近.

由此, 在前人所构建的有理插值函数基础上, 众多学者们开始尝试在不同的结点组下对 $|x|$ 逼近, 如第一类 Chebyshev 结点 [2], 第二类 Chebyshev 结点 [3], 正切结点组等 [4]. 人们在构建新结点组的同时, 也在已有的节点组的基础上改进使得逼近效果越来越好. 如 1998 年, Brutman L[5] 改进 Chebyshev 结点, 并在结点组下证明得到逼近阶数 $O(\frac{1}{n^2})$; 2014 年, 张慧明, 李建俊等 [6] 同样的改进第二类 Chebyshev 结点, 得到调整第二类 Chebyshev 结点, 证明逼近阶为 $O(\frac{1}{n^2})$. 由于 $|x|$ 的有理插值逼近效果很好, 人们开始研究对 $|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 的逼近,2016 年, 张慧明 [7] 在等距结点组下构造有理插值函数 $r_{n,\alpha}(X;x)$, 考虑对 $|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 进行逼近, 最后得到逼近阶为 $O(\frac{1}{n^\alpha\ln n})$. 于是 2017 年，查星星, 胡晓敏等 [8] 应用调整的正

*收稿日期: 2020-04-29 接收日期: 2020-07-30
基金项目: 国家自然科学基金 (61573326); 安徽省高校青年人才支持项目基金 (gxyq2019082); 巢湖学院校级科研项目基金 (XLY-201903).
作者简介: 程一元 (1992–), 男, 安徽安庆, 助教, 主要研究方向: 函数逼近论和机器学习等.
通讯作者: 查星星

切结点组, 得到相同的逼近阶. 2019 年, 程一元, 张永全等 [9] 取作调整的正切结点组, 讨论了 $|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 有理逼近, 提高逼近阶为 $O(\frac{1}{n^{2\alpha}})$.

为了进一步提高正切结点的逼近阶, 本文在结点组 X 取作改进的正切结点组下考虑 Newman-α 型有理算子逼近 $|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 的情况, 证明其逼近阶 $O(\frac{1}{n^{4\alpha}})$, 且说明在该结点下该逼近阶不可改善.

2 相关定义及引理

本文调整的正切结点为 $X=\left\{\tan^4\dfrac{k\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$, Newman-$\alpha$ 型有理算子 [9] 定义为

$$r_{n,\alpha}(X;x)=x^\alpha\frac{p_n(x)-p_n(-x)}{p_n(x)+p_n(-x)},$$

其中 $1\le\alpha=\dfrac{p}{q}<2$, $p_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x_k+x)$. 并且 p,q 分别为奇数, 互素.

同时注意到 $r_{n,\alpha}(X;x)$ 与 $|x|^\alpha$ 都是偶函数, 故研究该结点组下的逼近误差只需考虑 $[0,1]$ 即可, 由此可得

$$|e_{n,\alpha}(X;x)|=||x|^\alpha-r_{n,\alpha}(X;x)|=\left|\frac{2x^\alpha p_n(-x)}{p_n(x)+p_n(-x)}\right|=\frac{2x^\alpha\left|\frac{p_n(-x)}{p_n(x)}\right|}{1+\left|\frac{p_n(-x)}{p_n(x)}\right|}\le\frac{2x^\alpha|h_n(X;x)|}{1-|h_n(X;x)|},$$

其中 $x\in[0,1]$. 为后文研究需要，介绍以下引理.

引理 2.1[8] 设 $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$, 则不等式 $\left|\frac{p_n(-x)}{p_n(x)}\right|\le e^{-xS_1}$, $0\le x\le 1$ 成立.

引理 2.2[9] 当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时, 有 $\frac{1-x}{1+x}>3^{-2x}$.

引理 2.3[6] 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 有 $\frac{2x}{\pi}\le\sin x\le x$.

引理 2.4 当 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{\tan^4\alpha-\tan^4\beta}{\tan^4\alpha+\tan^4\beta}<4\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$.

证 由于 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $0<\tan\beta<\tan\alpha$, 利用 Cauchy 不等式, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\tan^4\alpha-\tan^4\beta}{\tan^4\alpha+\tan^4\beta}&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\cdot\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)^2(\tan^2\alpha+\tan^2\beta)}{\tan^4\alpha+\tan^4\beta}\\&\le\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\cdot\frac{2(\tan^2\alpha+\tan^2\beta)(\tan^2\alpha+\tan^2\beta)}{\tan^4\alpha+\tan^4\beta}\\&\le\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\cdot\frac{4(\tan^4\alpha+\tan^4\beta)}{\tan^4\alpha+\tan^4\beta}\\&=4\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta},\end{aligned}$$

从而引理 2.4 得证.

3 主要结果

定理 3.1 取结点组 $X=\left\{\tan^4\dfrac{k\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$, 对于 $\forall x\in[-1,1]$ 都有下式成立:

$$|e_{n,\alpha}(X;x)|=||x|^\alpha-r_{n,\alpha}(X;x)|=O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right).$$

证明 为后文证明需要，记 $A_n(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}$. 下面分成三种情形进行说明。

(情形 1) 当 $x\in\left[0,\tan^4\dfrac{\pi}{4n}\right]$ 时, 由于不等式 $x\le\tan x\le 2x\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$ 成立, 则有 $x^4\le\tan^4 x\le 16x^4$. 于是

$$\frac{k^4\pi^4}{256n^4}\le\tan^4\frac{k\pi}{4n}\le\frac{k^4\pi^4}{16n^4},\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

成立. 所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{16n^4}{k^4\pi^4}\le A_n(X)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{256n^4}{k^4\pi^4},$$

而有不等式

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^4}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\le\int_1^{n}\frac{dx}{x^4}+1,$$

同时有

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{(n+1)^3}\right]\ge\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{(2)^3}\right]=\frac{7}{24},$$

$$\int_1^{n}\frac{dx}{x^4}+1=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{(n)^3}\right]+1\le\frac{4}{3},$$

可以得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{14n^4}{k^4\pi^4}=\frac{16n^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\ge\frac{16n^4}{\pi^4}\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^4}\ge\frac{14n^4}{3\pi^4},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{256n^4}{k^4\pi^4}=\frac{256n^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\le\frac{256n^4}{\pi^4}\left(\int_1^{n}\frac{dx}{x^4}+1\right)\le\frac{1024n^4}{3\pi^4},$$

从而

$$\frac{14n^4}{3\pi^4}\le A_n(X)\le\frac{1024n^4}{3\pi^4},$$

而

$$h_n(X;x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\tan^4\frac{k\pi}{4n}-x}{\tan^4\frac{k\pi}{4n}+x}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{x}{\tan^4\frac{k\pi}{4n}}}{1+\frac{x}{\tan^4\frac{k\pi}{4n}}}\le e^{-2x\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\frac{k\pi}{4n}}}=e^{-2xA_n(X)},$$

所以

$$\begin{aligned}|e_{n,\alpha}(X;x)|&\le\frac{2x^\alpha h_n(X;x)}{1-h_n(X;x)}\le\frac{2x^\alpha e^{-2xA_n(X)}}{1-e^{-2xA_n(X)}}\\&=\frac{2x^\alpha}{2xA_n(X)-1}\le\frac{2x^\alpha}{2xA_n(X)}=\frac{x^{\alpha-1}}{A_n(X)}\\&\le\frac{(\tan^4\frac{\pi}{4n})^{\alpha-1}}{\frac{14n^4}{3\pi^4}}\le\frac{(\frac{\pi^4}{4^4n^4})^{\alpha-1}\cdot 3\pi^4}{14n^4}\le\frac{C_\alpha}{n^{4\alpha}},\end{aligned}$$

其中 $R_\alpha=\dfrac{3\pi^{4\alpha}}{14\cdot 16^{(\alpha-1)}}$.

(情形 2) 当 $x\in[\tan^4\dfrac{\pi}{4n},\tan^4\dfrac{(n-6)\pi}{4n}]$ 时, 则有 $x_j\le x\le x_{j+1}$ 即

$$\tan^4\frac{j\pi}{4n}\le x\le\tan^4\frac{(j+1)\pi}{4n},\quad (j=1,2,\cdots,n-7),$$

接着借助引理 2.4 和利用等式 $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ 从而有

$$\begin{aligned}
& x^\alpha|h_n(x;x)|\\
= & x^\alpha\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x_k-x}{x_k+x}\right|\le x^\alpha\frac{x-x_j}{x+x_j}\cdot\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}+x}\cdot\frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}+x}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{j+7}-x}{x_{j+7}+x}\\
\le & x^\alpha\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}+x_j}\cdot\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}+x_j}\cdot\frac{x_{j+2}-x_j}{x_{j+2}+x_j}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{j+7}-x_j}{x_{j+7}+x_j}\\
= & x^\alpha\Big(\frac{\tan^4\frac{(j+1)\pi}{4n}-\tan^4\frac{j\pi}{4n}}{\tan^4\frac{(j+1)\pi}{4n}+\tan^4\frac{j\pi}{4n}}\Big)^2\cdot\frac{\tan^4\frac{(j+2)\pi}{4n}-\tan^4\frac{j\pi}{4n}}{\tan^4\frac{(j+2)\pi}{4n}+\tan^4\frac{j\pi}{4n}}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan^4\frac{(j+7)\pi}{4n}-\tan^4\frac{j\pi}{4n}}{\tan^4\frac{(j+7)\pi}{4n}+\tan^4\frac{j\pi}{4n}},
\end{aligned}$$

再结合引理 2.3, 从而上式为:

$$\begin{aligned}
x^\alpha|h_n(x;x)| &\le 4^7\Big(\tan^8\frac{(j+1)\pi}{4n}\Big)^\alpha\cdot\Big(\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{(2j+1)\pi}{4n}}\Big)^2\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{4n}}{\sin\frac{(2j+2)\pi}{4n}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin\frac{7\pi}{4n}}{\sin\frac{(2j+7)\pi}{4n}}\\
&\le 4^7\frac{\pi^{4\alpha}(j+1)^{4\alpha}}{16n^{4\alpha}}\cdot\frac{\frac{\pi^2}{16n^2}}{\frac{(2j+1)^2}{4n^2}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\frac{2j+2}{2n}}\cdot\cdots\cdot\frac{\frac{7\pi}{4n}}{\frac{2j+7}{2n}}\\
&= \frac{4^7\pi^{4\alpha}(j+1)^{4\alpha}}{16n^{4\alpha}}\cdot\frac{\pi^2}{4(2j+1)^2}\cdot\frac{\pi}{2j+2}\cdot\cdots\cdot\frac{7\pi}{2(2j+7)}\\
&\le \frac{4^5\cdot 630\cdot\pi^{4\alpha+8}}{n^{4\alpha}}=\frac{D_\alpha}{n^{4\alpha}}.
\end{aligned}$$

其中 $D_\alpha=4^5\cdot 630\cdot\pi^{4\alpha+8}$. 于是, 可以得到

$$|e_{n,\alpha}(X;x)|\le\frac{2x^\alpha|h_n(X;x)|}{1-|h_n(X;x)|}\le 3x^\alpha|h_n(X;x)|\le\frac{3D_\alpha}{n^{8\alpha}}.$$

(情形 3) 当 $x\in[\tan^4\dfrac{(n-6)\pi}{4n},1]$ 时, 由于 $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\tan^4\dfrac{k\pi}{4n}$, 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4\pi^4}{256n^4}\le\sum_{k=1}^{n}\tan^4\frac{k\pi}{4n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4\pi^4}{16n^4},\quad (k=1,2,\cdots n),$$

所以

$$\frac{\pi^4}{256n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\le S_1\le\frac{\pi^4}{16n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_n(-x)}{p_n(x)}\right| &\le e^{-xS_1} \le e^{-x\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\pi^4}{7680n^4}}\\ &\le e^{-\tan^4\dfrac{(n-6)\pi}{4n}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\pi^4}{7680n^4}}\\ &\le e^{-\dfrac{(n-6)^4\pi^4}{256n^4}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\pi^4}{7680n^4}}\\ &= O\left(\frac{1}{e^n}\right),\end{aligned}$$

所以

$$|e_{n,\alpha}(X;x)| \le \frac{2x^\alpha|h_n(X;x)|}{1-|h_n(X;x)|} \le 3x^\alpha|h_n(X;x)| \le 3|h_n(X;x)| \le O\left(\frac{1}{e^n}\right).$$

综合三面情形 (1)–(3), 可得

$$|e_{n,\alpha}(X;x)| = ||x|^\alpha - r_{n,\alpha}(X;x)| = O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right).$$

即定理 3.1 得证.

由上面定理的证明过程中可以得到, 构造的有理函数 $r_{n,\alpha}(X;x)$ 在情形 1 中的 $x\in[0,\tan^4\dfrac{(n-6)\pi}{4n}]$ 上的逼近阶数较低, 仅有 $O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)$. 但在情形 3 中, $x\in[\tan^4\dfrac{(n-6)\pi}{4n},1]$ 上的这个区间上的逼近阶数较高, 达到了 $O\left(\frac{1}{e^n}\right)$. 于是可以得出 $|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 在改进的正切节点组的有理插值在奇异点 ($|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$ 的唯一的零点) 附近的逼近阶会比较低. 但从总体区间的逼近效果来看, 本文的逼近效果是要高于等距结点组对于 $|x|^\alpha$ 的逼近效果.

本文定义 x 的区间是 $[-1,1]$, 由于是偶函数, 我们只考虑 $[0,1]$, 同时可通过线性代换: $t=(b-a)x+a$, 将 x 的 $[0,1]$ 映射到 t 的 $[a,b]$, 所以在考虑函数逼近问题一般都考虑 $[-1,1]$ 区间.

定理 3.2 取 $x^*=\dfrac{\pi^4}{512n^4}$, 则有 $|e_{n,\alpha}(X;x^*)|\ge\dfrac{C_\alpha'}{n^{6\alpha}}$, 其中 $C_\alpha'=\dfrac{\pi^{4\alpha}}{512^\alpha\cdot3^{4/3}}$.

证明 因为 $x^*\in[0,x_1]$, 且 $\dfrac{x^*}{x_k}\le\dfrac{1}{2},(k=1,2,\cdots n)$, 根据引理 2.2 与不等式有

$$0\le h_n(X;x^*)=\frac{p_n(-x^*)}{p_n(x^*)}\le 1,$$

可以得到

$$h_n(X;x^*)=\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x_k-x^*}{x_k+x^*}\right|\ge 3^{-2x^*\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}\ge 3^{-2x^*\frac{1024n^4}{3\pi^4}}=3^{-4/3},$$

所以有下式:

$$\begin{aligned}|e_{n,\alpha}(X;x^*)| &= \frac{2(x^*)^\alpha h_n(X;x^*)}{1+h_n(X;x^*)} \ge (x^*)^\alpha h_n(X;x^*)\\ &\ge \frac{\pi^{4\alpha}}{512^\alpha\cdot n^{4\alpha}}\cdot 3^{-4/3}=\frac{C_\alpha'}{n^{4\alpha}},\end{aligned}$$

Table 1 不同结点组下绝对误差的比较

组别	x	α	n	本文结点组	文献 [9] 结点组	文献 [7] 结点组
1	0.01	1.5	10	1.3327×10^{-5}	6.6294×10^{-5}	7.1483×10^{-4}
	0.01	1.5	20	2.7101×10^{-7}	1.3045×10^{-5}	3.8135×10^{-4}
	0.01	1.5	30	4.0135×10^{-9}	1.9480×10^{-6}	1.6337×10^{-6}
2	0.01	1.1	20	1.7245×10^{-6}	8.2308×10^{-5}	0.0024
	0.01	1.4	20	4.2952×10^{-7}	2.0675×10^{-5}	6.0440×10^{-4}
	0.01	1.7	20	1.0789×10^{-7}	5.1933×10^{-6}	1.5182×10^{-4}

即定理 3.2 得证.

从定理 3.2 的证明过程中可以看出, 构造的有理函数 $r_{n,\alpha}(X;x)$ 在改进的正切节点组下对 $|x|^\alpha$ 的逼近效果是不可提高的, 即该逼近阶是在本文的节点组下的最好效果.

4 数值计算

为了从数据上说明本文改进的结点组的逼近效果要优于其他前人构造的结点组, 这里我们选取不同的 α 和 n, 将计算结果与真实值进行比较, 得到如表 1 所示的结果.

从实验结果可以看出, 不管 α 和 n 怎么变化, 本文结点组下得到的相对误差要优于其他两种结点组, 并且我们还可以看出 α 和 n 取得值越大, 逼近的效果会更好, 这与我们理论上的逼近阶 $O\left(\dfrac{1}{n^{4\alpha}}\right)$ 是相一致的.

5 结束语

本文主要将正切结点组改进为 $X=\left\{\tan^4\dfrac{k\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$, 通过构造的有理算子 $r_{n,\alpha}(X;x)$ 来逼近, 最后使其逼近阶提高为 $O(\frac{1}{n^{4\alpha}})$, 该结果不仅是优于结点组取作正切结点, 而且是好于等距结点组等的情形.

参 考 文 献

[1] Newman D J. Rational approximation to $|x|$ [J]. The Michigan Mathematical Journal, 1964, 11(1): 11–14.

[2] Brutman L, Passow E. Rational interpolation to $|x|$ at the Chebyshev nodes[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1997, 56(1): 81–86.

[3] 张慧明, 李建俊. $|x|$ 在第二类 Chebyshev 结点的有理逼近 [J]. 郑州大学学报 (理学版), 2010, 42(2): 1–3.

[4] 张慧明, 门玉梅, 李建俊. $|x|$ 在正切结点组的有理插值 [J]. 天津师范大学学报 (自然科学版), 2011, 31(4): 5–6.

[5] Brutman L. On rational interpolation to $|x|$ at the adjusted Chebyshev nodes[J]. Journal of Approximation Theory, 1998, 95(1): 146–152.

[6] 张慧明, 李建俊, 段继光. $|x|$ 在调整的第二类 Chebyshev 结点组的有理插值 [J]. 数学杂志, 2014, 34(3): 509–514.

[7] 张慧明, 段生贵, 李建俊. $|x|^\alpha(1 \le \alpha < 2)$ 在等距结点的有理插值 [J]. 华中师范大学学报 (自然科学版), 2016, 50(01): 21–23+27.

[8] 查星星, 胡晓敏, 王徐炜. $|x|$ 在调整的正切结点组的有理逼近 [J]. 杭州电子科技大学学报: 自然科学版, 2017(03): 103–106.

[9] 程一元, 张永全, 查星星. $|x|^\alpha(1 \le \alpha < 2))$ 在调整的正切节点组的有理逼近 [J]. 工程数学学报, 2019, 36(05): 551–556.

[10] Brutman L, Passow E. On rational interpolation to$|x|$ [J]. Constructive Approximation, 1997, 13(3): 381–391.

[11] Han X L. On the order of approximation for the rational interpolation to $|x|$ [J]. Approximation Theory & Its Applications, 2002, 18(2): 58–64.

ON RATIONAL APPROXIMATION TO $|x|^\alpha(1 \le \alpha < 2)$ AT THE IMPROVED TANGENT NODES

CHENG Yi-yuan[1] ,ZHA Xing-xing[1] , ZHANG Yong-quan[2]

(*1. School of Mathematics and Statistics, Chaohu University, Anhui Hefei 238024, China*)

(*2. School of Data Sciences, Zhejiang University of Finance & Economics, Zhejiang Hangzhou 310018, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of rational approximation of $|x|^\alpha$ in the rational approximation of the improved tangent nodes. By using the method of changing nodes we obtain its approximationorder as $O(\frac{1}{n^{4\alpha}})$. The result not only improves the degree of approximation of the results of relevant scholars' study at tangent nodes, but also is better than which of the nodes taking for quidistant nodes, the Chebyshev nodes of the first kind and the Chebyshev nodes of the second kind.

Keywords: the improved tangent nodes; Newman type rational operator; rational approximation

2010 MR Subject Classification: 41A05; 41A20; 41A25