

带折现率多险种离散时间风险模型的破产问题

于莉¹, 詹晓琳², 王青芳¹

(1. 合肥工业大学数学学院, 安徽 合肥 230009)

(2. 上海第二工业大学理学院, 上海 201209)

摘要: 本文研究了理赔量具有一阶自回归结构以及在此条件下引入折现率和多险种的修正的离散时间金融风险模型, 利用两种不同的方法, 获得了破产前最大盈余、破产前盈余、破产后赤字及它们的联合分布所满足的递归式方程和破产概率所满足的积分方程, 最后通过数据模拟说明了该模型的实际意义, 推广了经典离散时间金融风险模型的结构和破产问题.

关键词: 折现率; 多险种; 一阶自回归结构; 破产后赤字; 破产前盈余; 破产概率

MR(2010) 主题分类号: 60E05

中图分类号: O221.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)06-0737-09

1 引言

文献 [1] 讨论了带有常利率下的离散时间保险风险模型的破产前盈余分布等破产问题. 文献 [2] 研究独立同分布利率下的离散时间风险模型中破产概率的问题. 文献 [3] 在具有 Markov 利率的条件下, 讨论得出了离散时间风险模型的破产概率满足的微积分方程及广义的 Lundberg 不等式. 文献 [4] 研究理赔总量具有相关条件下的离散时间风险模型, 通过对经典模型的修正得到了破产发生时刻和最终破产概率的定义, 并通过鞅方法得到了最终破产概率的 Lundberg 上界. 文献 [5] 考虑理赔服从二维一阶自回归结构常利率的双险种二维离散风险模型, 通过概率中的鞅方法得到最终破产概率的伦德伯格型不等式进而获得其上界, 并结合数值分析说明了参数对于破产概率上界的影响. 文献 [6] 探讨具有马尔科夫性利率的离散时间风险模型中破产赤字和破产前盈余的联合分布以及最终破产概率的破产问题. 文献 [7] 研究利率服从 m 阶自回归时离散时间风险模型的破产前最大盈余分布等破产问题. 文献 [8] 通过递推方法和全概率公式, 研究带有折现率离散时间风险模型中的破产概率、破产后赤字、破产前盈余及其它们联合分布所满足的微积分方程. 文献 [9] 在离散时间保险金融风险模型中假设净亏损量和风险资产的随机贴现因子都服从同一分布下得到改进的有限时间破产概率渐近公式. 文献 [10] 研究理赔量满足一阶自回归模型, 利用数学归纳法得出广义离散时间风险模型中破产前盈余的分布等破产问题. 文献 [11] 研究索赔过程服从复合二项过程的双险种离散时间风险模型, 得到了罚金期望函数、破产概率满足的积分方程以及有限时间内破产概率、破产时刻分布的递推公式. 文献 [12] 对比在相依理赔量经典离散时间风险模型和带有双险种和折现率的相依理赔量离散时间风险模型下的破产持续时间和盈余首次穿过给定水平 x 的时刻分布. 文献 [13] 考虑带马尔科夫利率的双险种复合双二项模型离散风险模型破产

*收稿日期: 2020-05-26 接收日期: 2020-06-19

基金项目: 校社科类基金资助 (JS2018HGJ0046); 2019 课程思政项目 - 多元统计分析基金资助 (119-033035); 校博士专项科研基金资助 (JZ2018HGBZ0108).

作者简介: 于莉 (1978-), 女, 安徽淮北, 讲师, 主要研究方向: 金融风险, 供应链管理.

概率. 本文在文献 [4, 8, 10, 12] 基础上将模型推广为带有折现率、多险种及理赔量一阶自回归结构的广义离散时间风险模型, 利用概率论和数学递推法得到了破产概率、破产后赤字、破产前盈余及其它们联合分布所满足的微积分方程, 最后结合数据分析此类模型更具有实际意义.

假定保险公司经营 k 个险种 $A_j (j = 1, 2, \dots, k)$, 在所考虑的时间期间内有固定折现率 δ , 保费在每个时期期初收取而理赔在每个时期的期末支付, 则在时刻 $n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 保险公司累积盈余折现到初始时刻的盈余为

$$U_n^\delta = u + \sum_{i=1}^n e^{-\delta(i-1)} \left(\sum_{j=1}^k c_j \right) - \sum_{i=1}^n e^{-\delta i} \left(\sum_{j=1}^k X_{i,j} \right), \quad (1.1)$$

其中 c_j 表示第 j 个险种的单位时间内保费收入量, $\{X_{i,1}, i = 1, 2, \dots\}$, $\{X_{i,2}, i = 1, 2, \dots\}$, \dots $\{X_{i,k}, i = 1, 2, \dots\}$ 是 k 个独立同分布的随机变量序列, $X_{i,j}$ 表示在 $(i-1, i]$ 时间内第 j 个险种的理赔支出, 并假定期望值 $E(X_{i,j}) < \infty$, 而 $U_0^\delta = u \geq 0$ 表示初始盈余. 同时考虑 k 个险种的理赔量均满足 $AR(1)$ 模型

$$X_{i,j} = W_{i,j} + a_j X_{i-1,j}, \quad (1.2)$$

其中 $|a_j| < 1$, 且 $\{W_{i,j}, i = 1, 2, \dots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 这里记 $W_{0,j} = \omega_{0,j}$. 为了后面讨论的方便, 把满足上述条件的广义离散时间破产模型记为模型 (I).

模型 (I) 的修正模型为

$$\begin{aligned} \hat{U}_n^\delta &= u + \sum_{i=1}^n e^{-(i-1)\delta} \left(\sum_{j=1}^k c_j \right) - \sum_{i=1}^n e^{-i\delta} \left(\sum_{j=1}^k \hat{X}_{i,j} \right) \\ &= \hat{u} + \sum_{i=1}^n e^{-(i-1)\delta} \left(\sum_{j=1}^k c_j \right) - \hat{S}_n, \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $\hat{u} = u - \sum_{j=1}^k \frac{a_j e^{-\delta}}{1 - a_j e^{-\delta}} \omega_{0,j}$ 表示修正初始盈余. 随机变量 $\hat{X}_{i,j} = \frac{W_{i,j}}{1 - a_j e^{-\delta}}$ 分别表示险种 A_j 在 $(i-1, i]$ 时间区间内的修正理赔支出, $\{\hat{X}_{i,1}, i = 1, 2, \dots\}$, $\{\hat{X}_{i,2}, i = 1, 2, \dots\}$, \dots $\{\hat{X}_{i,k}, i = 1, 2, \dots\}$ 是独立同分布的随机变量序列. 记 $k_n = \sum_{i=1}^n e^{-\delta(i-1)} = \frac{1 - e^{-(n-1)\delta}}{1 - e^{-\delta}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 表示保费收入在前 n 个时段内的折现权重, 特别地, $k_0 = 0$, $k_1 = 1$. 这里 $\hat{S}_n = \sum_{i=1}^n e^{-\delta i} \left(\sum_{j=1}^k \hat{X}_{i,j} \right)$ 是前 n 个时段内修正总理赔.

记 $Z_i = \sum_{j=1}^k (\hat{X}_{i,j} - e^\delta c_j)$ 称为时刻 i 的净亏损额, 则 $\{Z_i, i = 1, 2, \dots\}$ 是独立同分布的随机变量, 这里要求 $E(Z_i) < 0$ 是为了保证保险公司的经常运作所必须附加的风险负荷, 记 Z 的分布函数为 $G(z)$. 若令 $\hat{\pi}_n = \sum_{i=1}^n e^{-i\delta} Z_i$, 此时 (1.3) 式的模型即化为

$$\hat{U}_n = \hat{u} - \hat{\pi}_n. \quad (1.4)$$

2 主要结果和证明

定义破产时刻为

$$T(\hat{u}) = \inf_n \{n : n \geq 0, \hat{U}_n < 0\} = \inf_n \{n : n \geq 0, \hat{S}_n < \hat{u} + k_n \sum_{j=1}^k c_j\}. \quad (2.1)$$

相应地, 定义破产概率为

$$\varphi(\hat{u}) = P\{\inf_{n \geq 0} \hat{U}_n < 0\} = P\{\hat{T} < \infty \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}. \quad (2.2)$$

定义破产前的盈余分布为

$$H(\hat{u}, h) = P\{\hat{U}_{T-} \leq h \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}. \quad (2.3)$$

当 $x \geq \hat{u}$ 时, 破产前最大盈余分布为

$$\mu(x, \hat{u}) = P\{\max_{1 \leq i \leq T} \hat{U}_i \leq x, T < \infty \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}. \quad (2.4)$$

定义破产后的赤字分布为

$$M(\hat{u}, m) = P\{-m < \hat{U}_T < 0 \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}. \quad (2.5)$$

定义破产前最大盈余和破产后赤字联合分布为

$$\Gamma(\hat{u}, h, m) = P\{\hat{U}_{T-} \leq h, -m < \hat{U}_T < 0 \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}. \quad (2.6)$$

2.1 破产前盈余和破产后赤字联合分布

保险公司的经营情况(包括财务情况和赔付能力情况)是保险人和投保人都极为重视的事情, 为此我们对破产前的盈余分布进行讨论是很重要一部分内容范畴, 在考察破产前盈余分布时, 首先来考虑破产前盈余和破产后赤字的联合分布, 由联合分布再来推出其相应的边际分布.

定理 1 在模型 (I) 修正的模型下, 破产前盈余和破产后赤字的联合分布满足下式

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{u}, h, m) &= [G((\hat{u} + m)e^\delta) - G(\hat{u}e^\delta)]I(h \geq \hat{u}) \\ &\quad + \int_{(\hat{u}-h)e^\delta}^{\infty} [G((\hat{u}e^\delta - z + m)e^\delta) - G((\hat{u}e^\delta - z)e^\delta)]dG(z) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \Gamma(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z). \end{aligned} \quad (2.7)$$

证 由破产前盈余和破产后赤字联合分布的定义, 可得

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{u}, h, m) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\hat{U}_{T-} \leq h, -m < \hat{U}_T < 0 \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{-m < \hat{U}_n < 0, 0 < \hat{U}_{n-1} \leq h, \hat{U}_{n-2} \geq 0, \dots, \hat{U}_1 \geq 0, T = n \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\hat{u} < \hat{\Pi}_n < \hat{u} + m, \hat{u} - h < \hat{\Pi}_{n-1} < 0, \hat{\Pi}_{n-2} < \hat{u}, \dots, \hat{\Pi}_1 < \hat{u} \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\hat{u}, h, m) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\eta_1(\hat{u}, h, m) &= P\{\hat{u} < \hat{\Pi}_1 < \hat{u} + m, \hat{u} - h \leq \hat{\Pi}_0 < 0\} \\ &= (G((\hat{u} + m)e^\delta) - G(\hat{u}e^\delta))I(h \geq \hat{u}).\end{aligned}$$

式中 $I(h \geq \hat{u})$ 是示性函数, 表示当 $h \geq \hat{u}$ 时函数 1, 否则函数取值为 0.

$$\begin{aligned}\eta_2(\hat{u}, h, m) &= P\{\hat{u} < \hat{\Pi}_2 < \hat{u} + m, \hat{u} - h < \hat{\Pi}_1 < 0\} \\ &= \int_{(\hat{u}-h)e^\delta}^{\infty} \eta_1(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z).\end{aligned}$$

由数学归纳法, 当 $n \geq 3$ 有 $\eta_n(\hat{u}, h, m) = \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \eta_{n-1}(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z)$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\hat{u}, h, m)$ 显然是收敛的, 所以

$$\begin{aligned}\Gamma(\hat{u}, h, m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\hat{u}, h, m) \\ &= \eta_1(\hat{u}, h, m) + \eta_2(\hat{u}, h, m) + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \eta_{n-1}(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z) \\ &= \eta_1(\hat{u}, h, m) + \eta_2(\hat{u}, h, m) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \Gamma(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z).\end{aligned}$$

推论 1.1 破产前盈余的分布为

$$H(\hat{u}, h) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Gamma(\hat{u}, h, m) = \Gamma(\hat{u}, h, \infty). \quad (2.8)$$

推论 1.2 破产后赤字的分布为

$$M(\hat{u}, m) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \Gamma(\hat{u}, h, m) = \Gamma(\hat{u}, \infty, m). \quad (2.9)$$

推论 1.3 在定理 1 中令 $m = 0, h = 0$ 可得破产概率满足

$$\varphi(\hat{u}) = 1 - G(\hat{u}e^\delta) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \varphi(\hat{u}e^\delta - z)dG(z). \quad (2.10)$$

推论 1.1, 推论 1.2 给出的是由联合分布求边际分布得到破产前盈余分布和破产后赤字分布, 下面给出另外一种求解方式.

定理 2 在引入折现率的理赔量为一阶自回归的多险种修正的离散时间风险模型 (1.3) 下, 如果定义

$$\Psi(\hat{u}, h, m) = P\{\hat{U}_{T-} > h, \hat{U}_T < -m, T < \infty \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}, \quad (2.11)$$

则 $\Psi(\hat{u}, h, m)$ 满足

$$\Psi(\hat{u}, h, m) = (1 - G((\hat{u} + m)e^\delta))I(h \leq \hat{u}) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \Psi(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z). \quad (2.12)$$

证 由 $\Psi(\hat{u}, h, m)$ 定义, 有

$$\begin{aligned}\Psi(\hat{u}, h, m) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\hat{U}_{T^-} > h, \hat{U}_T \leq -m, T = n \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\hat{U}_n \leq -m, \hat{U}_{n-1} > h, \hat{U}_{n-2} \geq 0, \dots, \hat{U}_1 \geq 0 \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\hat{\Pi}_n \geq \hat{u} + m, \hat{\Pi}_{n-1} < \hat{u} - h, \hat{\Pi}_{n-2} < \hat{u}, \dots, \hat{\Pi}_1 < \hat{u} \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\hat{u}, h, m)\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}f_1(\hat{u}, h, m) &= P\{\hat{\Pi}_1 \geq \hat{u} + m, \hat{\Pi}_0 < \hat{u} - h\} = (1 - G((\hat{u} + m)e^\delta))I(h \leq \hat{u}) \\ f_2(\hat{u}, h, m) &= P\{\hat{\Pi}_2 \geq \hat{u} + m, \hat{\Pi}_1 < \hat{u} - h\} = \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} f_1(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z)\end{aligned}$$

同理当 $n = 3$ 时, $f_3(\hat{u}, h, m) = \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} f_2(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z)$. 由数学归纳法可得

$$f_n(\hat{u}, h, m) = \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} f_{n-1}(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z)$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\hat{u}, h, m)$ 是收敛的, 所以式子 $\Psi(\hat{u}, h, m)$ 可化为如下

$$\begin{aligned}\Psi(\hat{u}, h, m) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\hat{u}, h, m) = f_1(\hat{u}, h, m) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\hat{u}, h, m) \\ &= (1 - G((\hat{u} + m)e^\delta))I(h \leq \hat{u}) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} f_{n-1}(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z) \\ &= (1 - G((\hat{u} + m)e^\delta))I(h \leq \hat{u}) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \Psi(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta)dG(z).\end{aligned}$$

即证.

推论 2.1 由破产前盈余分布的定义, 破产前盈余分布 $H(\hat{u}, h)$ 满足下式:

$$H(\hat{u}, h) = \varphi(\hat{u}) - P\{\hat{U}_{T^-} > h, T < \infty \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\} = \varphi(\hat{u}) - H_1(\hat{u}, h). \quad (2.13)$$

其中在定理 2 中令 $m = 0$, 有 $H_1(\hat{u}, h) = (1 - G((\hat{u})e^\delta))I(h \leq \hat{u}) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} H_1(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta)dG(z)$.

因为当 $m = 0$ 时, 按定义, $\Psi(\hat{u}, h, 0) = P\{\hat{U}_{T^-} > h, \hat{U}_T \leq 0, T < \infty \mid \hat{U}_0 = \hat{u}\}$ 即表示保险公司在 T 时刻破产了, 也就是说此时 $\Psi(\hat{u}, h, 0)$ 表示破产前的盈余分布, 满足破产前的盈余分布的定义.

推论 2.2 由破产后赤字分布定义, 可知其满足下式

$$M(\hat{u}, m) = \varphi(\hat{u}) - P\{\hat{U}_T < -m, | \hat{U}_0 = \hat{u}\} = \varphi(\hat{u}) - M_1(\hat{u}, m). \quad (2.14)$$

在定理 2 中令 $h = 0$, 有 $M_1(\hat{u}, m) = (1 - G((\hat{u})e^\delta))I(h \leq \hat{u}) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} M_1(\hat{u}e^\delta - z, me^\delta)dG(z)$. 因为当 $h = 0$ 时, 按定义, $\Psi(\hat{u}, 0, m) = P\{\hat{U}_{T^-} > 0, \hat{U}_T \leq -m, T < \infty | \hat{U}_0 = \hat{u}\}$ 即表示保险公司在 T 时刻破产了, 也就是说此时 $\Psi(\hat{u}, 0, m) = M_1(\hat{u}, m)$ 表示破产后的赤字分布, 满足破产后赤字分布的定义.

推论 2.3 在定理 2 中令 $h = 0, m = 0$ 就得到了破产概率满足的方程

$$\varphi(\hat{u}) = 1 - G(\hat{u}e^\delta) + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \varphi(\hat{u}e^\delta - z)dG(z). \quad (2.15)$$

因为当 $h = 0, m = 0$ 时, 按定义, $\Psi(\hat{u}, 0, 0) = P\{\hat{U}_{T^-} > 0, \hat{U}_T \leq 0, T < \infty | \hat{U}_0 = \hat{u}\}$ 即表示保险公司在 T 时刻破产了, 也就是说此时 $\Psi(\hat{u}, 0, 0)$ 满足破产概率的定义.

2.2 破产前最大盈余的分布

下面还要介绍一个对保险公司经营比较重要的指标, 即破产前最大盈余的分布. 破产前最大盈余分布能告诉我们什么时候进行合理最有效的投资, 这是保险人和投保人都十分关切的问题, 对于保险公司赔付能力和收入提高是很有必要的问题.

定理 3 在模型 (I) 修正的模型下, 其破产前最大盈余分布满足下面的积分方程

$$\mu(x, \hat{u}) = 1 - G(\hat{u}e^\delta) + \int_{\hat{u}e^\delta}^{(\hat{u}-x)e^\delta} H(xe^\delta, \hat{u}e^\delta - z)dG(z). \quad (2.16)$$

证 由破产前最大盈余分布的定义可得

$$\begin{aligned} \mu(x, \hat{u}) &= P\{\max_{1 \leq i \leq T} \hat{U}_i \leq x, T < \infty | \hat{U}_0 = \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\hat{u} \leq \hat{\Pi}_1 \leq \hat{u} - x, \hat{u} \leq \hat{\Pi}_2 \leq \hat{u} - x, \dots, \hat{u} \leq \hat{\Pi}_{n-1} \leq \hat{u} - x, \hat{\Pi}_n \geq \hat{u}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x, \hat{u}) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} \mu_1(x, \hat{u}) &= P\{\hat{\Pi}_1 > \hat{u}\} = P\{Z_1 > \hat{u}e^\delta\} = 1 - G(\hat{u}e^\delta) \\ \mu_2(x, \hat{u}) &= P\{\hat{u} \leq \hat{\Pi}_1 \leq \hat{u} - x, \hat{\Pi}_2 \geq \hat{u}\} = P\{\hat{u} \leq Z_1e^{-\delta} \leq \hat{u} - x, Z_1 + Z_2e^{-\delta} > \hat{u}e^\delta\} \\ &= \int_{\hat{u}e^\delta}^{(\hat{u}-x)e^\delta} \mu_1(xe^\delta, \hat{u}e^\delta - z)dG(z). \end{aligned}$$

当 $n \geq 3$, 由数学归纳法可得

$$\mu_n(x, \hat{u}) = \int_{\hat{u}e^\delta}^{(\hat{u}-x)e^\delta} \mu_{n-1}(xe^\delta, \hat{u}e^\delta - z)dG(z).$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x, \hat{u})$ 是收敛的, 所以

$$\begin{aligned} \mu(x, \hat{u}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x, \hat{u}) = \mu_1(x, \hat{u}) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_{n-1}(\hat{u}, h, m) dG(z) \\ &= 1 - G(\hat{u}e^\delta) + \int_{\hat{u}e^\delta}^{(\hat{u}-x)e^\delta} H(xe^\delta, \hat{u}e^\delta - z) dG(z). \end{aligned}$$

3 数值分析

例 1 假设两个险种 A 和 B 的理赔额 \hat{X}, \hat{Y} 均服从指数分布, 那么 $F_{\hat{X}}(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$, $\lambda_1 > 0, x \geq 0$, $F_{\hat{Y}}(y) = 1 - e^{-\lambda_2 y}$, $\lambda_2 > 0, y \geq 0$, 那么

$$(1) \text{ 当 } \lambda_1 > \lambda_2 \text{ 时, } \eta_1(\hat{u}, h, m) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 e^\delta (\hat{u} + c_1 + c_2)} - e^{-\lambda_2 e^\delta (\hat{u} + m + c_1 + c_2)}) I(h \geq \hat{u}),$$

进而 $\eta_2(\hat{u}, h, m) = \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (e^\delta - 1)} \{e^{-\lambda_2 e^\delta (\hat{u} e^\delta + 2(c_1 + c_2))} - e^{-\lambda_2 e^\delta [\hat{u} e^\delta + (e^\delta - 1)h + 2(c_1 + c_2)]} + e^{-\lambda_2 e^\delta [(\hat{u} + m)e^\delta + 2(c_1 + c_2)]} + e^{-\lambda_2 e^\delta [\hat{u} + m + (e^\delta - 1)h + 2(c_1 + c_2)]}\}$, 当 $n \geq 3$ 时, 有 $\eta_n(\hat{u}, h, m) = \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \eta_{n-1}(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta) dG(z)$, 进而可得破产前盈余和破产后赤字分布的具体表达式, 同理也可得当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时的情况.

计算可得破产概率 $\varphi(\hat{u}) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{e^\delta (-\lambda_2)(\hat{u} + c_1 + c_2)} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{(c_1 + c_2)(-\lambda_2)e^\delta} \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \varphi(\hat{u}e^\delta - z) e^{-\lambda_2 z} dz$, 当 $\lambda_1 > \lambda_2$ 时, 可以得到破产概率一个上界为 $\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{e^\delta (-\lambda_2)(\hat{u} + c_1 + c_2)}$, 当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时, 可以得到破产概率一个下界为 $\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{e^\delta (-\lambda_2)(\hat{u} + c_1 + c_2)}$.

$$(2) \text{ 当 } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ 时, } \eta_1(\hat{u}, h, m) = [\lambda e^{-\lambda e^\delta (\hat{u} + c_1 + c_2)} - \lambda e^{-\lambda e^\delta (\hat{u} + m + c_1 + c_2)}] I(h \geq \hat{u}),$$

进而 $\eta_2(\hat{u}, h, m) = \lambda^3 \{e^{-\lambda e^\delta (\hat{u} e^\delta + 2(c_1 + c_2))} - e^{-\lambda e^\delta (\hat{u} e^\delta + (e^\delta - 1)h + 2(c_1 + c_2))} + e^{-\lambda e^\delta (\hat{u} + m + 2(c_1 + c_2))} + e^{-\lambda e^\delta (\hat{u} + m + (e^\delta - 1)h + 2(c_1 + c_2))}\}$, 同理可得 $\eta_n(\hat{u}, h, m)$ 的表达式, 进而可得破产前盈余和破产后赤字分布的具体表达式.

计算可得破产概率为 $\varphi(\hat{u}) = \lambda e^{e^\delta (-\lambda)(\hat{u} + c_1 + c_2)} - \lambda^2 e^{(c_1 + c_2 + \delta)(-\lambda)e^\delta} \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \varphi(\hat{u}e^\delta - z) e^{-\lambda e^\delta z} dz$.

例 2 假设两个险种 A 和 B 理赔额 \hat{X}, \hat{Y} 均服从均匀分布 $U(0, a_j) (j = 1, 2)$, 其中 $a_j (j = 1, 2)$ 分别是两个险种 A 和 B 在单位时间段内的最高理赔金额, 考虑 $a_1 = a_2 = a$ 时, 经计算 $\eta_1(\hat{u}, h, m) = \frac{m^2 e^{2\delta} - 2[\hat{u} - (c_1 + c_2)m]e^{2\delta}}{2a^2} I(h \geq \hat{u})$, $\eta_2(\hat{u}, h, m) = \int_{(\hat{u}-h)e^\delta}^0 \eta_1(\hat{u}e^\delta - z, he^\delta, me^\delta) dG(z) = \frac{2(\hat{u}-h)^3 e^{3\delta}}{3} - (c - \frac{b}{2})(\hat{u}-h)^2 e^{2\delta} - bc(\hat{u}-h)e^\delta$, 其中 $b = me^\delta - 2\hat{u}e^\delta + 2(c_1 + c_2)$, $c = (c_1 + c_2)e^\delta$, 同理可得 $\eta_n(\hat{u}, h, m)$ 的表达式, 进而可得破产前盈余和破产后赤字分布的具体表达式.

计算可得破产概率为 $\varphi(\hat{u}) = \frac{[\hat{u} - (c_1 + c_2)]e^{2\delta}}{2a^2} + \int_{-\infty}^{\hat{u}e^\delta} \varphi(\hat{u}e^\delta - z) \frac{(c_1 + c_2)e^\delta - z}{a^2} dz$. 其中 $\frac{[\hat{u} - (c_1 + c_2)]e^{2\delta}}{2a^2}$ 是破产概率的一个上界.

从例子中可以看出, 险种越多保费收入也会增多, 当理赔支出分别服从指数分布和均匀分布时, 由破产概率的上界表达式发现其随着险种的增多是变小的, 保险公司扩充营业险种是合理的. 图 1 给出了当理赔量服从参数为 1 的指数分布时, 破产概率的上界受折现率的影响

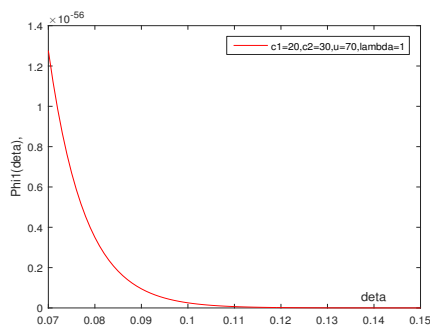


图1 指数分布下折现率变化对破产概率上界的影响

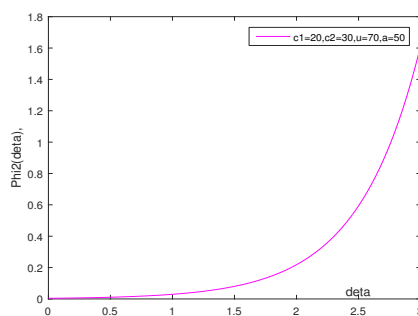


图2 均匀分布下折现率变化对破产概率上界的影响

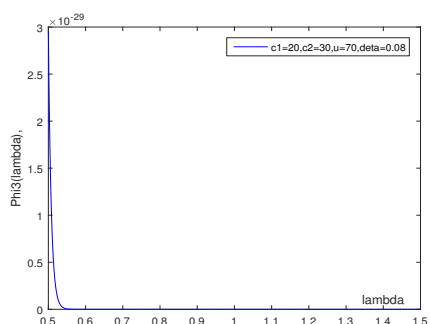


图3 指数参数对破产概率上界的影响

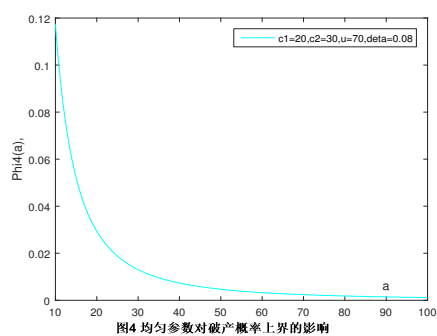


图4 均匀参数对破产概率上界的影响

响情况, 图 2 当理赔量服从 $[0, 50]$ 均匀分布时, 破产概率上界受折现率的影响, 可以看出当理赔量服从不同分布时破产概率的上界影响是不同的, 趋势正好相反, 所以应结合实际数据判断理赔量的分布, 更加具有实际意义. 图 3 破产概率受理赔量指数分布参数 λ 的影响, 图 4 破产概率受理赔量均匀分布参数 a 的影响, 发现均随着参数的变大, 破产概率变小, 进而取合适的参数可以控制破产概率较小的上界, 并且当理赔量服从指数分布时破产概率上界受参数影响的更加明显.

4 结论

本文在多险种理赔量具有一阶自回归结构的离散时间风险模型下, 引入折现率因素, 得出破产前盈余分布和破产后赤字的联合分布所满足的递推关系式, 进而得到破产前盈余分布、破产后赤字和破产概率所满足的表达式, 然后给出破产前最大盈余分布所满足的积分公式, 最后结合模型考虑当险种 A 和险种 B 的理赔量分布均服从指数分布和均匀分布时, 得到保险公司的破产前盈余、破产赤字和破产概率的具体表达式, 并通过数据模拟说明了多险种和折现率对破产概率影响, 并说明模型引入这两个因素的实际意义. 后期可以讨论当理赔量推广到满足二阶甚至是 n 阶自回归结构, 保费收入是随机变量的广义风险模型, 针对保险公司的数据做出分析, 给出实际分析.

参 考 文 献

- [1] 孙丽娟, 顾岚, 刘立新. 离散时间模型下最大赤字问题 [J]. 经济数学, 2001, 18, (4): 1-9.

- [2] Cai J. Ruin probability with dependent rates of interest[J]. *Journal of Applied Probability*, 2002, 39(2): 233–454.
- [3] Cai Jun, Dickson D. Ruin probabilities with a Markov chain interest model[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, 35(3): 513–525.
- [4] 魏瑛源, 唐应辉. 离散时间风险模型的推广研究 [J]. *经济数学*, 2006, 35(3): 426–428.
- [5] 王泉, 张奕. 考虑常利率的二维离散风险模型的破产概率 [J]. *浙江大学学报 (理学版)*, 2008, 35(5): 501–506.
- [6] 张帆. 利率为 Markov 链的风险模型的破产问题 [J]. *山西大学学报 (自然科学版)*. 2009, 32(2): 189–192.
- [7] 于莉, 詹晓琳, 傅瀚洋. 利率服从 AR(m) 离散时间风险模型的破产分布 [J]. *经济数学*, 2013, 30(4): 90–93.
- [8] 古再丽努尔. 阿布都卡地尔, 吴黎军. 折现率离散时间风险模型下最大赤字问题 [J]. *经济数学*, 2014, 31(3): 23–25.
- [9] Yang Y. Estimate for the finite-time ruin probability in the discrete-time risk model with insurance and financial risks[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2014, 43: 2094–2104.
- [10] 于莉, 詹晓琳, 黄水弟. 理赔量具有一阶自回归结构的离散时间风险模型的破产问题 [J]. *上海第二工业大学学报*, 2014, 31(1): 61–66.
- [11] 方世祖, 陈流红, 郭梦丹, 谢丁丁, 赵明飞. 离散时间的双险种风险模型研究 [J]. *广西科学院学报*, 2015, 31(1): 54–68.
- [12] 于莉, 王青芳, 黄水弟. 具有相依理赔量的离散时间风险模型的破产问题 [J]. *数学杂志*, 2017, 37(5): 1065–1074.
- [13] 王素素, 苏刚伟. 带马尔科夫利率的双险种复合双二项离散风险模型破产概率研究 [J]. *山东科技大学学报自然科学版*, 2018, 37(6): 49–54.

RUIN PROBLEMS FOR THE DISCRETE TIME INSURANCE RISK MODEL WITH DISCOUNT RATE AND MULTIPLE TYPES OF INSURANCE

YU Li¹, ZHAN Xiao-lin², WANG Jing-fang¹

(1.School of Management, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

(2.School of Science, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: This paper studies the revised financial risk model in discrete time when the claims have first-order autoregressive structure, under the conditions of this, the discount rate and multiple coverage are introduced. Using two different methods, the recursion equations of the maximum surplus before bankruptcy, bankruptcy before the surplus, deficit after bankruptcy and their joint distribution of them, and the integration equation for the ruin probability are obtained. Finally, through data simulation the practical significance of the model is illustrated, the structure and bankruptcy of the classical financial risk model in discrete time is generalized.

Keywords: ruin probability; surplus before ruin; deficit after ruin; discount rate; multiple types of insurance; the first-order auto-regressive structure

2010 MR Subject Classification: 60E05