Vol. 40 (2020)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

多线性分数次积分及其极大算子在变指标 Herz 空间上的有界性

殷露露, 张 婧

(伊犁师范大学数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000)

摘 要: 本文研究了多线性分数次积分算子 $T^A_{\Omega,\mu}$ 及其极大算子 $M^A_{\Omega,\mu}$ 在变指标空间上的有界性. 利用变指标 Lebesgue 空间和 Lipschitz 空间的相关性质, 获得了这两类算子分别在变指标 Herz 空间和变指标 Herz-Morrey 空间上的有界性. 这一结果推广了这两类算子在变指标 Lebesgue 空间上有界性的结论.

关键词: 粗糙核; 多线性分数次积分算子; 多线性分数次极大算子; 变指标 Herz 空间; 变指标 Herz-Morrey 空间

MR(2010) **主题分类号**: 42B20; 42B25; 42B35 **中图分类号**: O174.2

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)04-0481-12

1 引言

设 $0<\alpha<n$, S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, 并且 $\Omega\in L^s(\mathbb{S}^{n-1})(s>1)$ 是零次齐次函数. 分数次积分 $T_{\Omega,\mu}$ 及其极大算子 $M_{\Omega,\mu}$ 的定义为

$$T_{\Omega,\mu}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}f(y)dy, \tag{1.1}$$

$$M_{\Omega,\mu}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\mu}}\int_{|x-y|<r}|\Omega(x-y)f(y)|dy. \tag{1.2}$$

当 $\mu=0$ 时, $T_{\Omega,\mu}$ 与二阶变系数椭圆偏微分方程有着非常密切的联系. 1995 年, Caldŕon 与 Zygmund 证明了该算子在变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 随后, 又有很多学者对其进行了进一步的研究 [1−3].

令 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, 并且 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负整数, 记 $|\gamma|=:\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i$ 且

$$\gamma!=\gamma_1!\gamma_2!\cdots\gamma_n!,\quad x^\gamma=x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\cdots x_n^{\gamma_n},$$
$$D^\gamma=\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial^{\gamma_1}x_1\partial^{\gamma_2}x_2\cdots\partial^{\gamma_n}x_n}.$$

令 $A(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, $R_m(A;x,y)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且 $m-1$ 阶可导的函数 $A(x)$ 在点 x 关于 y 的 m 阶 Taylor 展开式的余项, 即

$$R_m(A;x,y)=A(x)-\sum_{|\gamma|\le m-1}\frac{1}{\gamma!}D^\gamma A(y)(x-y)^\gamma.$$

*收稿日期: 2019-11-07 接收日期: 2019-12-09
基金项目: 伊犁师范大学博士启动基金 (2017YSBS09).
作者简介: 殷露露 (1996–), 女, 新疆沙湾, 硕士, 主要研究方向: 调和分析及其应用.

在 2001 年, 丁勇 [4] 引入了如下一类带粗糙核的多线性分数次积分算子

$$T_{\Omega,\mu}^{A}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)R_m(A;x,y)}{|x-y|^{n-\mu+m-1}}f(y)dy, \tag{1.3}$$

与之相应的分数次极大算子的定义为

$$M_{\Omega,\mu}^{A}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\mu+m-1}}\int_{|x-y|<r}|\Omega(x-y)||R_m(A;x,y)||f(y)|dy. \tag{1.4}$$

显然, 当 $m=0$ 时, $T_{\Omega,\mu}^{A}$ 即为交换子 $[A,T_{\Omega,\mu}]$. 当 $m\geq 1$ 时, $T_{\Omega,\mu}^{A}$ 即为上述交换子的非退化推广. 丁勇 [4] 证明了当 $D^{\gamma}A\in L^{r}(\mathbb{R}^n)(1\leq r<\infty,|\gamma|=m-1)$ 时, 该算子在加权 Lebesgue 空间上有界; Wu 和 Yang[5] 证明了当 $D^{\gamma}A\in BMO(\mathbb{R}^n)(|\gamma|=m-1)$ 时, 该算子在 Lebesgue 空间上有界.

另一方面, 在 1995 年, Paluszynski[6] 给出了由 Riesz 位势算子以及 Lipschitz 函数生成的广义交换子, 即多线性分数次积分算子, 并给出了 Besov 空间的一些刻画. 在 Paluszynski[6] 的启发下, Lu 和 Zhang[7] 证明了当 $D^{\gamma}A\in\dot{\Lambda}(\mathbb{R}^n)(|\gamma|=m-1)$ 时, $T_{\Omega,\mu}^{A}$ 在 Lebesgue 空间上有界. 当 $\beta>0$, 齐次 Lipschitz 空间的定义为

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,h\in\mathbb{R}^n,h\neq 0}\frac{|\triangle_h^{[\beta]+1}f(x)|}{|h|^{\beta}}<\infty,$$

其中 $\triangle_h^{1}f(x)=f(x+h)-f(x),\triangle_h^{k+1}f(x)=\triangle_h^{k}f(x+h)-\triangle_h^{k}f(x),k\geq 1$.

若 $1\leq q<\infty$, 等价范数为

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_{Q}|f(x)-m_Q(f)|dx\approx\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}}(\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-m_Q(f)|^{q}dx)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

上述都是在一些经典函数空间上的结果, 随着科学的发展, 很多非线性的问题随之而来. 这时经典函数空间出现了一定的局限性, 例如它对非标准增长条件下的非线性问题已经失去了效用. 在这类非线性问题的研究过程中, 学者越来越多的关注由经典函数空间到变指标函数空间.

令 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\longrightarrow[1,\infty)$ 上的可测函数. 记变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 为存在某个 $\lambda>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx<\infty$$

成立的 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 全体. 变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 空间, 其范数定义为 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}:=\inf\{\lambda>0:\rho_p(\frac{f}{\lambda})\leq 1\}$. 记

$$p_+=\operatorname{ess\,sup}\{p(x):x\in\mathbb{R}^n\},\quad p_-=\operatorname{ess\,inf}\{p(x):x\in\mathbb{R}^n\}.$$

用这个符号定义一族变指标

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n):=\{p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty):p_->1,p_-<\infty\}.$$

$p^{'}(\cdot)$ 是 $p(\cdot)$ 的共轭指标且 $\frac{1}{p^{'}(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}=1$.

变指标空间与经典函数空间有很大的不同, 主要是变指标函数空间已经失去了平移不变性, 这一区别导致许多在经典空间中成立的性质在变指标空间中不再成立. 随后一些学者发现只要证明 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 则相应的的经典调和分析和函数空间理论中的许多结论可以在相应的变指标函数空间中成立.

给定函数 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, Hardy-Littlewood 极大算子 M 的定义如下

$$Mf(x):=\sup_{r>0}r^{-n}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy,(x\in\mathbb{R}^n),$$

其中 $B(x,r):=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<r\}$. 若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足下列条件

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{-C}{log(|x-y|)},\quad |x-y|\le\frac{1}{2},\tag{1.6}$$

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{log(e+|x|)},\quad |y|\ge|x|,\tag{1.7}$$

可以得到 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 则 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

在变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 中, 有以下几个重要的命题.

命题 1.1 [8] 若 $p(\cdot),p^{'}(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 存在 $0<r_1,r_2<1$ 且 $C>0$, 使得

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\le C(\frac{|S|}{|B|})^{r_1},\tag{1.8}$$

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\le C(\frac{|S|}{|B|})^{r_2},\tag{1.9}$$

其中 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有的球 B 的可测子集.

命题 1.2 [8] 若 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 存在常数 $C>0$, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中所有的球 B 满足

$$\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C.$$

命题 1.3 [9] 若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n),q>p_+$ 且 $\frac{1}{p(\cdot)}=\frac{1}{\tilde{q}(\cdot)}+\frac{1}{q}$, 则

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^{\tilde{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

命题 1.4 [10] 令 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足 (1.6) 和 (1.7) 式, 则有

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\approx\begin{cases}|Q|^{\frac{1}{p(x)}}, & |Q|\le 2^n,\\ |Q|^{\frac{1}{p(\infty)}}, & |Q|\ge 1,\end{cases}$$

对于所有的方体 (球体) $Q\subset\mathbb{R}^n$, 其中 $p(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}p(x)$.

众所周知, 在研究算子的有界性时, Hölder 不等式是一个非常重要的工具, 当然在变指标函数空间也需要同样类似的不等式, 于是就有了广义 Hölder 不等式.

命题 1.5 [11] 若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 任意的 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 则 fg 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积并且

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|dx\le r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $r_p := 1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}$. 上述不等式被称为广义 Hölder 不等式.

在变指标 Lebesgue 空间中, Wu 和 Lan[6] 证明了当 $D^\gamma A \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 时, $T^A_{\Omega,\mu}$ 是有界的. 结果如下

定理 1.1 [12] 令 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \beta < 1$, $D^\gamma A \in \dot{\Lambda}_\beta(|\gamma| = m-1)$, $0 < \alpha < \frac{n}{p_+}$, $0 < \alpha+\beta < \frac{n}{p_+}$, 并且 $1 < p_+ < \frac{\alpha+\beta}{n}$. 定义 $q(\cdot)$ 满足 $\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{\alpha+\beta}{n}$, 使得

$$\|T^A_{\Omega,\mu} f\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

2010 年, Izuki[8] 引入了变指标 Herz 空间的定义, 接下来介绍一些定义以及记号. 对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 记 $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\}$ 和 $R_k = B_k \backslash B_{k-1}$; 对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 记 $\chi_k = \chi_{R_k}$; 对任意的 $k \in \mathbb{N}_0$, 记 $\tilde{\chi_k} = \chi_k$, 其中当 $k \in \mathbb{N}$ 时, 有 $\tilde{\chi_k} = \chi_k$; 当 $k = 0$ 时, 有 $\tilde{\chi_0} = \chi_{B_0}$.

定义 1.1 [8] 令 $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q \le \infty$ 且 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. 齐次变指标 $\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 空间定义为

$$\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

其中 $\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \|\{2^{\alpha l}\|f\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\}^\infty_{l=-\infty}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}$.

本文将 Wu 和 Lan[12] 的结果推广到变指标 Herz 空间, 建立多线性分数次积分算子在变指标 Herz 空间上的有界性.

定理 1.2 令 $p_1(\cdot), p_2(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \beta < 1$, $D^\gamma A \in \dot{\Lambda}_\beta(|\gamma| = m-1)$, $s > (p_1')_+$, $0 < r_1, r_2 < \infty$ 且满足命题 1.1 和 (1.8) 式, $nr_2 + \beta + \mu < \alpha < nr_1 - (\beta + \mu + \frac{n-1}{s})$. 如果 $\frac{1}{p_1(\cdot)} - \frac{1}{p_2(\cdot)} = \frac{\beta+\mu}{n}$, 且 $0 < q_1 < q_2 < \infty$ 使得

$$\|T^A_{\Omega,\mu} f\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

接下来介绍比变指标 Herz 空间更广泛的变指标 Herz-Morrey 空间, 并在此空间上建立相应的结论.

定义 1.2 [13] 令 $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < q \le \infty, p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 且 $0 \le \lambda < \infty$. 齐次变指标 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的定义如下

$$M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^{p(\cdot)}_{loc}((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} < \infty\},$$

其中 $\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \sup\limits_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}(\sum\limits_{k=-\infty}^{L} 2^{\alpha qk}\|f\chi_k\|^q_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{q}}$. 显然, 当 $\lambda = 0$ 时, $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

定理 1.3 令 $p_1(\cdot), p_2(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \beta < 1$, $D^\gamma A \in \dot{\Lambda}_\beta(|\gamma| = m-1)$. $s > (p_1')_+$, $0 < \lambda < \infty, 0 < r_1, r_2 < \infty$ 且满足 (1.6) 和 (1.7) 式, $nr_2+\beta+\mu+\lambda < \alpha < nr_1-(\beta+\mu+\frac{n-1}{s})$. 如果 $\frac{1}{p_1(\cdot)} - \frac{1}{p_2(\cdot)} = \frac{\beta+\mu}{n}$, 且 $0 < q_1 < q_2 < \infty$ 使得

$$\|T^A_{\Omega,\mu} f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_2,p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

定理 1.4 在定理 1.2 或定理 1.3 的条件下, 多线性分数次极大算子 $M_{\Omega,\mu}^{A}$ 在 $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$, $M\dot{K}_{q,p(\cdot)}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界.

注 当 $m=0$ 时, $T_{\Omega,\mu}^{A}f(x)$ 即为交换子 $[A,T_{\Omega,\mu}f(x)]$ 在 $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $M\dot{K}_{q,p(\cdot)}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界.

全文中, C 表示一个不依赖于主要参数的常数，但其值在不同的地方可能不尽相同.

2 主要引理和定理证明

在证明定理 1.2 和定理 1.3 之前, 需要一些必要的引理.

引理 2.1 [7] $A(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个函数, 且 $A(x)\in L_{\rm loc}^{q}(\mathbb{R}^n)$ $(q>n)$,

$$|R_m(A;x,y)|\leq C|x-y|^m\sum_{|\gamma|=m}\Big(\frac{1}{|Q_x^y|}\int_{Q_x^y}|D^\gamma A(z)|^q dy\Big)^{\frac{1}{q}},$$

其中 Q_x^y 是以 x 为心, 以 $4\sqrt{n}|x-y|$ 为边长的方体.

引理 2.2 [7] 令 $Q^*\subset Q, g\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)(0<\beta<1)$, 则 $|m_{Q^*}(g)-m_Q(g)|\leq C|Q|^{\frac{\beta}{n}}\|g\|_{\dot{\Lambda}_\beta}$.

引理 2.3 [14] 设 $\Omega(x-y)\in L^s(\mathbb{S}^{n-1})(s>\frac{n}{(n-\alpha)}), k,j\in\mathbb{Z}$, 则

(1) 当 $k\leq j-3,\ x\in R_k$ 时, $\Big(\int_{R_j}|\Omega(x-y)|^s dy\Big)^{\frac{1}{s}}\leq C2^{\frac{jn}{s}}\|\Omega\|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}$.

(2) 当 $k\geq j+3,\ x\in R_k$ 时, $\Big(\int_{R_j}|\Omega(x-y)|^s dy\Big)^{\frac{1}{s}}\leq C2^{\frac{(j-k+kn)}{s}}\|\Omega\|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}$.

应用以上结果, 首先证明定理 1.2 .

定理 1.2 的证明 令 $f\in\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha,q_1}(\mathbb{R}^n)$, 因为 $0<q_1/q_2\leq 1$, 由不等式

$$\Big(\sum_{h=1}^{\infty}a_h\Big)^{q_1/q_2}\leq\sum_{h=1}^{\infty}(a_h)^{q_1/q_2}(a_1,a_2,a_3,\cdots>0). \tag{2.1}$$

对于任意 $j\in\mathbb{Z}$, 记 $f_j:=f\chi_j$, 则 $f=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f_j$. 运用 (2.1) 式 可得

$$\begin{aligned}\|T_{\Omega,\mu}^{A}f\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha,q_2}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}\leq&\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{\alpha q_1 k}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}\|(T_{\Omega,\mu}^{A}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{q_1}\\&+\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{\alpha q_1 k}\Big(\sum_{j=k-2}^{k+2}\|(T_{\Omega,\mu}^{A}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{q_1}\\&+\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{\alpha q_1 k}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}\|(T_{\Omega,\mu}^{A}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{q_1}\\=:&{\rm I}_1+{\rm I}_2+{\rm I}_3.\end{aligned}$$

首先估计 ${\rm I}_2$, 当 $D^\gamma A\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$, 由定理 1.1 中 $T_{\Omega,\mu}^{A}$ 的 $(L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n),L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ 有界性可知

$${\rm I}_2\leq C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{q_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k-2}^{k+2}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{\alpha(k-j)}\Big)^{q_1}$$

$$\leq C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

接下来估计 I_1, 为此由 (1.3) 先对 $|R_m(A;x,y)|$ 进行估计.

对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 且 Q 是以 x 为心, $2\sqrt{n}|x-y|$ 为边长的方体, 令 $A_Q(y)=A(y)-\sum\limits_{|\gamma|=m-1}\frac{1}{\gamma!}m_Q(D^\gamma A)\cdot y^\gamma$, 显然可得 $R_m(A;x,y)=R_m(A_Q;x,y)$, 其中 $m_Q(D^\gamma A)$ 记作 $D^\gamma A$ 在 Q 上的平均. 再运用引理 2.1, 对于任意的 y,

$$\begin{aligned}|R_m(A;x,y)|\leq&|R_{m-1}(A_Q;x,y)|+C\sum_{|\gamma|=m-1}|D^\gamma A_Q(x)||x-y|^{m-1}\\ \leq&C|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}(\frac{1}{|Q^y_x|}\int_{Q^y_x}|D^\gamma A_Q(z)|^q dy)^{\frac{1}{q}}\\ &+C\sum_{|\gamma|=m-1}|D^\gamma A_Q(x)||x-y|^{m-1},\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 Q^y_x 是以 x 为心, 以 $4\sqrt{n}|x-y|$ 为边长的方体. 显然 $Q^y_x\subset 3Q$, 由引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}(\frac{1}{|Q^y_x|}\int_{Q^y_x}|D^\gamma A_Q(z)|^q dy)^{\frac{1}{q}}=&(\frac{1}{|Q^y_x|}\int_{Q^y_x}|D^\gamma A(z)-m_Q(D^\gamma A)|^q dy)^{\frac{1}{q}}\\ \leq&(\frac{1}{|Q^y_x|}\int_{Q^y_x}|D^\gamma A(z)-m_{Q^y_x}(D^\gamma A)|^q dy)^{\frac{1}{q}}\\ &+|m_{Q^y_x}(D^\gamma A)-m_{3Q}(D^\gamma A)|+|m_{3Q}(D^\gamma A)-m_Q(D^\gamma A)|\\ \leq&C\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}|x-y|^\beta.\end{aligned}\tag{2.3}$$

再次运用引理 2.2 可得

$$|D^\gamma A_Q(x)|\leq C\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\frac{\beta}{n}}\leq C\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}|x-y|^\beta.\tag{2.4}$$

联立 (2.2)–(2.4) 式可得

$$|R_m(A;x,y)|\leq C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}|x-y|^{m-1+\beta}.\tag{2.5}$$

对于任意的 $j,k\in\mathbb{Z}$ 且 $j\leq k-3$, 运用 (2.5) 式和广义 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}|(T^A_{\Omega,\mu}f_j)\chi_k|\leq&\int_{R_j}\frac{|\Omega(x-y)||R_m(A;x,y)|}{|x-y|^{n-\mu+m-1}}|f_j(y)|dy\cdot\chi_k\\ \leq&C2^{k(\beta+\mu-n)}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\int_{R^n}|\Omega(x-y)||f_j(y)|\chi_j dy\cdot\chi_k\\ \leq&C2^{k(\beta+\mu-n)}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\Omega(x-y)\chi_j\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\chi_k.\end{aligned}\tag{2.6}$$

因为 $s>(p'_1)_+$ 且 $\frac{1}{p'_1(\cdot)}=\frac{1}{\tilde{p}'_1(\cdot)}+\frac{1}{s}$, 运用命题 1.3 和引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}\|\Omega(x-y)\chi_j\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leq&\|\Omega(x-y)\chi_j\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|\chi_j\|_{L^{\tilde{p}'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\ \leq&C2^{\frac{(j-k+kn)}{s}}\|\chi_{B_j}\|_{L^{\tilde{p}'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

由命题 1.4, 当 $|B_j| \le 2^n$ 且 $x_j \in B_j$, 有

$$\|\chi_{B_j}\|_{L^{\tilde{p}_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |B_j|^{\frac{1}{\tilde{p}_1'(x_j)}} \approx \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_j|^{-\frac{1}{s}}.$$

当 $|B_j| \ge 1$, 有

$$\|\chi_{B_j}\|_{L^{\tilde{p}_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |B_j|^{\frac{1}{\tilde{p}_1'(\infty)}} \approx \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_j|^{-\frac{1}{s}}.$$

故有

$$\|\chi_{B_j}\|_{L^{\tilde{p}_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_j|^{-\frac{1}{s}}. \tag{2.8}$$

联立 (2.6)–(2.8) 式可得

$$\begin{aligned}
&\|(T^A_{\Omega,\mu} f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.9)\\
\le & C2^{k(\beta+\mu-n)} \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)} \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(x-y)\chi_j\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
\le & C2^{k(\beta+\mu-n)} 2^{\frac{(k-j)(n-1)}{s}} \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)} \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

运用命题 1.2 和 (1.1) 式可得

$$\begin{aligned}
2^{k(\beta+\mu-n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &\le C2^{k(\beta+\mu)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{p_2'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.10)\\
&\le C2^{k(\beta+\mu)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|^{-1}_{L^{p_2'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{nr_1(j-k)}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由分数次积分 $I^{\beta+\mu}$ 可以得到

$$I^{\beta+\mu}(\chi_{B_j})(x) \ge I^{\beta+\mu}(\chi_{B_j})(x)\chi_{B_j} \ge C2^{j(\beta+\mu)}\chi_{B_j}. \tag{2.11}$$

接下来, 运用 Hölder 不等式, (2.11) 式, $I^{\beta+\mu}$ 的 $(L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ 有界性以及命题 1.2 可知

$$\begin{aligned}
\|\chi_{B_j}\|^{-1}_{L^{p_2'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &\le C2^{-nj} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C2^{-j(\beta+\mu)} 2^{-nj} \|I^{\beta+\mu}(\chi_{B_j})\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C2^{-j(\beta+\mu)} 2^{-nj} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C2^{-j(\beta+\mu)} \|\chi_{B_j}\|^{-1}_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

联立 (2.9)–(2.12) 式可知

$$\mathrm{I}_1 \le C \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3} \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{\alpha j} 2^{e_1(k-j)} \Big)^{q_1}, \tag{2.13}$$

其中 $e_1 := \beta + \mu - nr_1 + \alpha + \frac{n-1}{s} < 0$. 为了继续估计 (2.13) 式. 考虑以下这两种情形 $1 < q_1 < \infty$ 和 $0 < q_1 \le 1$.

情形 1 若 $1<q_1<\infty$, 运用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{\alpha j q_1}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{e_1(k-j)\frac{q_1}{2}}\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{e_1(k-j)\frac{q_1'}{2}}\Big)^{q_1/q_1'}\\ &\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{\alpha j q_1}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=j+3}^{\infty}2^{e_1(k-j)\frac{q_1}{2}}\\ &\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{\dot K^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

情形 2 若 $0<q_1\le 1$, 运用 (2.1) 式, 用 q_1 代替 q_1/q_2 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-3}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j q_1}2^{e_1(k-j)q_1}\\ &\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{\dot K^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

最后估计 I_3, 对于任意的 $j,k\in\mathbb{Z}$ 且 $j\ge k+3$, 类似于 (2.9) 式的估计, 可以得到

$$\begin{aligned}&\|(T^A_{\Omega,\mu}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\ \le& C2^{j(\beta+\mu-n)}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

运用命题 1.2 和 (1.8) 式, 类似于 (2.10) 式的估计可得

$$\begin{aligned}&2^{j(\beta+\mu-n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\ \le& C2^{j(\beta+\mu)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{nr_2(j-k)}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

另一方面, 由分数次积分 $I^{\beta+\mu}$ 可以知道

$$I^{\beta+\mu}(\chi_{B_k})(x)\ge I^{\beta+\mu}(\chi_{B_k})(x)\chi_{B_k}\ge C2^{k(\beta+\mu)}\chi_{B_k}.\tag{2.16}$$

类似于 (2.11) 式的估计, 可以得到

$$\|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C2^{-nk}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C2^{-k(\beta+\mu)}\|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\tag{2.17}$$

联立 (2.14) – (2.18) 式可得

$$\mathrm{I}_3\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{e_2(j-k)}\Big)^{q_1},\tag{2.18}$$

其中 $e_2:=\beta+\mu+nr_2-\alpha<0$. 为了继续估计 (2.18) 式, 考虑以下这两种情形 $1<q_1<\infty$ 和 $0<q_1\le 1$.

情形 1 若 $1<q_1<\infty$, 运用 Hölder 不等式, 可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 \leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=k+3}^{\infty}2^{\alpha j q_1}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{e_2(j-k)\frac{q_1}{2}}\times(\sum_{j=k+3}^{\infty}2^{e_2(j-k)\frac{q_1'}{2}})^{q_1/q_1'}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{\alpha j q_1}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=j-3}^{\infty}2^{e_2(j-k)\frac{q_1}{2}}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

情形 2 若 $0<q_1\leq 1$, 用 (2.1) 式, 用 q_1 代替 q_1/q_2 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 \leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=k+3}^{\infty}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j q_1}2^{e_2(j-k)q_1}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

这样就完成了定理 1.2 的证明. 接下来证明定理 1.3 .

定理 1.3 的证明 令 $f\in M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}$, 记 $f_j:=f\chi_j(j\in\mathbb{Z})$, 则 $f=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f_j$, 用 (2.1) 式可得

$$
\begin{aligned}
\|T^A_{\Omega,\mu}f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_2,p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq & C\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}2^{\alpha q_1 k}(\sum_{j=-\infty}^{k-3}\|(T^A_{\Omega,\mu}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)})^{q_1}\\
& + C\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}2^{\alpha q_1 k}(\sum_{j=k-2}^{k+2}\|(T^A_{\Omega,\mu}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)})^{q_1}\\
& + C\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}2^{\alpha q_1 k}(\sum_{j=k+3}^{\infty}\|(T^A_{\Omega,\mu}f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)})^{q_1}\\
=: & \mathrm{D}_1+\mathrm{D}_2+\mathrm{D}_3.
\end{aligned}
$$

首先估计 D_2, 当 $D^\gamma A\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 时, 由定理 1.1 中 $T^A_{\Omega,\mu}$ 的 $(L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n),L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ 有界性可知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_2 \leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}(\sum_{j=k-2}^{k+2}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{\alpha(k-j)})^{q_1}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

类似于定理 1.2 中 I_1 的估计方法, 可得

$$
\mathrm{D}_1\leq C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}(\sum_{j=-\infty}^{k-3}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{d_1(k-j)})^{q_1}. \qquad (2.19)
$$

其中 $d_1 := \beta+\mu-nr_1+\alpha+\frac{n-1}{s} < 0$, 为了继续估计 (2.19) 式, 考虑以下这两种情形 $1<q_1<\infty$ 和 $0<q_1\le 1$.

情形 1 若 $1<q_1<\infty$, 运用 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_1 \le & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{\alpha j q_1}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{d_1(k-j)\frac{q_1}{2}}\\
&\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{d_1(k-j)\frac{q_1'}{2}}\Big)^{q_1/q_1'}\\
\le & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

情形 2 若 $0<q_1\le 1$, 运用 (2.1) 式, 用 q_1 代替 q_1/q_2 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_1 &\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=-\infty}^{k-3}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j q_1}2^{d_1(k-j)q_1}\\
&\le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

最后估计 D_3,

$$\mathrm{D}_3 \le C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{d_2(j-k)}\Big)^{q_1}, \tag{2.20}$$

其中 $d_2 := \beta+\mu+nr_2-\alpha<0$. 为了继续估计 (2.20) 式, 考虑以下这两种情形 $1<q_1<\infty$ 和 $0<q_1\le 1$.

情形 1 若 $1<q_1<\infty$, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_3 \le & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\Big(\sum_{j=k+3}^{L}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{d_2(j-k)}\Big)^{q_1}\\
&+C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\Big(\sum_{j=L+1}^{\infty}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{d_2(j-k)}\Big)^{q_1}\\
=: & \mathrm{D}_{31}+\mathrm{D}_{32}.
\end{aligned}$$

对于 D_{31}, 运用 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{31} \le & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=k+3}^{L}2^{\alpha j q_1}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{d_2(j-k)\frac{q_1}{2}}\\
&\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{k+3}2^{d_2(j-k)\frac{q_1'}{2}}\Big)^{q_1/q_1'}\\
\le & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

对于 D_{32}, 由已知条件 $d_2+\lambda<0$ 和 Hölder 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
D_{32} \leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\Big(\sum_{j=L+1}^{\infty}\|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha j}2^{(j-k)\frac{(d_2+\lambda)}{2}}2^{(j-k)\frac{(d_2-\lambda)}{2}}\Big)^{q_1}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=L+1}^{\infty}2^{\lambda jq_1}2^{(j-k)(d_2+\lambda)\frac{q_1}{2}}\\
& \times 2^{-\lambda jq_1}\sum_{m=-\infty}^{j}2^{\alpha mq_1}\|f_m\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}2^{\lambda kq_1}\sum_{j=L+1}^{\infty}2^{(j-k)(d_2+\lambda)\frac{q_1}{2}}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

情形 2 若 $0<q_1\leq 1$, 由已知条件 $d_2+\lambda<0$, 运用 (2.1) 式, 用 q_1 代替 q_1/q_2 可得

$$
\begin{aligned}
& D_3\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=k+3}^{L}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha jq_1}2^{d_2(j-k)q_1}\\
& +C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=L+1}^{\infty}\|f_j\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{\alpha jq_1}2^{d_2(j-k)q_1}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
& +C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\sup_{L\in\mathbb{Z}}2^{-L\lambda q_1}\sum_{k=-\infty}^{L}\sum_{j=L+1}^{\infty}2^{\lambda jq_1}2^{d_2(j-k)q_1}2^{-\lambda jq_1}\sum_{m=-\infty}^{j}2^{\alpha mq_1}\|f_m\|^{q_1}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
\leq & C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|^{q_1}_{\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{q_1}_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{q_1,p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

这样就完成了定理 1.3 的证明. 定理 1.4 的证明与上述证明类似.

参 考 文 献

[1] Chanillo S. A note on commutators[J]. Indiana Univ. Math., 1982, 31: 7–16.

[2] Ding Y, Lu S Z. Weighted norm inequalities for fractional integral operators with rough kernel[J]. Canada Math., 1998, 50: 29–39.

[3] Ding Y, Lu S Z. Homogeneous fractional integrals on Hardy spaces[J]. Tohoku. Math., 2000, 52: 153–162.

[4] Ding Y. A note on multilinear fractional integrals with rough kernel[J]. Advances in Mathematics, 2001, 30: 238–246.

[5] Wu Q, Yang D C. On fractional multilinear singular integrals[J]. Mathematische Nachrichten, 2002, 239–240(1): 215–235.

[6] Paluszynski M. Characterization of Besov space via the commutator operator of Coifman[J]. Rochberg and Weiss Indiana Univ. Math., 1995, 44: 1–17.

[7] Lu S Z, Zhang P. Lipschitz estimates for generalized commutators of fractional integrals with rough kerne[J]. Math. Nachr., 2003, 252: 70–85.

[8] Izuki M. Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent[J]. Rend. Circ. Mat. Palermo., 2010, 59: 199–213.

[9] Nakai E, Sawano Y. Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces[J]. Journal of Functional Analysis, 2012, 262: 3665–3748.

[10] Diening L, Harjulehto P, Ruzicka M. Lebesgue and sobolev spaces with variable exponents[M]. Springer, 2011.

[11] Kováčik O, Rákosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$[J]. Czechoslovak Math, 1991, 41: 592–618.

[12] Wu H L, Lan J C. Lipschitz estimates for fractional multilinear singular integral on variable exponent Lebesgue spaces[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 1–6.

[13] Wang L W, Shu L S. Higher order commutators of marcinkiewicz integral operator on herz-morrey spaces with variable exponent[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2014, 34: 175–186.

[14] 伍火熊. 粗糙核多线性分数次积分算子在加权 Herz 空间的有界性 [J]. 数学进展, 2003, 32: 489–497.

BOUNDEDNESS OF FRACTIONAL MULTILINEAR SINGULAR INTEGRAL AND MAXIMAL OPERATOR ON VARIABLE EXPONENT HERZ SPACES

YIN Lu-lu, ZHANG Jing

(*School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China*)

Abstract: In this paper, we study the the boundedness of fractional multilinear integral operator $T^A_{\Omega,\mu}$ and maximal operator $M^A_{\Omega,\mu}$ on variable exponent spaces. By using some properties of variable exponent Lebesgue space and Lipschitz space, it is additionally obtain the boundedness of fractional multilinear integral operators on variable exponent Herz spaces and variable exponent Herz-Morrey spaces, which generalize the main theorems for the boundedness of fractional multilinear integral operators on variable exponent Lebesgue space.

Keywords: rough kernels; fractional multilinear singular integral; fractional multilinear maximal operator; variable exponent Herz spaces; variable exponent Herz-Morrey Spaces

2010 MR Subject Classification: 42B20; 42B25; 42B35