

Schrödinger-Virasoro 代数上的 Poisson 结构

王美娜, 唐孝敏

(黑龙江大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 本文研究了 Schrödinger-Virasoro 代数的结构问题, 利用其明确的生成元和 Leibniz 法则的方法, 获得了其上所有非结合 Poisson 结构的结果, 推广了结合 Poisson 结构的结果.

关键词: Schrödinger-Virasoro 代数; Poisson 代数; Leibniz 法则

MR(2010) 主题分类号: 17B65 中图分类号: O153.5

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2020)06-0699-08

1 引言

Poisson 代数源于对 Poisson 几何的研究, 自然出现于哈密顿力学, 且是量子群研究的中心. 简单来说, 一个 Poisson 代数 $(A, *, [-, -])$, 就是同时带有代数和李代数两种结构的代数, 且这两种代数结构之间要满足 Leibniz 法则.

鉴于 Poisson 几何与数学的紧密联系, 使它受到了许多研究者的关注. 其中以 Lichnerowicz^[1] 和 Weinstein^[2] 最为具有代表性. 近年来, 随着 Poisson 代数的发展, 其结构问题得到了一些新成果, 例如, 文献 [3] 研究了扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的 Poisson 结构, 文献 [4] 研究了 Witt 代数和 Virasoro 代数上的 Poisson 结构, 文献 [5] 研究了 Toroidal 李代数上的 Poisson 结构, 文献 [6] 研究了扩张仿射李代数上的 Poisson 结构, 文献 [7] 确定了李代数 $W(2,2)$ 上的 Poisson 结构, 并改进了文献 [4] 中的结果. 另外, 文献 [8] 得到 Lie 理论中一类 Poisson 结构的构造, 文献 [9] 研究了 Hall 代数上的 Poisson 结构, 文献 [10] 研究了张量代数上一种带辫子的 Poisson 结构.

近 20 年, Poisson 代数引起了越来越多的研究人员的关注, 并在结构理论和表示理论方面取得了很多结果. Schrödinger-Virasoro 代数是一类重要的无限维李代数, 在数学和物理学的许多分支中都有着广泛的应用. 许多研究者研究了 (广义)Schrödinger-Virasoro 代数的结构与表示理论等, 见文献 [11] 和 [12] 等, 但其 Poisson 结构的研究尚未实现. 本文将研究 Schrödinger-Virasoro 代数上的 Poisson 结构.

2 预备知识

本节主要介绍相关李代数及 Poisson 代数的基本概念.

定义 2.1^[11] Schrödinger-Virasoro 代数 \mathcal{SV} 是一个无限维李代数, 具有 \mathbb{C} -基 $\{L_n, Y_n, M_n | n \in$

*收稿日期: 2019-08-29 接收日期: 2019-12-11

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11771069); 黑龙江省自然科学基金资助 (LH2020A020).

作者简介: 王美娜 (1994-), 女, 黑龙江绥化, 主要研究方向: 李代数. E-mail: 13244560826@163.com.

\mathbb{Z} }, 且满足如下李关系式

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (m-n)L_{m+n}, & [L_n, Y_m] &= (m - \frac{1}{2}n)Y_{m+n}, & [Y_n, Y_m] &= (m-n)M_{m+n}, \\ [L_n, M_m] &= mM_{m+n}, & [Y_n, M_m] &= [M_n, M_m] = 0. \end{aligned}$$

记 \mathcal{SV}_i 为由 $\{L_i, Y_i, M_i\}$ 所张成的三维向量空间. \mathcal{SV} 关于 Cartan 子代数 $\mathbb{C}L_0$ 有分解 $\mathcal{SV} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{SV}_i$.

定义 2.2 [3] Poisson 代数 $(A, *, [-, -])$ 是域 \mathbb{C} 上的一个向量空间 A , 同时具有代数乘法 $*$ 和李代数乘法 $[-, -]$, 且满足 Leibniz 法则: $[z, x * y] = [z, x] * y + x * [z, y], \forall x, y, z \in A$. 若乘法 $*$ 满足结合律, 则称 Poisson 代数是结合的; 若乘法 $*$ 满足交换律, 则称 Poisson 代数是交换的.

3 李代数 \mathcal{SV} 上的 Poisson 结构

本节将给出 Schrödinger-Virasoro 代数上的 Poisson 结构. 注意到本文讨论的是非结合 Poisson 结构, 推广了结合的情形.

引理 3.1 若在李代数 \mathcal{SV} 上存在一个代数乘积 $*$, 使得 $(\mathcal{SV}, *, [-, -])$ 成为一个 Poisson 代数, 则 $\mathcal{SV}_i * \mathcal{SV}_j \subseteq \mathcal{SV}_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

证 对任意的 $x \in \mathcal{SV}_i, y \in \mathcal{SV}_j$, 有

$$[L_0, x * y] = [L_0, x] * y + x * [L_0, y] = ix * y + jx * y = (i+j)x * y,$$

即 $x * y \in \mathcal{SV}_{i+j}$. 因此, 对任意的 $i, j \in \mathbb{Z}$, 都有 $\mathcal{SV}_i * \mathcal{SV}_j \subseteq \mathcal{SV}_{i+j}$.

定理 3.2 \mathcal{SV} 上的任何 Poisson 结构都具有如下形式

$$\begin{aligned} L_m * L_n &= c_1(m-n)L_{m+n}, & L_m * Y_n &= (\frac{m}{2} - n)c_1Y_{m+n}, \\ L_m * M_n &= -c_1nM_{m+n}, & Y_m * Y_n &= c_1(m-n)M_{m+n}, \\ Y_m * L_n &= (m - \frac{n}{2})c_1Y_{m+n}, & M_m * L_n &= c_1mM_{m+n}, \\ Y_m * M_n &= M_m * M_n = M_m * Y_n = 0, \end{aligned}$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, 其中 $c_1 \in \mathbb{C}$.

证 根据引理 3.1 易知 $M_m * M_n \in \mathbb{C}M_{m+n}$, 由此可假设

$$\begin{aligned} L_m * L_n &= a_{m,n}L_{m+n} + b_{m,n}Y_{m+n} + c_{m,n}M_{m+n}, \\ L_m * Y_n &= d_{m,n}L_{m+n} + e_{m,n}Y_{m+n} + f_{m,n}M_{m+n}, \\ L_m * M_n &= g_{m,n}L_{m+n} + h_{m,n}Y_{m+n} + i_{m,n}M_{m+n}, \\ Y_m * Y_n &= j_{m,n}L_{m+n} + k_{m,n}Y_{m+n} + l_{m,n}M_{m+n}, \\ Y_m * L_n &= o_{m,n}L_{m+n} + p_{m,n}Y_{m+n} + q_{m,n}M_{m+n}, \\ Y_m * M_n &= r_{m,n}L_{m+n} + s_{m,n}Y_{m+n} + t_{m,n}M_{m+n}, \\ M_m * M_n &= u_{m,n}M_{m+n}, \\ M_m * L_n &= v_{m,n}L_{m+n} + w_{m,n}Y_{m+n} + x_{m,n}M_{m+n}, \\ M_m * Y_n &= y_{m,n}L_{m+n} + z_{m,n}Y_{m+n} + \delta_{m,n}M_{m+n}. \end{aligned}$$

下面分 10 步来证明定理.

步骤 1 确定 $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}$. 由于 $[L_k, L_m * L_n] = [L_k, L_m] * L_n + L_m * [L_k, L_n]$,

$$(m+n-k)a_{m,n} = (m-k)a_{m+k,n} + (n-k)a_{m,n+k}, \quad (3.1)$$

$$(m+n-\frac{k}{2})b_{m,n} = (m-k)b_{m+k,n} + (n-k)b_{m,n+k}, \quad (3.2)$$

$$(m+n)c_{m,n} = (m-k)c_{m+k,n} + (n-k)c_{m,n+k}. \quad (3.3)$$

在 (3.1) 式中取 $k=n$, 得 $ma_{m,n} = (m-n)a_{m+n,n}$. 于是 $\frac{a_{m,n}}{m-n} = \frac{a_{m+n,n}}{m+n-n} = c_1$. 故 $a_{m,n} = c_1(m-n), c_1 \in \mathbb{C}$. 在 (3.2) 式中取 $m=n=k$, 得 $\frac{3}{2}kb_{k,k} = 0$. 因此 $b_{k,k} = 0, k \neq 0$; 取 $m=k, n=0$, 得 $\frac{k}{2}b_{m,0} = -kb_{m,m}$. 因此有 $b_{m,0} = 0, k \neq 0$; 取 $m=n=-k$, 得 $-\frac{5}{2}kb_{-k,-k} = -2kb_{0,-k} - 2kb_{-k,0}$. 则 $b_{0,-k} = 0, k \neq 0$; 取 $m=n=0, k \neq 0$, 得 $-\frac{k}{2}b_{0,0} = -kb_{k,0} - kb_{0,k}$. 于是 $b_{0,0} = 0, k \neq 0$; 取 $n=k=-m$, 得 $-\frac{k}{2}b_{-k,k} = -2kb_{0,k}$. 则有 $b_{-k,k} = 0, k \neq 0$; 最后在 (3.2) 式中取 $m=0, n \neq 0, n+k \neq 0$, 得 $(n-\frac{k}{2})b_{0,n} = -kb_{k,n} + (n-k)b_{0,n+k}$. 于是有 $-kb_{k,n} = 0$. 因此, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $b_{m,n} = 0$.

在 (3.3) 式中取 $k=n=-m \neq 0$, 得 $0 = -2nc_{0,n}$. 因此 $c_{0,n} = 0, n \neq 0$; 取 $m=0, n \neq 0, n+k \neq 0$, 得 $0 = -kc_{k,n}$. 则 $c_{k,n} = 0, n \neq 0, k \neq 0, n+k \neq 0$; 取 $k=m \neq 0, n=0$, 得 $mc_{m,0} = 0$. 于是有 $c_{m,0} = 0, m \neq 0$; 取 $k=-m \neq 0, n=0$, 得 $2c_{0,0} + c_{m,-m} = 0$. 于是 $c_{m,-m} = -2c_{0,0}, m \neq 0$. 在 (3.3) 式中取 $k=-3, m=2, n=1$ 得 $3c_{2,1} = 5c_{-1,1} + 4c_{-2,2} = -18c_{0,0}$, 而 $c_{2,1} = 0$, 因此 $c_{0,0} = 0$. 于是, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $c_{m,n} = 0$.

步骤 2 确定 $d_{m,n}, e_{m,n}, f_{m,n}$. 由于 $[L_k, L_m * Y_n] = [L_k, L_m] * Y_n + L_m * [L_k, Y_n]$,

$$(m+n-k)d_{m,n} = (m-k)d_{m+k,n} + (n-\frac{k}{2})d_{m,n+k}, \quad (3.4)$$

$$(m+n-\frac{k}{2})e_{m,n} = (m-k)e_{m+k,n} + (n-\frac{k}{2})e_{m,n+k}, \quad (3.5)$$

$$(m+n)f_{m,n} = (m-k)f_{m+k,n} + (n-\frac{k}{2})f_{m,n+k}. \quad (3.6)$$

在 (3.4) 式中取 $m=k \neq 0, n=0$, 得 $-\frac{m}{2}d_{m,m} = 0$. 有 $d_{m,m} = 0, m \neq 0$; 取 $m=-n \neq 0, k=2n$, 得 $-2nd_{-n,n} = 0$. 有 $d_{-n,n} = 0, n \neq 0$; 取 $m=k=-n \neq 0$, 得 $-\frac{3}{2}md_{m,0} = 0$. 则有 $d_{m,0} = 0, m \neq 0$; 再取 $m=n=-k \neq 0$, 得 $2md_{0,m} = 0$. 因此

$$d_{0,m} = 0, \quad m \neq 0; \quad (3.7)$$

取 $m=0, n=k \neq 0$, 得 $\frac{n}{2}d_{0,2n} = 0$. 于是 $d_{0,2n} = 0, n \neq 0$; 取 $m=0, k=-n \neq 0$, 得 $2nd_{0,n} = \frac{3}{2}nd_{0,0}$. 于是结合 (3.7) 式, 有 $d_{0,n} = 0, n \neq 0$. 最后在 (3.4) 式中取 $n=0, m \neq k \neq 0$, 得 $-\frac{k}{2}d_{m,k} = 0$. 则有 $d_{m,k} = 0, n=0, m \neq k \neq 0$. 于是, 针对上述对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $d_{m,n} = 0$. 在 (3.5) 式中取 $k=2n$, 得 $me_{m,n} = (m-2n)e_{m+2n,n}$. 于是 $\frac{e_{m,n}}{m-2n} = \frac{e_{m+2n,n}}{m+2n-2n} = c_2$. 故 $e_{m,n} = c_2(m-2n), c_2 \in \mathbb{C}$. 在 (3.6) 式中取 $m=-n \neq 0, k=2n$, 得 $-3nf_{n,n} = 0$. 有 $f_{n,n} = 0, n \neq 0$; 取 $m=k \neq 0, n=0$, 得 $mf_{m,0} = -\frac{m}{2}f_{m,m}$. 于是 $f_{m,0} = 0, m \neq 0$; 取 $n=0, m \neq 0, m+k \neq 0$, 得 $-\frac{k}{2}f_{m,k} = 0$. 则有 $f_{m,k} = 0, n =$

0, $m \neq 0$, $m+k \neq 0$; 取 $m=n=0, k \neq 0$, 得 $0 = -kf_{k,0} - \frac{k}{2}f_{0,k}$. 就有 $f_{0,k} = 0, k \neq 0$. 在 (3.6) 式中取 $k = -m \neq 0, n = 0$, 得 $mf_{m,0} = 2mf_{0,0} + \frac{m}{2}f_{m,-m}$. 因此

$$f_{m,-m} = -4f_{0,0}, \quad k = -m \neq 0, \quad n = 0.$$

最后在 (3.6) 式中取 $k = -3, m = 2, n = 1$ 得 $3f_{2,1} = 5f_{-1,1} + \frac{5}{2}f_{2,-2} = -30f_{0,0}$, 而 $f_{2,1} = 0$, 因此 $f_{0,0} = 0$. 于是, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $f_{m,n} = 0$.

步骤 3 确定 $g_{m,n}, h_{m,n}, i_{m,n}$. 由于 $[L_k, L_m * M_n] = [L_k, L_m] * M_n + L_m * [L_k, M_n]$,

$$(m+n-k)g_{m,n} = (m-k)g_{m+k,n} + ng_{m,n+k}, \quad (3.8)$$

$$(m+n-\frac{k}{2})h_{m,n} = (m-k)h_{m+k,n} + nh_{m,n+k}, \quad (3.9)$$

$$(m+n)i_{m,n} = (m-k)i_{m+k,n} + ni_{m,n+k}. \quad (3.10)$$

在 (3.8) 式中取 $n = 0$, 且 $m \neq k$ 得 $g_{m,0} = g_{m+k,0}$. 于是有

$$g_{m,0} = g_{0,0}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

在 (3.8) 式中取 $m = 0$, 得

$$kg_{k,n} = (k-n)g_{0,n} + ng_{0,n+k}. \quad (3.12)$$

令 $k = -n$, 则

$$-ng_{-n,n} = -2ng_{0,n} + ng_{0,0}. \quad (3.13)$$

在 (3.8) 式中取 $k = m$, 得 $g_{m,n} = g_{m,m+n}, n \neq 0$. 取 $n = -m \neq 0$, 利用 (3.11) 式有 $g_{m,-m} = g_{0,0}, m \in \mathbb{Z}$. 结合 (3.13) 式有 $g_{0,n} = g_{0,0}, n \in \mathbb{Z}$. 再由 (3.12) 即可得, 对任意的 $k, n \in \mathbb{Z}$, 有 $g_{k,n} = g_{0,0}$. 令 $c_3 = g_{0,0}$, 则有 $g_{m,n} = c_3, m, n \in \mathbb{Z}$. 在 (3.9) 式中取 $k = m \neq 0, n = 0$, 得 $\frac{m}{2}h_{m,0} = 0$. 则 $h_{m,0} = 0, m \neq 0$; 取 $k = m = -n$, 得 $-\frac{m}{2}h_{m,-m} = -mh_{m,0}$. 于是有 $h_{m,-m} = 0, m \neq 0$; 取 $m = -k \neq 0, n = 0$, 得 $\frac{3}{2}mh_{m,0} = 2mh_{0,0}$. 因此, $h_{0,0} = 0, m \neq 0$; 取 $n = -k \neq 0, m = 0$, 得 $\frac{3}{2}nh_{0,n} = 0$. 有 $h_{0,n} = 0, n \neq 0$. 再在 (3.9) 式中取 $m = n = -k$, 得 $\frac{5}{2}mh_{m,m} = 0$. 则有 $h_{m,m} = 0, m \neq 0$. 最后在 (3.9) 式中取 $m = 0, n \neq 0, n+k \neq 0$, 得 $-kh_{k,n} = 0$. 那么 $h_{k,n} = 0, n \neq 0, n+k \neq 0$. 因此综上, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $h_{m,n} = 0$. 对于 (3.10) 式, 取 $k = m$, 得 $(m+n)i_{m,n} = ni_{m,m+n}$. 由此可推出 $\frac{i_{m,n}}{n} = \frac{i_{m,m+n}}{m+n} = c_4$. 故 $i_{m,n} = c_4n, c_4 \in \mathbb{C}$.

步骤 4 确定 $j_{m,n}, k_{m,n}, l_{m,n}$. 由于 $[L_k, Y_m * Y_n] = [L_k, Y_m] * Y_n + Y_m * [L_k, Y_n]$,

$$(m+n-k)j_{m,n} = (m-\frac{k}{2})j_{m+k,n} + (n-\frac{k}{2})j_{m,n+k}, \quad (3.14)$$

$$(m+n-\frac{k}{2})k_{m,n} = (m-\frac{k}{2})k_{m+k,n} + (n-\frac{k}{2})k_{m,n+k}, \quad (3.15)$$

$$(m+n)l_{m,n} = (m-\frac{k}{2})l_{m+k,n} + (n-\frac{k}{2})l_{m,n+k}. \quad (3.16)$$

在 (3.14) 式中取 $n = 0, m = 0, k \neq 0$ 得 $-kj_{0,0} = -\frac{k}{2}j_{k,0} - \frac{k}{2}j_{0,k}$. 于是有

$$j_{k,0} + j_{0,k} = 2j_{0,0}, \quad k \neq 0. \quad (3.17)$$

在 (3.14) 式中取 $m = n, k = -m$ 得 $3mj_{m,m} = \frac{3}{2}mj_{0,m} + \frac{3}{2}mj_{m,0}$. 则根据 (3.17) 式, 我们可以得到

$$j_{m,m} = j_{0,0}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

在 (3.14) 式中取 $k = 2n, n = -m$ 得 $2mj_{m,-m} = 2mj_{-m,-m}$. 由 (3.18) 式, 可以得到

$$j_{m,-m} = j_{0,0}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

在 (3.14) 式中取 $k = -n, m = 0$ 得 $2nj_{0,n} = \frac{n}{2}j_{-n,n} + \frac{3}{2}nj_{0,0}$, 即 $4nj_{0,n} = nj_{-n,n} + 3nj_{0,0}$. 再由 (3.19) 式, 可得到

$$j_{0,n} = j_{0,0}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

由 $j_{0,n} = j_{0,0}$, 综合 (3.17) 式, 可知

$$j_{n,0} = j_{0,0}. \quad (3.21)$$

在 (3.14) 式中取 $k = 2m, n = 0$ 得 $-mj_{m,0} = -mj_{m,2m}$. 结合 (3.21) 式, 可得到 $j_{m,2m} = j_{0,0}, m \in \mathbb{Z}$; 取 $k = 2n, m = 0$ 得 $-nj_{0,n} = -nj_{2n,n}$. 结合 (3.20) 式, 可得到 $j_{2n,n} = j_{0,0}, n \in \mathbb{Z}$. 最后, 在 (3.14) 式中取 $n = 0, m \neq 0, m+k \neq 0$ 得到 $(m-k)j_{m,0} = (m-\frac{k}{2})j_{m+k,0} - \frac{k}{2}j_{m,k}$. 再综合 (3.21) 式, 可得到 $-\frac{k}{2}j_{0,0} = -\frac{k}{2}j_{m,k}$, 即 $j_{m,k} = j_{0,0}, k \neq 0$. 综上所述, 对任意的 $k, m \in \mathbb{Z}$, 有 $j_{k,m} = j_{0,0}$. 令 $c_5 = j_{0,0}$, 则有 $j_{m,n} = c_5, m, n \in \mathbb{Z}$. 在 (3.15) 式中取 $m = n, k = 2n$ 得 $mk_{m,m} = 0$. 于是有 $k_{m,m} = 0, m \neq 0$. 再取 $m = n = -k$ 得 $0 = \frac{3}{2}mk_{0,m} + \frac{3}{2}mk_{m,0}$. 则

$$k_{0,m} + k_{m,0} = 0, \quad m \neq 0. \quad (3.22)$$

取 $m = n = -k$ 得 $0 = \frac{3}{2}mk_{0,m} + \frac{3}{2}mk_{m,0}$. 有 $k_{0,m} + k_{m,0} = 0, m \neq 0$; 取 $m = n = 0$ 得 $-\frac{k}{2}k_{0,0} = -\frac{k}{2}k_{k,0} - \frac{k}{2}k_{0,k}$. 因此 $k_{0,0} = 0, k \neq 0$; 取 $n = 0, k = 2m \neq 0$ 得 $-mk_{m,2m} = 0$. 于是有 $k_{m,2m} = 0, m \neq 0$; 取 $m = 0, k = 2n \neq 0$ 得 $-nk_{2n,n} = 0$. 则 $k_{2n,n} = 0, n \neq 0$; 取 $n = 2m, k = -m$ 得 $0 = \frac{3}{2}mk_{0,2m} = 0$. 则有 $k_{0,2m} = 0, m \neq 0$; 取 $m = 0, n = k$ 得 $\frac{n}{2}k_{0,n} = 0$. 有 $k_{0,n} = 0, n \neq 0$. 再结合 (3.22) 式可得 $k_{n,0} = 0$. 再在 (3.15) 式中取 $m = -k, n = 0$ 得 $0 = \frac{m}{2}k_{m,-m}$. 于是 $k_{m,-m} = 0, m \neq 0$. 最后在 (3.15) 式中取 $m = 0, n \neq 0, n+k \neq 0$ 得 $-\frac{k}{2}k_{k,n} = 0$. 于是 $k_{k,n} = 0, k \neq 0$. 因此, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $k_{m,n} = 0$. 对于 (3.16) 式, 取 $k = 2m$, 得 $(m+n)l_{m,n} = (n-m)l_{m,n+2m}$. 由此可推出 $\frac{l_{m,n}}{n-m} = \frac{l_{m,n+2m}}{n+2m-m} = c_6$. 故 $l_{m,n} = c_6(m-n), c_6 \in \mathbb{C}$.

步骤 5 确定 $o_{m,n}, p_{m,n}, q_{m,n}$. 类似于步骤 2 中的讨论, 有

$$o_{m,n} = 0, \quad p_{m,n} = c_7(n-2m), \quad q_{m,n} = 0, \quad c_7 \in \mathbb{C}.$$

步骤 6 确定 $r_{m,n}, s_{m,n}, t_{m,n}$. 由于 $[L_k, Y_m * M_n] = [L_k, Y_m] * M_n + Y_m * [L_k, M_n]$,

$$(m+n-k)r_{m,n} = (m-\frac{k}{2})r_{m+k,n} + nr_{m,n+k}, \quad (3.23)$$

$$(m+n-\frac{k}{2})s_{m,n} = (m-\frac{k}{2})s_{m+k,n} + ns_{m,n+k}, \quad (3.24)$$

$$(m+n)t_{m,n} = (m-\frac{k}{2})t_{m+k,n} + nt_{m,n+k}. \quad (3.25)$$

在 (3.23) 式中取 $n = 0, k = 2m$ 得 $-mr_{m,0} = 0$. 则

$$r_{m,0} = 0, \quad m \neq 0. \quad (3.26)$$

在 (3.23) 式中取 $m = n = 0$ 得 $-kr_{0,0} = -\frac{k}{2}r_{k,0}$. 则有 $r_{0,0} = 0, k \neq 0$. 在 (3.23) 式中取 $m = n \neq 0, k = -m$ 得 $3mr_{m,m} = \frac{3}{2}mr_{0,m} + mr_{m,0}$. 于是

$$3r_{m,m} = \frac{3}{2}r_{0,m} + r_{m,0}, \quad m \neq 0. \quad (3.27)$$

在 (3.23) 式中取 $m = 0, n = -k$ 得 $2nr_{0,n} = \frac{n}{2}r_{-n,n}$. 则

$$4r_{0,n} = r_{-n,n}, \quad n \neq 0. \quad (3.28)$$

在 (3.23) 式中取 $m = -n \neq 0, k = 2m$ 得 $-2mr_{m,-m} = -mr_{m,m}$. 则有

$$2r_{m,-m} = r_{m,m}, \quad m \neq 0. \quad (3.29)$$

在 (3.23) 式中取 $m = n \neq 0, k = 2m$ 得 $4mr_{m,m} = 2mr_{-m,m} + mr_{m,-m}$. 所以

$$4r_{m,m} = 2r_{-m,m} + r_{m,-m}, \quad m \neq 0. \quad (3.30)$$

综合 (3.28), (3.29) 和 (3.30) 式可得 $7r_{m,m} = 16r_{0,m}$. 将其代入 (3.27) 式再结合 (3.26) 式得到 $r_{m,m} = 0$. 因此有 $r_{0,m} = r_{-m,m} = r_{m,-m} = 0$. 再在 (3.23) 式中取 $m = 0, n \neq 0, n + k \neq 0$ 得 $(n - k)r_{0,n} = -\frac{k}{2}r_{k,n} + nr_{0,n+k}$. 再由 $r_{0,n} = 0$ 可知, 对任意的 $k, n \in \mathbb{Z}$, 有 $r_{k,n} = 0$. 因此有 $r_{m,n} = 0, m, n \in \mathbb{Z}$. 在 (3.24) 式中取 $n = -m \neq 0, k = 2m$ 得 $-ms_{m,-m} = -ms_{m,m}$. 则

$$s_{m,-m} = s_{m,m}, \quad m \neq 0. \quad (3.31)$$

在 (3.24) 式中取 $n = 0, k = -m$ 得 $\frac{3}{2}ms_{m,0} = \frac{3}{2}ms_{0,0}$. 有 $s_{m,0} = s_{0,0}, m \in \mathbb{Z}$. 在 (3.24) 式中取 $m = n, k = -2m$ 得 $3ms_{m,m} = 2ms_{-m,m} + ms_{m,-m}$. 结合 (3.31) 式可得

$$s_{m,m} = s_{-m,m} = s_{m,-m}, \quad m \neq 0. \quad (3.32)$$

在 (3.24) 式中取 $m = -k, n = m$ 得 $\frac{5}{2}ns_{n,n} = \frac{3}{2}ns_{0,n} + ns_{n,0}$. 因 $s_{m,0} = s_{0,0}$, 于是

$$\frac{5}{2}ns_{n,n} = \frac{3}{2}ns_{0,n} + ns_{0,0}, \quad n \neq 0. \quad (3.33)$$

在 (3.24) 式中取 $n = -k, m = 0$ 得 $\frac{3}{2}ns_{0,n} = \frac{n}{2}s_{-n,n} + ns_{0,0}$. 将此式代入 (3.33) 式可得

$$\frac{5}{2}ns_{n,n} = \frac{n}{2}s_{-n,n} + 2ns_{0,0}, \quad n \neq 0.$$

再综合 (3.32) 式有 $s_{m,m} = s_{-m,m} = s_{m,-m} = s_{0,0}, m \in \mathbb{Z}$. 因此在 (3.33) 式中可得

$$s_{0,m} = s_{0,0}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.34)$$

在 (3.24) 式中取 $m = 0, n \neq 0, n + k \neq 0$ 得 $(n - \frac{k}{2})s_{0,n} = -\frac{k}{2}s_{k,n} + ns_{0,n+k}$. 再由 (3.34) 式即可得, 对任意的 $k, n \in \mathbb{Z}$, 有 $s_{k,n} = s_{0,0}$. 令 $c_8 = s_{0,0}$, 则有 $s_{m,n} = c_8, m, n \in \mathbb{Z}$. 在

(3.25) 式中取 $n = 0, k = 2m$ 得 $mt_{m,0} = 0$. 则 $t_{m,0} = 0, m \neq 0$; 取 $n = -m, k = 2m$ 得 $-mt_{m,m} = 0$. 则有 $t_{m,m} = 0, m \neq 0$; 取 $m = n \neq 0, k = -m$ 得 $\frac{3}{2}mt_{0,m} + mt_{m,0} = 0$. 有 $t_{0,m} = 0, m \neq 0$; 取 $m = -k \neq 0, n = 0$ 得 $\frac{3}{2}mt_{0,0} = 0$. 于是 $t_{0,0} = 0, m \neq 0$; 取 $m = 0, n = -k \neq 0$ 得 $\frac{n}{2}t_{-n,n} = 0$. 于是有 $t_{-n,n} = 0, n \neq 0$; 最后在 (3.25) 式中取 $m = 0, n \neq 0, n + k \neq 0$ 得 $-\frac{k}{2}t_{k,n} = 0$. 因此 $t_{k,n} = 0, k \neq 0$. 于是, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有 $t_{m,n} = 0$.

步骤 7 确定 $u_{m,n}$. 根据等式 $[M_k, L_m * M_n] = [M_k, L_m] * M_n + L_m * [M_k, M_n]$, 有

$$c_3 M_{m+n+k} = M_{m+k} * M_n, \quad k \neq 0.$$

显然, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 有 $u_{m,n} = c_3$.

步骤 8 确定 $v_{m,n}, w_{m,n}, x_{m,n}$. 类似于步骤 3 中的讨论, 有

$$v_{m,n} = c_9, \quad w_{m,n} = 0, \quad x_{m,n} = c_{10}m, \quad c_9, c_{10} \in \mathbb{C}.$$

步骤 9 确定 $y_{m,n}, z_{m,n}, \delta_{m,n}$. 类似于步骤 6 中的讨论, 则有

$$y_{m,n} = 0, \quad z_{m,n} = c_{11}, \quad \delta_{m,n} = 0, \quad c_{11} \in \mathbb{C}.$$

步骤 10 最后, 由以下等式

$$\begin{aligned} [M_k, L_m * L_n] &= [M_k, L_m] * L_n + L_m * [M_k, L_n], \\ [M_k, Y_m * Y_n] &= [M_k, Y_m] * Y_n + Y_m * [M_k, Y_n], \\ [Y_k, L_m * L_n] &= [Y_k, L_m] * L_n + L_m * [Y_k, L_n], \\ [Y_k, L_m * Y_n] &= [Y_k, L_m] * Y_n + L_m * [Y_k, Y_n], \\ [Y_k, L_m * M_n] &= [Y_k, L_m] * M_n + L_m * [Y_k, M_n], \\ [Y_k, M_m * Y_n] &= [Y_k, M_m] * Y_n + M_m * [Y_k, Y_n], \\ [Y_k, M_m * L_n] &= [Y_k, M_m] * L_n + M_m * [Y_k, L_n], \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} c_1(m-n) &= c_{10}(m+k) + c_4(n+k), \quad c_3k + c_9k = 0, \quad c_5k = 0, \\ c_1(mk - nk - \frac{m^2 - n^2}{2}) &= c_2(mk - nk - \frac{mn}{2} + n^2 - 2k^2) + c_7(nk - mk - \frac{mn}{2} + m^2 - 2k^2), \\ c_3(n-k) + c_5(\frac{m}{2} - k) &= 0, \quad c_2(m-2n)(m+n-k) = c_4(n^2 - k^2) + c_6(\frac{m}{2} - k)(m+k-n), \\ c_3(\frac{m+n}{2} - k) &= c_8(\frac{m}{2} - k), \quad c_{11}m(m+n-k) = c_3(n-k), \\ c_9(\frac{m+n}{2} - k) &= c_{11}m(\frac{n}{2} - k). \end{aligned}$$

由此易得 $c_2 = \frac{1}{2}c_1, c_4 = -c_1, c_6 = c_1, c_7 = -\frac{1}{2}c_1, c_{10} = c_1, c_3 = c_5 = c_8 = c_9 = c_{11} = 0$, 故此定理成立, 证毕.

参 考 文 献

- [1] Lichnerowicz A. Les varietes de poisson et leurs algres de Lie associees [J]. J. Differential Geom., 1977, 12(2): 253–300.
- [2] Weinstein A. The local structure of poisson manifolds [J]. J. Differential Geom., 1983, 18(3): 523–557.
- [3] 赵晓晓, 高寿兰, 刘东. 扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的 Poisson 结构 [J]. 数学学报 (中文版), 2016, 59(6): 776–782.
- [4] 姚裕丰. Witt 代数和 Virasoro 代数上的 Poisson 代数结构 [J]. 数学年刊, 2013, 34(1): 111–128.
- [5] 靳全勤, 佟洁. Toroidal 李代数上的 Poisson 代数结构 [J]. 数学年刊 A 辑, 2007, 28(1): 57–70.
- [6] 靳全勤, 佟洁. 广义仿射李代数上的非交换 Poisson 代数结构 [J]. 数学学报 (中文版), 2011, 54(4): 561–570.
- [7] 李雅南, 高寿兰, 刘东. 李代数 $W(2,2)$ 上的 Poisson 结构 [J]. 数学年刊, 2016, 37(3): 267–272.
- [8] 路江华, 于世卓. Lie 理论中一类 Poisson 结构的构造 [J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(12): 1681–1692.
- [9] 付昌建, 彭联刚. Hall 代数上的 Poisson 结构 [J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(11): 1673–1680.
- [10] 王欣, 沈远. 张量代数上一种带辫子的 Poisson 结构 [J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2017, 32(4): 379–387.
- [11] Li Junbo, Su Yucai. Representations of the Schrödinger-Virasoro algebras[J]. J. Math. Phys., 2008, 49(5): 053512.
- [12] Tan Shaobin, Zhang Xiufu. Automorphisms and verma modules for generalized Schrödinger-Virasoro algebras[J]. J. Algebra, 2009, 322(4): 1379–1394.

POISSON STRUCTURE ON SCHRÖDINGER-VIRASORO ALGEBRA

WANG Mei-na , TANG Xiao-min

(School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: The purpose of this article is to discuss the problems on structures of Schrödinger-Virasoro algebra. By using the way of those explicit generators and Leibniz rule, we obtain the non-associative Poisson structure on the Schrödinger-Virasoro algebra. The results generalize the conclusions of associative Poisson structure.

Keywords: Schrödinger-Virasoro algebra; Poisson algebra; Leibniz rule

2010 MR Subject Classification: 17B65