

## 一类含多奇性项的 Grushin 型算子方程解的渐近性质

张金国, 杨登允

(江西师范大学数学与统计学院, 江西 南昌 330022)

**摘要:** 本文研究了一类含多个奇性项的 Grushin 型算子方程非平凡解的渐近性质问题. 当方程的非线性项满足临界指数增长条件时, 利用 Moser 迭代方法和分析技巧, 获得了方程的非平凡解在奇点处的渐近性质, 推广了 Laplace 算子的相关结果.

**关键词:** Grushin 型算子; 多奇性项; 渐近性质; Moser 迭代

MR(2010) 主题分类号: 35J70; 35B40      中图分类号: O175.29

文献标识码: A      文章编号: 0255-7797(2021)01-0079-09

### 1 引言

本文主要研究如下含多个奇性项和临界指数增长的非线性次椭圆型方程的非平凡解在奇点处的渐近性质

$$\begin{cases} -(\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y)u - \mu \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 u}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} = f(z, u), & z \in \Omega, \\ u = 0, & z \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^N := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  中的开集,  $k \geq 2$ ,  $a_i \in \Omega$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 且互不相同,  $0 \leq \mu < \mu_G := (\frac{Q-2}{2})^2$ , 这里  $(\frac{Q-2}{2})^2$  是最佳 Hardy 常数;  $\alpha > 0$ ,  $\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$  是 Grushin 型算子,  $Q = m + (\alpha + 1)n$  是空间  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  的齐次维数. 对任意的  $z = (x, y)$ ,  $a_i = (a_i^1, a_i^2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ,  $\psi_i = |\nabla_\alpha d(z, a_i)| = (\frac{|x-a_i^1|}{d(z, a_i)})^\alpha$ , 其中  $d(z, a_i)$  表示在 Grushin 向量场意义下点  $z$  与点  $a_i$  之间的距离, 其定义如下:

$$d(z, a_i) = \left( |x - a_i^1|^{2(\alpha+1)} + (\alpha + 1)^2 |y - a_i^2|^2 \right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}. \quad (1.2)$$

此外, 非线性项  $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是 Carathéodory 函数, 且满足

$$|f(z, t)| \leq C(|t|^{q-1} + |t|^{2^*-1}), \quad \forall (z, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

其中  $C > 0$  是常数,  $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$  是临界 Sobolev 指数.

记

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m), \quad X_{m+j} = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

\*收稿日期: 2020-06-01      接收日期: 2020-09-16

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11761049).

作者简介: 张金国 (1980-), 男, 湖北枣阳, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程.

则 Grushin 梯度为  $\nabla_\alpha = (X_1, \dots, X_N)$ , 由此 Grushin 型算子可表示为

$$\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y = \operatorname{div}_\alpha(\nabla_\alpha) = \sum_{i=1}^m X_i^2 + \sum_{j=1}^n X_{m+j}^2. \quad (1.4)$$

显然: 当  $x \neq 0$  时, 该算子是椭圆型的, 并且在流形  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  上是退化的; 当  $\alpha$  是非负整数时, Grushin 算子是 Hörmander 型的. 其它相关知识可以参见 [1-5] 等.

对任意的  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , 范数  $\|u\|_{D_\alpha^{1,2}} = (\int_\Omega |\nabla_\alpha u|^2 dz)^{\frac{1}{2}}$  下的  $C_0^\infty(\Omega)$  完备化空间记为  $D_\alpha^{1,2}(\Omega)$ . 对  $\forall u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega)$ , 设方程 (1.1) 的能量泛函为

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_\alpha u|^2 dz - \frac{\mu}{2} \int_\Omega \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 |u|^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz - \int_\Omega F(z, u) dz, \quad (1.5)$$

其中  $F(z, t) = \int_0^t f(z, \eta) d\eta$ . 若  $u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega)$  是方程 (1.1) 的解, 则对任意  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  有

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla_\alpha u \nabla_\alpha v dz - \mu \int_\Omega \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 uv}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz - \int_\Omega f(z, u) v dz. \quad (1.6)$$

为了应用变分方法处理 (1.1), 我们需要如下的 Hardy 不等式:

$$\int_\Omega |\nabla_\alpha u|^2 dz \geq \mu_G \int_\Omega \psi^2 \frac{|u|^2}{d(z, a)^2} dz, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.7)$$

其中  $\mu_G = (\frac{Q-2}{2})^2$  是 Grushin 向量场下 Hardy 型不等式的最佳常数,  $a \in \Omega$ .

在文 [6] 中作者研究了如下含多个奇性项的退化次椭圆问题:

$$\begin{cases} -\Delta_G u - \sum_{i=1}^k \mu_i \frac{\psi_i^2}{d(z, a_i)^2} u = f(z, u), & z \in \Omega, \\ u = 0, & z \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.8)$$

其中  $\Omega$  是 Carnot 群上的开集,  $-\Delta_G$  是 Carnot 群上的 Laplace 算子,  $k \geq 2$ , 实数  $a_i \in \Omega$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 互不相同,  $\mu_i \geq 0$  且满足  $\sum_{i=1}^k \mu_i < \mu_C = (\frac{C-2}{2})^2$ ,  $C$  是 Carnot 群的齐次维数. 方程 (1.8) 与如下 Carnot 群上的 Hardy 型不等式有关:

$$\int_\Omega |\nabla_G u|^2 dz \geq \sum_{i=1}^k \mu_i \int_\Omega \psi_i^2 \frac{|u|^2}{d(z, a_i)^2} dz, \quad \forall u \in S_0^1(\Omega). \quad (1.9)$$

类似于 Carnot 群上的证明方法, 可以建立 Grushin 向量场下的多奇性项 Hardy 型不等式:

$$\int_\Omega |\nabla_\alpha u|^2 dz \geq \sum_{i=1}^k \mu_i \int_\Omega \psi_i^2 \frac{|u|^2}{d(z, a_i)^2} dz, \quad \forall u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega). \quad (1.10)$$

结合 (1.7), (1.10) 式, 可以得到如下的广义 Hardy 型不等式:

$$\int_\Omega |\nabla_\alpha u|^2 dz \geq \mu_G^* \int_\Omega \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 |u|^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz, \quad \forall u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega), \quad (1.11)$$

其中  $\mu_G^*$  是广义 Hardy 型不等式的最佳常数. 不等式 (1.11) 的证明将在第二节中给出.

假设  $k \geq 2$ , 对任意的  $i = 1, 2, \dots, k$ , 定义

$$\mu_i = \frac{\mu}{\prod_{j=1, j \neq i}^k d(a_i, a_j)^2}.$$

利用 Moser 迭代技巧, 本文讨论了方程 (1.1) 的非平凡解在奇点处的渐近性质. 结论如下.

**定理 1.1** 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  中的开集,  $a_j \in \Omega$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) 且互不相等.  $0 < \mu < \mu_G^*$ ,  $\sum_{i=1}^k \mu_i < (\frac{Q-2}{2})^2$ . 若  $u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega)$  是方程 (1.1) 的非平凡弱解, 则

(i) 存在常数  $C, \rho_i > 0$  使得

$$|u(z)| \leq \frac{C}{d(z, a_i)^{\frac{Q-2}{2} - \sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \mu_i}}}, \quad \forall z \in B_d(a_i, \rho_i) \setminus \{a_i\}, \quad (1.12)$$

其中  $B_d(a_i, \rho_i)$  表示在距离  $d$  的意义下以  $a_i$  为圆心, 以  $\rho_i$  为半径的球, 且  $a_j \notin B_d(a_i, \rho_i)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ .

(ii) 存在常数  $C > 0$  使得

$$|u(z)| \leq C \sum_{i=1}^k \frac{1}{d(z, a_i)^{\frac{Q-2}{2} - \sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \mu_i}}}, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}. \quad (1.13)$$

在欧式空间中, 关于 Laplace 算子问题的相关结论可参考 [7]. 利用 Moser 迭代和分析技巧, 我们在第二节给出定理 1.1 的证明. 对于退化的 Grushin 型算子和 Carnot 群上的次椭圆算子而言, 该结论依然是新的.

## 2 定理 1.1 的证明

首先给出广义 Hardy 型不等式 (1.11) 的证明.

**不等式 (1.11) 的证明** 令  $\rho = \min\{\frac{1}{2}d(a_i, a_l), d(a_i, \partial\Omega)\}$ ,  $i, l = 1, 2, \dots, k, i \neq l$ . 则  $B_d(a_i, \rho) \cap B_d(a_l, \rho) = \emptyset$ , 其中  $B_d(a, \rho) = \{x : x \in \Omega, d(x, a) < \rho\}$ . 由不等式 (1.7) 和  $\psi_i < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 |u|^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz &= \sum_{i=1}^k \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 |u|^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz + \int_{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k B_d(a_i, \rho)} \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 |u|^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz \\ &\leq \frac{1}{\rho^{2(k-1)}} \sum_{i=1}^k \int_{B_d(a_i, \rho)} \psi_i^2 \frac{|u|^2}{d(z, a_i)^2} dz + \frac{1}{\rho^{2k}} \int_{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k B_d(a_i, \rho)} |u|^2 dz \\ &\leq \frac{1}{\rho^{2(k-1)}} \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d(z, a_j)^2} dz + \frac{1}{\rho^{2k}} \int_{\Omega} |u|^2 dz \\ &\leq C(\Omega, k, \rho) \|u\|_{D_\alpha^{1,2}}^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

因此, 不等式 (1.11) 得证. 上述结论表明广义 Hardy 型不等式的最佳常数可如下定义:

$$\mu_G^* = \inf_{u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{D_\alpha^{1,2}}^2}{\int_\Omega \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 |u|^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} dz} \geq \frac{1}{C(\Omega, k, \rho)} > 0.$$

为了估计方程 (1.1) 的非平凡解在极点处的渐近性质, 我们需要如下的  $L^p$  估计.

**引理 2.2** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  是 0 的有界领域,  $0 \leq \mu < \mu_G^*$ ,  $\sum_{i=1}^k \mu_i < \mu_G$ . 假设  $V \in L^{\frac{Q}{2}}(\Omega)$ ,  $g \in L^q(\Omega)$ ,  $q \geq 2$ , 常数  $\nu$  使得线性算子  $-(\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y) - \mu \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} - V + \nu$  是正定的. 若  $u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega)$  是方程

$$-(\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y)u - \mu \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} u - Vu + \nu u = g, \quad z \in \Omega, \quad (2.2)$$

的非平凡解, 则  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $\forall 1 \leq p \leq p_{\text{lim}} = 2^* \min \left\{ \frac{q}{2}, \frac{\frac{Q-2}{2}}{\frac{Q-2}{2} - \sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \sum_{i=1}^k \mu_i}} \right\}$ .

**证明** 引理 2.2 的证明与 [1, 命题 3.2] 或 [7, 引理 3.1] 证明过程类似. 此处略.

为了研究方程解在奇点处的渐近性质, 我们将  $\Omega$  做如下分解

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_k,$$

并且  $a_i \in \Omega_i$ ,  $a_j \notin \bar{\Omega}_i$  ( $i \neq j$ ),  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**定理 1.1 的证明** 设  $u \in D_\alpha^{1,2}(\Omega)$  是方程 (1.1) 的解. 令

$$v := d(z, a_i)^\beta u, \quad (2.3)$$

其中  $\beta = \frac{Q-2}{2} - \sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \mu_i}$  是方程  $\beta^2 - \beta(Q-2) + \mu_i = 0$  的解. 则由 Hardy 不等式可知  $v \in D_\alpha^{1,2}(\Omega, d(z, a_i)^{-2\beta} dz)$ , 并且

$$\begin{aligned} (\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y)u &= (\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y)(d(z, a_i)^{-\beta} v) \\ &= v[(\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y)d(z, a_i)^{-\beta}] + d(z, a_i)^{-\beta}[(\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y)v] \\ &\quad + 2\langle \nabla_\alpha d(z, a_i)^{-\beta}, \nabla_\alpha v \rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} (\Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y)d(z, a_i)^{-\beta} &= \psi_i^2 [\beta(\beta+1)d(z, a_i)^{-\beta-2} + \frac{Q-1}{d(z, a_i)}(-\beta)d(z, a_i)^{-\beta-1}] \\ &= \psi_i^2 [\beta(\beta+1)d(z, a_i)^{-\beta-2} - \beta(Q-1)d(z, a_i)^{-\beta-2}] \\ &= \psi_i^2 [\beta^2 - \beta(Q-2)]d(z, a_i)^{-\beta-2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

从而将  $u = d(z, a_i)^{-\beta}v$  带入方程 (1.1) 的左边, 由 (2.4),(2.5) 式可得

$$\begin{aligned}
& -(\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y)u - \mu \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2 u}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} \\
&= -v\psi_i^2[\beta^2 - \beta(Q - 2)]d(z, a_i)^{-\beta-2} - d(z, a_i)^{-\beta}[(\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y)v] \\
& \quad - 2\langle \nabla_\alpha d(z, a_i)^{-\beta}, \nabla_\alpha v \rangle - \mu \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} d(z, a_i)^{-\beta}v \\
&= -v\psi_i^2[\beta^2 - \beta(Q - 2) + \mu_i]d(z, a_i)^{-\beta-2} + \frac{\mu_i \psi_i^2 v}{d(z, a_i)^{\beta+2}} - \mu \frac{\prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} d(z, a_i)^{-\beta}v \quad (2.6) \\
& \quad - d(z, a_i)^{-\beta}[(\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y)v] - 2\langle \nabla_\alpha d(z, a_i)^{-\beta}, \nabla_\alpha v \rangle \\
&= -d(z, a_i)^{-\beta}[(\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y)v] - 2\langle \nabla_\alpha d(z, a_i)^{-\beta}, \nabla_\alpha v \rangle \\
& \quad + \frac{1}{d(z, a_i)^\beta} \left( \frac{\mu_i \psi_i^2}{d(z, a_i)^2} - \frac{\mu \prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} \right) v.
\end{aligned}$$

结合  $f(z, u) = f(z, d(z, a_i)^{-\beta}v)$  及 (1.1),(2.6) 可得

$$\begin{aligned}
& -d(z, a_i)^{-\beta}[(\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y)v] - 2\langle \nabla_\alpha d(z, a_i)^{-\beta}, \nabla_\alpha v \rangle + \frac{1}{d(z, a_i)^\beta} \left( \frac{\mu_i \psi_i^2}{d(z, a_i)^2} - \frac{\mu \prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} \right) v \\
&= f(z, d(z, a_i)^{-\beta}v). \quad (2.7)
\end{aligned}$$

在 (2.7) 式两边同时乘上  $d(z, a_i)^{-\beta}$ , 可得

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div}_\alpha (d(z, a_i)^{-2\beta} \nabla_\alpha v) = d(z, a_i)^{-\beta} f(z, d(z, a_i)^{-\beta}v) \\
& \quad - \frac{1}{d(z, a_i)^{2\beta}} \left( \frac{\mu_i \psi_i^2}{d(z, a_i)^2} - \frac{\mu \prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} \right) v, \quad z \in \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

取  $\rho_i > 0$ , 使得  $B_d(a_i, \rho_i) \subset \Omega$ , 并且  $a_j \notin \bar{B}_d(a_i, \rho_i)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ ,  $i \neq j$ . 令  $\rho \in (0, \rho_i)$ . 定义截断函数  $\eta_i \in C_0^\infty(B_d(a_i, \rho), [0, 1])$ , 使其对  $\forall z \in B_d(a_i, r)$  有  $\eta(z) = 1$ ,  $|\nabla_\alpha \eta| \leq \frac{4}{\rho-r}$ , 其中  $r \in (0, \rho)$ . 定义函数

$$v_L = \min\{|v|, L\}, \quad \phi := \eta^2 v v_L^{2(s-1)}, \quad (2.9)$$

其中  $L, s > 1$  在后面给定. 将试验函数  $\phi$  代入 (2.8) 式得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \nabla_\alpha v, \nabla_\alpha \phi \rangle d(z, a_i)^{-2\beta} dz &= \int_\Omega d(z, a_i)^{-\beta} f(z, d(z, a_i)^{-\beta}v) \phi dz \\
& \quad - \int_\Omega \frac{v\phi}{d(z, a_i)^{2\beta}} \left( \frac{\mu_i \psi_i^2}{d(z, a_i)^2} - \frac{\mu \prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} \right) dz. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

将  $\phi$  的表达式代入 (2.10) 式左边, 计算可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\langle \nabla_\alpha v, \nabla_\alpha \phi \rangle}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz &= \int_\Omega \frac{2\eta v v_L^{2(s-1)} \langle \nabla_\alpha \eta, \nabla_\alpha v \rangle}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\
& \quad + \int_\Omega \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + 2(s-1) \int_\Omega \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

由 Young 不等式, 对充分小的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $C_1(\varepsilon) > 0$  使得

$$\left| \int_{\Omega} \frac{2\eta v v_L^{2(s-1)} \langle \nabla_{\alpha} \eta, \nabla_{\alpha} v \rangle}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \right| \leq \varepsilon \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + C_1(\varepsilon) \int_{\Omega} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} \eta|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \quad (2.12)$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla_{\alpha} v, \nabla_{\alpha} \phi \rangle}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz &\geq (1 - \varepsilon) \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + 2(s-1) \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\quad - C_1(\varepsilon) \int_{\Omega} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} \eta|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz. \end{aligned} \quad (2.13)$$

将  $\phi$  的表达式代入 (2.10) 式右边第一项中, 利用函数  $f$  满足的条件 (1.3) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{f(z, d(z, a_i)^{-\beta} v) \phi}{d(z, a_i)^{\beta}} dz &= \int_{\Omega} \frac{f(z, d(z, a_i)^{-\beta} v) \eta^2 v v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{\beta}} dz \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{(C(|d(z, a_i)^{-\beta} v|^{q-1} + |d(z, a_i)^{-\beta} v|^{2^*-1})) \eta^2 v v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{\beta}} dz \\ &= C \left( \int_{\Omega} \frac{|v|^q \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{q\beta}} dz + \int_{\Omega} \frac{|v|^{2^*} \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^*\beta}} dz \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

对于上式第一项利用不等式  $t^q \leq t^2 + t^{2^*}$  ( $q \in [2, 2^*)$ ) 可得

$$\frac{|v|^q}{d(z, a_i)^{q\beta}} \leq \frac{v^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} + \frac{|v|^{2^*}}{d(z, a_i)^{2^*\beta}}. \quad (2.15)$$

从而, 存在  $C_1, C_2 > 0$  使得

$$\int_{\Omega} \frac{f(z, d(z, a_i)^{-\beta} v) \phi}{d(z, a_i)^{\beta}} dz \leq C_1 \int_{\Omega} \frac{v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + C_2 \int_{\Omega} \frac{|v|^{2^*} \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^*\beta}} dz. \quad (2.16)$$

最后, 将  $\phi$  的表达式代入 (2.10) 式右边第二项中, 利用  $\mu_i$  的定义, 中值定理, Young 不等式和  $\psi_i < 1$  可得

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} \frac{v \phi}{d(z, a_i)^{2\beta}} \left( \frac{\mu \prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} - \frac{\mu_i \psi_i^2}{d(z, a_i)^2} \right) dz \right| = \left| \int_{\Omega} \frac{\psi_i^2 v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2(1+\beta)}} \left( \frac{\mu \prod_{j \neq i, j=1}^k \psi_j^2}{\prod_{j \neq i, j=1}^k d(z, a_j)^2} - \mu_i \right) dz \right| \\ &\leq \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\psi_i^2 v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2(1+\beta)}} \left| \frac{\mu}{\prod_{j \neq i, j=1}^k d(z, a_j)^2} - \frac{\mu}{\prod_{j \neq i, j=1}^k d(a_i, a_j)^2} \right| dz \\ &\leq C_3 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\psi_i^2 v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2(1+\beta)}} d(z, a_i) dz = C_3 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\psi_i v \eta v_L^{s-1}}{d(z, a_i)^{1+\beta}} \frac{\psi_i v \eta v_L^{s-1}}{d(z, a_i)^{\beta}} dz \\ &\leq \frac{\varepsilon C_3}{2} \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\psi_i^2 v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2(1+\beta)}} dz + \frac{C_3 C_2(\varepsilon)}{2} \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\psi_i^2 v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz, \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中  $C_3, C_2(\varepsilon)$  是正常数.

下面利用如下形式的加权 Sobolev 不等式 [3] 对 (2.17) 的右端项做进一步的处理:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} \psi^\tau \frac{|d(z)^a u|^{2^*(\tau)}}{d(z)^\tau} dz \right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \leq C(\tau, a, Q) \int_{\mathbb{R}^N} |d(z)^a \nabla_\alpha u|^2 dz, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (2.18)$$

其中  $0 \leq \tau \leq 2, a > \frac{2-Q}{2}, C(\tau, a, Q) > 0$  是常数. 从而, 在 (2.18) 式中取  $\tau = 2, a = -\beta$ , 存在正常数  $C_4$  使得

$$\begin{aligned} \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\psi_i^2 v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2(1+\beta)}} dz &\leq C_4 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{|\nabla_\alpha(\eta v v_L^{s-1})|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\leq C_4 \left( 2 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha \eta|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + 2 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \right. \\ &\quad \left. + 2(s-1)^2 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v^2 v_L^{2(s-2)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

因此, 结合 (2.17), (2.19) 式, (2.10) 式右端第二项满足

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} \frac{v\phi}{d(z, a_i)^{2\beta}} \left( \frac{\mu \prod_{i=1}^k \psi_i^2}{\prod_{i=1}^k d(z, a_i)^2} - \frac{\mu_i \psi_i^2}{d(z, a_i)^2} \right) dz \right| \\ &\leq (\varepsilon C_5 + C_3(\varepsilon)) \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} (\eta^2 + |\nabla_\alpha \eta|^2)}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\quad + \varepsilon C_5 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + \varepsilon (s-1)^2 C_5 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v^2 v_L^{2(s-2)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz. \end{aligned} \quad (2.20)$$

其中  $C_5 = C_3 C_4, C_3(\varepsilon) = \frac{1}{2} C_3 C_2(\varepsilon)$ .

将 (2.13), (2.16), (2.20) 式代入 (2.10), 可得

$$\begin{aligned} &(1-\varepsilon) \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + 2(s-1) \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz - C_1(\varepsilon) \int_{\Omega} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha \eta|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} \frac{v^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + C_2 \int_{\Omega} \frac{|v|^{2^*} \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz + (\varepsilon C_5 + C_3(\varepsilon)) \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} (\eta^2 + |\nabla_\alpha \eta|^2)}{d(z, a_j)^{2\beta}} dz \\ &\quad + \varepsilon C_5 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + \varepsilon (s-1)^2 C_5 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v^2 v_L^{2(s-2)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} \frac{|v|^{2^*} \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz + C_4(\varepsilon) \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} (\eta^2 + |\nabla_\alpha \eta|^2)}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\quad + \varepsilon C_5 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + \varepsilon (s-1)^2 C_5 \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

取  $\varepsilon = \min\{\frac{1}{1+2C_5}, \frac{1}{C_5(s-1)}\}$ , 则存在常数  $C_6, C_7 > 0$  和  $C_5(\varepsilon) > 0$  使得

$$\begin{aligned} &C_6 \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + C_7 \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_\alpha v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} \frac{|v|^{2^*} \eta^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz + C_5(\varepsilon) \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{v^2 v_L^{2(s-1)} (\eta^2 + |\nabla_\alpha \eta|^2)}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz. \end{aligned} \quad (2.22)$$

令  $w = \eta v v_L^{s-1}$ . 将  $w$  代入 (2.18) 式, 利用 (2.22) 式及  $s > 1$  可得

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \frac{|\eta v v_L^{s-1}|^{2^*}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C_8 \int_{\Omega} \frac{|\nabla_{\alpha}(\eta v v_L^{s-1})|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\leq 2C_8 \left( \int_{\Omega} \frac{|\nabla_{\alpha} \eta|^2 v^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} + \int_{\Omega} \frac{\eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} v|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{(s-1)^2 \eta^2 v_L^{2(s-1)} |\nabla_{\alpha} v_L|^2}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \right) \\ &\leq sC_9 \int_{\Omega} \frac{(\eta^2 + |\nabla_{\alpha} \eta|^2) v^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz + C_{10}s \int_{\Omega} \frac{\eta^2 |v|^{2^*} v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz. \end{aligned} \quad (2.23)$$

选取  $q \in \left( \frac{Q}{2}, \frac{Q(Q-2)}{2(Q-2-2\sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \sum_{i=1}^k \mu_i})} \right)$ , 使其满足  $(2^* - 2)q < \frac{2Q}{Q-2-2\sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \sum_{i=1}^k \mu_i}}, 2 < \frac{2q}{q-1} < 2^*$ .

类似文 [8] 的计算方法, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在常数  $C_{11} > 0$  使得

$$\int_{\Omega} \frac{\eta^2 |v|^{2^*} v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \leq C_{11} \varepsilon^2 \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\eta v v_L^{s-1}}{d(z, a_i)^{\beta}} \right|^{2^*} dz \right)^{\frac{2}{2^*}} + C_{11} \varepsilon^{-\frac{2Q}{2q-Q}} \int_{\Omega} \left| \frac{\eta v v_L^{s-1}}{d(z, a_i)^{\beta}} \right|^2 dz. \quad (2.24)$$

将 (2.24) 式代入 (2.23) 式中 并取  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2C_{10}C_{11}s}}$ , 则有

$$\left( \int_{\Omega} \frac{|\eta v v_L^{s-1}|^{2^*}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C_{12} s^{\frac{2q}{2q-Q}} \int_{\Omega} \frac{(\eta^2 + |\nabla_{\alpha} \eta|^2) |v|^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz, \quad (2.25)$$

其中  $C_{12} = C_9 + (C_{10}C_{11})^{\frac{2q}{2q-Q}} > 0$ . 在 (2.25) 式中应用  $v_L$  和  $\eta$  的性质可得

$$\begin{aligned} \left( \int_{B_d(a_i, r)} \frac{|v|^2 v_L^{2^* s-2}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \left( \int_{\Omega} \frac{\eta^{2^*} |v|^2 v_L^{2^* s-2}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\leq C_{12} s^{\frac{2q}{2q-Q}} \int_{\Omega} \frac{(\eta^2 + |\nabla_{\alpha} \eta|^2) |v|^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2\beta}} dz \\ &\leq \frac{C_{12} r^{2^* - 2} s^{\frac{2q}{2q-Q}}}{(\rho - r)^2} \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{(\eta^2 + |\nabla_{\alpha} \eta|^2) |v|^2 v_L^{2(s-1)}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \\ &\leq C_{13} s^{\frac{2q}{2q-Q}} \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{|v|^2 v_L^{2s-2}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz. \end{aligned} \quad (2.26)$$

取  $s_0 \in \left( \frac{Q}{Q-2}, \frac{Q}{Q-2-2\sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \sum_{i=1}^k \mu_i}} \right)$ . 则计算可得  $\frac{2Q}{Q-2} < 2s_0 < \frac{2Q}{Q-2-2\sqrt{(\frac{Q-2}{2})^2 - \sum_{i=1}^k \mu_i}}$ . 从

而, 由引理 2.2 知, 对任意的  $u \in D_{\alpha}^{1,2}(\Omega)$  有  $\int_{\Omega} |u|^{2s_0} dz < +\infty$ .

取序列  $s_j = s_0 \left(\frac{2^*}{2}\right)^j > 1, \forall j = 0, 1, 2, \dots$ , 将  $s_j$  代入 (2.26) 式, 利用 Moser 迭代技巧得

$$\begin{aligned} &\left( \int_{B_d(a_i, r)} \frac{|v|^2 v_L^{2s_{j+1}-2}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \right)^{\frac{1}{2s_{j+1}}} \\ &\leq C_{13}^{\sum_{k=0}^j \frac{1}{2^* s_k}} (s_0)^{\frac{q}{s_0(2q-Q)}} \sum_{k=0}^j \left(\frac{2^*}{2}\right)^k \left(\frac{2^*}{2}\right)^{\frac{q}{s_0(2q-Q)}} \sum_{k=0}^j j \left(\frac{2^*}{2}\right)^k \times \left( \int_{B_d(a_i, \rho)} \frac{|v|^2 v_L^{2s_0-2}}{d(z, a_i)^{2^* \beta}} dz \right)^{\frac{1}{2s_0}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

因为级数  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{s_k}}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{2^*})^k$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} j(\frac{2}{2^*})^k$  是收敛的, 所以, 对 (2.27) 式取极限  $j \rightarrow \infty$ , 可知: 存在不依赖于  $L$  的常数  $C > 0$  使得  $\|v\|_{L^\infty(B_{\rho_0})} \leq C$ . 因此, 由  $v$  的定义可得不等式 (1.12) 成立, 进而可得 (1.13) 式亦成立. 定理 1.1 得证.

### 参 考 文 献

- [1] Loiudice A. Asymptotic estimates and nonexistence results for critical problems with Hardy term involving Grushin-type operators[J]. *Annali di Mat. Pura ed Applicata*, 2019, 198(6): 1909–1930.
- [2] Bonfiglioli A, Lanconelli E, Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their Sub-Laplacians[M]. New York: Springer, 2007.
- [3] Dou J, Niu P. Hardy–Sobolev type inequalities for generalized Baouendi-Grushin operators[J]. *Miskolc Math Notes*, 2007, 8(1): 73–77.
- [4] Monti R, Morbidelli D. Kelvin transform for Grushin operators and critical semilinear equations[J]. *Duke Math J*, 2006, 131(1): 167–202.
- [5] Monti R. Sobolev inequalities for weighted gradients[J]. *Commun Partial Differ Equ*, 2006, 31(10): 1479–1504.
- [6] Loiudice A. Local behavior of solutions to sub-elliptic problems with Hardy potential on Carnot groups[J]. *Mediterr J Math*, 2018, 15(3): 81, <http://doi.org/10.1007/s0009-018-1126-8>.
- [7] Kang D. On the elliptic problems involving multi-singular inverse square potentials and critical Sobolev exponent[J]. *Nonlinear Analysis*, 2008, 68(10): 3050–3066.
- [8] Han P. Asymptotic behavior of solutions to semilinear elliptic equations with Hardy potential[J]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2007, 135(2): 365–372.

## ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTION TO GRUSHIN-TYPE OPERATOR PROBLEMS WITH MULTI-SINGULAR POTENTIALS

ZHANG Jin-guo, YANG Deng-yun

(*School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

**Abstract:** In this paper, we investigate a Grushin-type operator problem involving the multi-singular potentials. By using the Moser iteration method and analytic techniques, the asymptotic properties of the nontrivial solutions at the singular points are obtained. These results generalize the related results of the Laplacian operator.

**Keywords:** Grushin-type operator; multi-singular potentials; asymptotic behavior; Moser iteration

**2010 MR Subject Classification:** 35J70; 35B40