

加权双线性 Hardy 算子在加幂权 L^p 空间中的最佳常数

肖甫育

(上海大学理学院数学系, 上海 200444)

摘要: 本文研究了加权双线性 Hardy 算子和加权双线性 Cesàro 算子在加幂权 L^p 空间中的有界性, 精确得到了这两类算子在加幂权 L^p 空间中的算子范数. 作为应用, 得到了双线性 Riemann-Liouville 算子和双线性 Weyl 算子的最佳常数.

关键词: 加权双线性 Hardy 算子; 加权双线性 Cesàro 算子; 加幂权 L^p 空间; 双线性 Riemann-Liouville 算子; 双线性 Weyl 算子; 最佳常数

MR(2010) 主题分类号: 26D10; 26D15

中图分类号: O174.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)01-0119-08

1 引言

1920 年, 英国数学家 Hardy 在研究双重 Hilbert 级数的收敛时, 建立了经典 Hardy 算子, 见文献 [1]. 经典的一维 Hardy 算子的定义为 $H(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$, $x \neq 0$, 其中 $1 < p < +\infty$, f 是 $(0, \infty)$ 上的非负局部可积函数. 经典的一维 Hardy 不等式的形式为

$$\left(\int_0^\infty (H(f)(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $1 < p < \infty$, 且 $\frac{p}{p-1}$ 是最佳常数 (见文献 [2]). 借助于简单的变量替换, Hardy 算子 H 可以表示为 $H(f)(x) = \int_0^1 f(tx)dt$, $x \neq 0$.

1984 年, Carton-Lebrun 和 Fosset 在文献 [3] 中首先定义了如下的加权 Hardy 算子: 设 $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 是一个函数, f 是 \mathbb{R}^n 上的复值可测函数, $H_\omega f(x) = \int_0^1 f(tx)\omega(t)dt$, $x \in \mathbb{R}^n$. 当 $\omega(t) \equiv 1$ 及 $n = 1$ 时, H_ω 是经典的一维 Hardy 算子 H . 2001 年, Xiao 在文献 [4] 中得到了加权 Hardy 算子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间中的最佳常数.

定理 A [4] 设 $p \in [1, \infty]$, $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 一个函数, 则 H_ω 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $C_1 = \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \omega(t)dt < \infty$, 且 $\|H_\omega f\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} = C_1$. 同时, Xiao 在文献 [4] 中研究了加权 Hardy 算子的共轭算子, 加权 Cesàro 算子, 其定义如下. 设 $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 是一个函数, f 是 \mathbb{R}^n 上的复值可测函数. 加权 Cesàro 算子的定义为 $V_\omega f(x) = \int_0^1 f(x/t)t^{-n}\omega(t)dt$, $x \in \mathbb{R}^n$. 当 $\omega(t) \equiv 1$ 及 $n = 1$ 时, V_ω 是经典的 Cesàro 算子. 加权 Hardy 算子 H_ω 和加权 Cesàro 算子 V_ω 是一对共轭算子, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)H_\omega f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)V_\omega g(x)dx,$$

*收稿日期: 2019-06-21

接收日期: 2019-07-30

作者简介: 肖甫育 (1993-), 男, 湖南邵阳, 硕士, 主要研究方向: 调和分析. E-mail: maxxfy0125@163.com.

其中 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. 因此 H_ω 和 V_ω 满足交换律: $H_\omega V_\omega = V_\omega H_\omega$.

受多线性算子理论的影响, 2015 年, 傅等在文献 [5] 中将加权 Hardy 算子推广到多线性情形. 设 $\omega : [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 是一个可积函数, f_1, \dots, f_m 是 \mathbb{R}^n 上的复值可测函数, 加权多线性 Hardy 算子定义为

$$H_\omega^m f(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f_1(t_1 x) \cdots f_m(t_m x) \omega(t_1, \dots, t_m) dt_1 \cdots t_m, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

当 $m = 2$ 时, H_ω^2 称为加权双线性 Hardy 算子. 傅等在文献 [5] 得到了加权多线性 Hardy 算子 H_ω^m 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间中的有界性和最佳常数. 由于 $m \geq 3$ 和 $m = 2$ 的情形并没有本质不同, 为此仅叙述双线性的结果.

定理 B [5] 令 $1 < p < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$. 则加权双线性 Hardy 算子 H_ω^2 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界当且仅当

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{p_1}} t_2^{-\frac{n}{p_2}} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

且

$$\|H_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} = C_2.$$

另一方面, 刘和江在文献 [6] 定义了加权双线性 Cesàro 算子. 设 $\omega : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 是一个函数, f_1, f_2 是 \mathbb{R}^n 上的复值可测函数, 加权双线性 Cesàro 算子的定义为

$$V_\omega^2(f_1, f_2)(x) = \int_0^1 \int_0^1 f_1(x/t_1) f_2(x/t_2) t_1^{-n} t_2^{-n} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

很显然加权双线性 Cesàro 算子与加权双线性 Hardy 算子 H_ω^2 并不是一对共轭算子.

众所周知, 加幂权 L^p 空间 (记为 $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)$) 是一类重要的函数空间. 那么加权双线性 Hardy 算子和加权双线性 Cesàro 算子在加幂权 L^p 空间中的有界性以及最佳常数是否可以得到呢? 其最佳常数与底空间的维数 n 、幂权指标 α 存在何种关系? 研究结果将回答这些问题.

2 主要结果

定理 1 令 $1 \leq p < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 则加权双线性 Hardy 算子 H_ω^2 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)$ 有界当且仅当

$$C_3 = \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p}} t_2^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p}} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty \quad (2.1)$$

且

$$\|H_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} = C_3.$$

注 在定理 1 中, 若取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 0$, 则可以得到定理 B.

证 假设 (2.1) 成立. 由 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned} \|H_\omega^2(f_1, f_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \int_0^1 f_1(t_1x) f_2(t_2x) \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^p |x|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(t_1x) f_2(t_2x)|^p |x|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

注意 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 利用 Hölder 不等式 ($1/p = 1/p_1 + 1/p_2$) 和变量替换 $y_i = t_i x$, $i = 1, 2$, 得

$$\begin{aligned} &\|H_\omega^2(f_1, f_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(t_1x)|^{p_1} |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(t_2x)|^{p_2} |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_i(y_i)|^{p_i} |y_i|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}} dy_i \right)^{\frac{1}{p_i}} t_i^{-\left(\frac{n}{p_i} + \frac{\alpha_i}{p}\right)} \right) \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \left(\prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}} dx)} \right) \int_0^1 \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^2 t_i^{-\left(\frac{n}{p_i} + \frac{\alpha_i}{p}\right)} \right) \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

因此 H_ω^2 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)$ 上的有界算子, 且

$$\|H_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \leq C_3.$$

必要性 为了得到合适的下界, 需要选取特殊的函数. 对于充分小的 $\epsilon \in (0, 1)$, 取

$$f_1^\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p} - \frac{p_2}{p_1} \epsilon} & |x| > 1 \end{cases}, \quad f_2^\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p} - \epsilon} & |x| > 1. \end{cases}$$

经过简单的计算得

$$\|f_1^\epsilon\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx)}^{p_1} = \|f_2^\epsilon\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)}^{p_2} = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{p_2 \epsilon},$$

其中 $|\mathbb{S}^{n-1}|$ 表示 n 维单位球面的面积, 有

$$\begin{aligned} &\|H_\omega^2(f_1^\epsilon, f_2^\epsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \int_0^1 f_1^\epsilon(t_1x) f_2^\epsilon(t_2x) \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^p |x|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n-p_2\epsilon} \left(\int_{\frac{1}{|x|}}^1 \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t_1^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p} - \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p} - \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

借助简单的计算, 得到

$$\begin{aligned} & \|H_\omega^2(f_1^\epsilon, f_2^\epsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)}^p \\ & \geq \int_{|x| > \frac{1}{\epsilon}} |x|^{-n-p_2\epsilon} \left(\int_\epsilon^1 \int_\epsilon^1 t_1^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p} - \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p} - \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p dx \\ & = \frac{\epsilon^{p_2\epsilon} |\mathbb{S}^{n-1}|}{p_2\epsilon} \left(\int_\epsilon^1 \int_\epsilon^1 t_1^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p} - \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p} - \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \\ & = \epsilon^{p_2\epsilon} \prod_{i=1}^2 \|f_i^\epsilon\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}} dx)}^p \times \left(\int_\epsilon^1 \int_\epsilon^1 t_1^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p} - \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p} - \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \|H_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ & \geq \epsilon^{\frac{p_2\epsilon}{p}} \int_\epsilon^1 \int_\epsilon^1 t_1^{-\frac{n}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p} - \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{-\frac{n}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p} - \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时, 则 $\epsilon^{\frac{p_2\epsilon}{p}} \rightarrow 1$. 从而 $\|H_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \geq C_3$.

综上所述, 定理 1 得证.

定理 2 令 $1 \leq p < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 则加权双线性 Cesàro 算子 V_ω^2 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)$ 有界当且仅当

$$C_4 = \int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{n(1-p_1)}{p_1} + \frac{\alpha_1}{p}} t_2^{\frac{n(1-p_2)}{p_2} + \frac{\alpha_2}{p}} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty \quad (2.2)$$

且

$$\|V_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} = C_4.$$

证 定理 2 的证明类似于定理 1 的证明. 假设 (2.2) 成立. 由 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned} & \|V_\omega^2(f_1, f_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \int_0^1 f_1(x/t_1) f_2(x/t_2) t_1^{-n} t_2^{-n} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^p |x|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x/t_1) f_2(x/t_2)|^p |x|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}} t_1^{-n} t_2^{-n} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和变量替换 $y_1 = x/t_1, y_2 = x/t_2$, 得

$$\begin{aligned} & \|V_\omega^2(f_1, f_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x/t_1)|^{p_1} |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x/t_2)|^{p_2} |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} t_1^{-n} t_2^{-n} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_i(y_i)|^{p_i} |y_i|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}} dy_i \right)^{\frac{1}{p_i}} t_i^{-\frac{n(1-p_i)}{p_i} + \frac{\alpha_i}{p}} \right) \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & = \left(\prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}} dx)} \right) \int_0^1 \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^2 t_i^{-\frac{n(1-p_i)}{p_i} + \frac{\alpha_i}{p}} \right) \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

因此 V_ω^2 是从 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)$ 上的有界算子, 且

$$\|V_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \leq C_4.$$

必要性 对充分小的 $\epsilon \in (0, 1)$, 取 $f_1^\epsilon, f_2^\epsilon$ 为定理 1 中如 (2.2) 所表示的函数, 则

$$\begin{aligned} & \|V_\omega^2(f_1^\epsilon, f_2^\epsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \int_0^1 f_1^\epsilon(x/t_1) f_2^\epsilon(x/t_2) t_1^{-n} t_2^{-n} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^p |x|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n-p_2\epsilon} \left(\int_0^{|x|} \int_0^{|x|} t_1^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{n(1-p_1)}{p_1} + \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{\frac{\alpha_2}{p} + \frac{n(1-p_2)}{p_2} + \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

注意到当 $0 < \epsilon < 1$ 时, 若 $|x| > 1/\epsilon$ 时, 进一步计算得到

$$\begin{aligned} & \|V_\omega^2(f_1^\epsilon, f_2^\epsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)}^p \\ & \geq \int_{|x| > \frac{1}{\epsilon}} |x|^{-n-p_2\epsilon} \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{n(1-p_1)}{p_1} + \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{\frac{\alpha_2}{p} + \frac{n(1-p_2)}{p_2} + \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p dx \\ & = \frac{\epsilon^{p_2\epsilon} |\mathbb{S}^{n-1}|}{p_2\epsilon} \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{n(1-p_1)}{p_1} + \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{\frac{\alpha_2}{p} + \frac{n(1-p_2)}{p_2} + \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \\ & = \epsilon^{p_2\epsilon} \prod_{i=1}^2 \|f_i^\epsilon\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}} dx)}^p \times \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{n(1-p_1)}{p_1} + \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{\frac{\alpha_2}{p} + \frac{n(1-p_2)}{p_2} + \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \|V_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \\ & \geq \epsilon^{\frac{p_2\epsilon}{p}} \int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{n(1-p_1)}{p_1} + \frac{p_2\epsilon}{p_1}} t_2^{\frac{\alpha_2}{p} + \frac{n(1-p_2)}{p_2} + \epsilon} \omega(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \rightarrow 0^+$, 则 $\|V_\omega^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha dx)} \geq C_4$.

定理 2 得证.

下面首先给出两个常见的算子. 设 $0 < \beta < 1$, f 是 $[0, +\infty)$ 上一个局部可积函数, 则 Riemann-Liouville 分数积分算子 R_β 的定义为 $R_\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\beta-1} dt$. 若 $p > 1$, $\beta > 0$, 则不等式 (见文献 [2, 定理 3.29])

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{R_\beta f(x)}{x^\beta} \right)^p dx \right)^{1/p} < \frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(1+\beta-1/p)} \left(\int_0^\infty f^p(x) dx \right)^{1/p}$$

成立, 其中 $\Gamma(1-1/p)/\Gamma(1+\beta-1/p)$ 是最佳常数.

设 $0 < \beta < 1$, f 是 $[0, +\infty)$ 上一个局部可积函数, 则 Weyl 分数积分算子 W_β 的定义为

$$W_\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{\beta-1} dt.$$

若 $p > 1$, $\beta > 0$, 则不等式 (见文献 [2, 定理 3.29])

$$\left(\int_0^\infty (W_\beta f(x))^p dx \right)^{1/p} < \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(\beta+1/p)} \left(\int_0^\infty (x^\beta f(x))^p dx \right)^{1/p}$$

成立, 其中 $\Gamma(1/p)/\Gamma(\beta+1/p)$ 是最佳常数.

Weyl 算子 W_β 和 Riemann-Liouville 算子 R_β 是一对共轭算子, 见文献 [7]. 即

$$\int_0^\infty f(x)W_\beta g(x)dx = \int_0^\infty R_\beta f(x)g(x)dx,$$

其中 f, g 都是 $[0, +\infty)$ 上非负函数.

作为应用, 当 H_ω^2 和 V_ω^2 中的 ω 取特殊的函数, 可以得到某些双线性平均算子.

(1) 令 $n = 1$, $0 \leq t_1, t_2 < 1$, $0 < \beta < 2$, $|(1-t_1, 1-t_2)| = \sqrt{(1-t_1)^2 + (1-t_2)^2}$, 取 $\omega(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\beta)|1-t_1, 1-t_2|^{2-\beta}}$, 有

$$H_\omega^2(f_1, f_2)(x) = x^{-\beta} \mathbf{R}_\beta^2(f_1, f_2)(x), \quad x > 0,$$

这里 \mathbf{R}_β^2 表示双线性 Riemann-Liouville 算子, 定义如下

$$\mathbf{R}_\beta^2(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^x \frac{f_1(t_1)f_2(t_2)}{|(x-t_1, x-t_2)|^{2-\beta}} dt_1 dt_2.$$

由定理 1 可得推论 1.

推论 1 若 $1 \leq p < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 则算子 \mathbf{R}_β^2 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p\beta} dx)$ 有界当且仅当

$$C_5 = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha_1}{p}} t_2^{-\frac{1}{p_2} - \frac{\alpha_2}{p}} |(1-t_1, 1-t_2)|^{\beta-2} dt_1 dt_2 < \infty,$$

且 $\|\mathbf{R}_\beta^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p\beta} dx)} = C_5$.

(2) 令 $n = 1$, $0 < t_i < 1$, $i = 1, 2$, $0 < \beta < 2$, 取 $\omega(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\beta)t_1 t_2 |(\frac{1}{t_1}-1, \frac{1}{t_2}-1)|^{2-\beta}}$, 则得到

$$V_\omega^2(f_1, f_2)(x) = x^{-\beta} W_\beta^2(f_1, f_2)(x), \quad x > 0,$$

其中 W_β^2 表示双线性 Weyl 算子, 定义如下

$$W_\beta^2(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty \int_x^\infty \frac{f_1(x_1)f_2(x_2)}{|(t_1-x, t_2-x)|^{2-\beta}} dt_1 dt_2.$$

由定理 2, 可得推论 2.

推论 2 若 $1 \leq p < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 则算子 \mathbf{W}_β^2 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p\beta} dx)$ 有界当且仅当

$$C_6 = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^1 t_1^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{1}{p_1} - 2} t_2^{\frac{\alpha_2}{p} + \frac{1}{p_2} - 2} |(\frac{1}{t_1} - 1, \frac{1}{t_2} - 1)|^{\beta-2} dt_1 dt_2 < \infty$$

且 $\|\mathbf{W}_\beta^2\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p\beta} dx)} = C_6$.

(3) 令 $n = 1$, $0 \leq t_1, t_2 < 1$, $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$, 取 $\omega(t_i) = \frac{1}{\Gamma(\beta_i)(1-t_i)^{1-\beta_i}}$, $i = 1, 2$. 令 $\omega(t_1, t_2) = \omega(t_1)\omega(t_2)$, 有

$$H_\omega^2(f_1, f_2)(x) = x^{-(\beta_1+\beta_2)} R_{\beta_1}(f_1)(x) \cdot R_{\beta_2}(f_2)(x), \quad x > 0,$$

其中算子 R_{β_i} 的定义如下

$$R_{\beta_i}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_i)} \int_0^x \frac{f(t_i)}{(x-t_i)^{1-\beta_i}} dt_i, \quad x > 0, \quad i = 1, 2.$$

由定理 1, 可得推论 3.

推论 3 若 $1 \leq p < \infty, 1 < p_1, p_2 < \infty, 1/p = 1/p_1 + 1/p_2, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_i < \frac{p(p_i-1)}{p_i}, i = 1, 2$. 则算子 $R_{\beta_1} \cdot R_{\beta_2}$ 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p(\beta_1+\beta_2)} dx)$ 有界且

$$\|R_{\beta_1} \cdot R_{\beta_2}\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p(\beta_1+\beta_2)} dx)} = \prod_{i=1}^2 \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{p_i} - \frac{\alpha_i}{p})}{\Gamma(\beta_i + 1 - \frac{1}{p_i} - \frac{\alpha_i}{p})}.$$

(4) 令 $n = 1, 0 < t_1, t_2 < 1, 0 < \beta_1, \beta_2 < 1$. 取 $\omega(t_i) = \frac{1}{\Gamma(\beta_i) t_i (\frac{1}{t_i} - 1)^{1-\beta_i}}, i = 1, 2$. 令 $\omega(t_1, t_2) = \omega(t_1)\omega(t_2)$, 有

$$V_{\omega}^2(f_1, f_2)(x) = x^{-(\beta_1+\beta_2)} W_{\beta_1}(f_1)(x) \cdot W_{\beta_2}(f_2)(x), \quad x > 0,$$

其中算子 W_{β_i} 的定义为

$$W_{\beta_i}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_i)} \int_0^x \frac{f(x_i)}{(x-t_i)^{1-\beta_i}} dt_i, \quad x > 0, \quad i = 1, 2.$$

由定理 2, 可得推论 4.

推论 4 若 $1 \leq p < \infty, 1 < p_1, p_2 < \infty, 1/p = 1/p_1 + 1/p_2, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_i > \frac{p(p_i\beta_i-1)}{p_i}, i = 1, 2$. 则算子 $W_{\beta_1} \cdot W_{\beta_2}$ 是从 Lebesgue 乘积空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx)$ 到 $L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p(\beta_1+\beta_2)} dx)$ 有界且

$$\|W_{\beta_1} \cdot W_{\beta_2}\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}} dx) \times L^{p_2}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}} dx) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, |x|^{\alpha-p(\beta_1+\beta_2)} dx)} = \prod_{i=1}^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{p_i} + \frac{\alpha_i}{p} - \beta_i)}{\Gamma(\frac{1}{p_i} + \frac{\alpha_i}{p})}.$$

值得注意的是, 推论 3 和推论 4 中的常数可以由 Hölder 不等式得到上界, 但是说明这两个常数是最佳的似乎并不是很显然的事情.

参 考 文 献

- [1] Hardy G H. Note on a theorem of Hilbert [J]. Math. Z., 1920, 6(3-4): 314-317.
- [2] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities (2nd ed.) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [3] Carton-Lebrun C, Fosset M. Moyennes et quotients de Taylor dans BMO [J]. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1984, 53(2): 85-87.
- [4] Xiao J. L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, 262(2): 660-666.
- [5] Fu Z W, Gong S L, Lu S Z, Yuan W. Weighted multilinear Hardy operators and commutators [J]. Forum. Math., 2015, 27(5): 2825-2851.

- [6] Liu X, Jiang Y S. A bilinear version of weighted Hardy operator [J]. J. Xinjiang Univ. Natur. Sci., 2014, 32(2): 155–157.
- [7] Andersen K F, Sawyer E T. Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1988, 308(2): 547–558.

SHARP BOUND FOR THE WEIGHTED BILINEAR HARDY OPERATOR ON THE L^p SPACE WITH POWER WEIGHT

XIAO Fu-yu

(*Department of Mathematics, College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China*)

Abstract: We study the boundedness of the weighted bilinear Hardy operator and the weighted bilinear Cesàro operator on the L^p space with power weight and obtain norms of these two operators on the L^p space with power weight. As applications, we also calculate sharp bounds of the bilinear Riemann-Liouville operator and the bilinear Weyl operator on the L^p space with power weight.

Keywords: weighted bilinear Hardy operator; weighted bilinear Cesàro operator; L^p space with power weight; bilinear Riemann-Liouville operator; bilinear Weyl operator; sharp bound

2010 MR Subject Classification: 26D10; 26D15