Vol. 40 (2020)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

分数阶 $p(x)$-Laplace 算子方程的多解性

张金国[1]，焦红英[2,3]，刘邱云[1]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

(2. 空军工程大学基础部, 陕西 西安 710051)

(3. 西安交通大学数学与统计学院, 陕西 西安 710049)

摘 要: 本文研究了一类分数阶 $p(x)$-Laplace 算子方程解的存在性和多解性问题. 在非线性项不满足 (AR) 条件时, 利用喷泉定理和分数阶变指数 Sobolev 空间的相关理论, 得到了方程无穷多解的存在性. 从而推广了经典变指数问题的相关结果.

关键词: 分数阶 $p(x)$-Laplace 方程; 分数变指数 Sobolev 空间; 喷泉定理; 多解性

MR(2010) **主题分类号**: 35R11; 35J35 **中图分类号**: O175.29

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)01-0081-09

1 引言

本文主要研究如下的分数阶 $p(x)$-Laplace 算子方程

$$\begin{cases} (-\Delta_{p(x)})^s u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

解的存在性问题, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界区域, $s \in (0,1)$, 连续函数 $p : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ 满足 $sp(x,y) < N$ 及如下条件

(P_1) $1 < p^- := \min\limits_{(x,y)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} p(x,y) \le p(x,y) \le p^+ := \max\limits_{(x,y)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} p(x,y) < +\infty$;

(P_2) p 是对称的, 即对任意的 $(x,y) \in \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$ 有 $p(x,y) = p(y,x)$ 成立.

$(-\Delta_{p(x)})^s$ 称之为分数阶 $p(x)$-Laplace 算子, 其定义如下

$$(-\Delta_{p(x)})^s \varphi(x) = \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^{p(x,y)-2}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp(x,y)}} dy,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{1.2}$$

这里 P.V. 表示 Cauchy 主值. $(-\Delta_{p(x)})^s$ 算子是经典变指数算子 $\Delta_{p(x)}$ 的分数阶形式, 该算子的定义在文献 [1] 中首次给出. 关于分数阶变指数算子以及相应的 Sobolev 空间理论的研究可参考文献 [2–4]. 从 (1.2) 式可以看出 $(-\Delta_{p(x)})^s u(x)$ 在点 $x \in \Omega$ 处的值不仅依赖于 u 在 Ω 上的值, 而且依赖于其在全空间 $\mathbb{R}^N$ 上的值. 因此, $(-\Delta_{p(x)})^s$ 是非局部算子. 此外, 问题 (1.1) 边界条件是限定在 $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$ 上, 而经典 $p(x)$-Laplace 算子问题的 Dirichlet 边界是限制在 $\partial\Omega$ 上. 从而经典 $p(x)$-Laplace 算子问题的研究方法是否适合分数阶 $p(x)$-Laplace 算子方程是值得思考的问题. 本文试图对这一问题作出解答. 有关分数阶 Laplace 算子和 $p(x)$-Laplace 算子的 Dirichlet 边界问题的研究可以参见文献 [5–15].

*收稿日期: 2019-06-03 接收日期: 2019-10-15

作者简介: 张金国 (1980–), 男, 湖北枣阳, 副教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析.

在本文中, 非线性项 $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足如下条件

(f_1) 对任意的 $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$, 存在 $C>0$, 使得 $|f(x,t)|\leq C(1+|t|^{q(x)-1})$, 其中 $p(x,x)<q(x)<p_s^*(x)$ $(\forall x\in\bar{\Omega})$, $p_s^*(x):=\frac{Np(x,x)}{N-sp(x,x)}$ 是分数阶变指数 Sobolev 临界指标, $s\in(0,1)$;

(f_2) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{F(x,t)}{|t|^{p^+}}=+\infty$ 对几乎处处的 $x\in\Omega$ 一致成立, 其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,\tau)d\tau$;

(f_3) $\lim\limits_{|t|\to 0}\frac{F(x,t)}{|t|^{p^+}}=0$ 对几乎处处的 $x\in\Omega$ 一致成立;

(f_4) 存在常数 $\theta>1$, 使得 $\theta G(x,t)\geq G(x,\eta t)$, $\forall(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$, $\eta\in(0,1)$, 其中 $G(x,t)=f(x,t)t-p^+F(x,t)$.

注 1.1 显然上述条件 (f_4) 比 (AR) 条件更弱, 例如函数 $f(x,t)=p^+|t|^{p^+-2}t\ln|t|,\forall t\in\mathbb{R}$ 满足上述假设条件, 但不满足 (AR) 条件.

定理 1.1 设 (P_1)–(P_2), (f_1)–(f_4) 成立, 并且对任意的 $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$, 有 $f(x,-t)=-f(x,t)$. 则方程 (1.1) 存在非平凡弱解列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, 并且当 $n\to\infty$ 时, 有 $\Phi(u_n)\to+\infty$, 其中 Φ 是方程 (1.1) 所对应的能量泛函.

本文的结构如下：第二节主要是给出变指数 Lebesgue 空间和分数阶变指数 Sobolev 空间的定义及其相关性质; 第三节给出本文主要结果定理 1.1 的证明.

2 分数阶变指数 Sobolev 空间

本节主要介绍分数阶变指数 Sobolev 空间的一些相关结论. 具体证明过程可见文献 [5–8, 16, 17] 等.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界域, 记 $C_+(\overline{\Omega})=\{q\in C(\overline{\Omega}):1<q^-\leq q(x)\leq q^+<+\infty,\ \forall x\in\overline{\Omega}\}$, 其中

$$q^-:=\inf_{x\in\overline{\Omega}}q(x),\qquad q^+:=\sup_{x\in\overline{\Omega}}q(x).$$

对任意的 $q\in C_+(\overline{\Omega})$, 定义变指数 Lebesgue 空间 $L^{q(x)}(\Omega)$

$$L^{q(x)}(\Omega):=\{u:u\text{是可测实值函数且满足}\int_\Omega|u(x)|^{q(x)}dx<+\infty\},$$

其范数为

$$\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}=\inf\{\lambda>0:\int_\Omega|\frac{u(x)}{\lambda}|^{q(x)}dx\leq 1\}.$$

由文献 [7] 可知 $(L^{q(x)}(\Omega),\|\cdot\|_{L^{q(x)}(\Omega)})$ 是可分、一致凸 Banach 空间. 为了进一步研究 $L^{q(x)}(\Omega)$ 空间, 定义映射 $\rho_{q(x)}:L^{q(x)}(\Omega)\to\mathbb{R}$ 如 $\rho_{q(x)}(u)=\int_\Omega|u(x)|^{q(x)}dx$.

由文献 [7] 可得如下结论.

引理 2.1 设 $u\in L^{q(x)}(\Omega)$, 则

(1) $\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}>1\ (=1;<1)$ 当且仅当 $\rho_{q(x)}(u)>1\ (=1;<1)$;

(2) 若 $\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}>1$, 则 $\|u\|^{q^-}_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq\rho_{q(x)}(u)\leq\|u\|^{q^+}_{L^{q(x)}(\Omega)}$;

(3) 若 $\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}<1$, 则 $\|u\|^{q^+}_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq\rho_{q(x)}(u)\leq\|u\|^{q^-}_{L^{q(x)}(\Omega)}$.

引理 2.2 设 u, $u_n\in L^{q(x)}(\Omega)$, 则下列结论等价

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{q(x)}(u_n-u)=0$;

(3) $u_n\to u$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{q(x)}(u_n)=\rho_{q(x)}(u)$.

引理 2.3 记 $\hat{q}(x)$ 为 $q(x)$ 的共轭指数. 设 $u\in L^{q(x)}(\Omega)$, $v\in L^{\hat{q}(x)}(\Omega)$, 则

$$|\int_\Omega uv\,dx|\le(\frac{1}{q^-}+\frac{1}{\hat{q}^-})\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\|v\|_{L^{\hat{q}(x)}(\Omega)}\le 2\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\|v\|_{L^{\hat{q}(x)}(\Omega)}. \tag{2.1}$$

对任意的 $x\in\bar{\Omega}$, 记 $\bar{p}(x):=p(x,x)$. 分数阶变指数 Sobolev 空间 $W^{s,p(x,y)}(\Omega)$ 定义如下

$$W:=W^{s,p(x,y)}(\Omega)=\{u\in L^{\bar{p}(x)}(\Omega):\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy<+\infty,\ \lambda>0\},$$

其范数为 $\|u\|_W=[u]_W+\|u\|_{L^{\bar{p}(x)}(\Omega)}$, 其中

$$[u]_W=\inf\{\lambda>0:\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy\le 1\}$$

称之为变指数 Gagliardo 半范. 关于空间 W 有如下嵌入定理.

定理 2.2 [18] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界区域, $s\in(0,1)$, $p:\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\to(1,+\infty)$ 是连续函数使得 $sp(x,y)<N$ 且满足 (P_1) 和 (P_2) 条件. 函数 $r:\overline{\Omega}\to(1,+\infty)$ 是连续的且满足

$$1<r^-\le r(x)<p_s^*(x),\quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

则存在常数 $C=C(N,s,r)>0$ 使得 $\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}\le C\|u\|_W,\forall u\in W$. 从而当 $1<r(x)<p_s^*(x)$ 时, W 连续紧嵌入到空间 $L^{r(x)}(\Omega)$ 中.

由于问题 (1.1) 的边界条件 $u=0$ 是限制在 $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$ 上, 从而定义如下形式的变指数 Sobolev 空间

$$X:=X^{s,p(x,y)}(\Omega)=\left\{u:u|_\Omega\in L^{\bar{p}(x)}(\Omega),\int_{\mathcal{Q}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy<+\infty,\lambda>0\right\},$$

其中 $\mathcal{Q}=\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\backslash(\Omega^c\times\Omega^c)$. 空间 X 的范数为 $\|u\|_X=[u]_X+\|u\|_{L^{\bar{p}(x)}(\Omega)}$, 其中

$$[u]_X=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathcal{Q}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy\le 1\right\}$$

称之为变指数 Gagliardo 半范. 类似于 $(W,\|\cdot\|_W)$ 可知 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是可分自反的 Banach 空间.

注 2.2 由于 $\Omega\times\Omega$ 严格包含于 $\mathcal{Q}$ 中, 所以范数 $\|\cdot\|_W$ 和 $\|\cdot\|_X$ 是不同的.

利用 Tietze 延拓定理, 将定义在 $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$ 上的连续函数 p 延拓到 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上, 仍记作 p, 并且 $sp(x,y)<N$ 在 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 仍成立; 将定义在 $\bar{\Omega}$ 上的函数 $\bar{p}$, r 延拓到 $\mathbb{R}^N$ 上, 仍记作 $\bar{p}$, r, 且对任意的 $x\in\mathbb{R}^N$, 有 $\bar{p}(x)=p(x,x)$, $r(x)<p_s^*(x)$.

定义 X 的线性子空间 $X_0:=X_0^{s,p(x,y)}(\Omega)=\left\{u\in X:u(x)=0 \text{ 几乎处处于 } \mathbb{R}^N\backslash\Omega\right\}$, 其范数为

$$\begin{aligned}\|u\|_{X_0}&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathcal{Q}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy\le 1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy\le 1\right\}.\end{aligned}$$

对任意的 $u \in X_0$, 定义函数 $\rho_{X_0}: X_0 \to \mathbb{R}$ 为

$$\rho_{X_0}(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy.$$

类似于文献 [18], 易证得如下结论.

引理 2.4 对任意的 $u \in X_0$, 有如下结论成立

(1) $\|u\|_{X_0}>1\ (=1;<1)$ 当且仅当 $\rho_{X_0}(u)>1\ (=1;<1)$;

(2) 若 $\|u\|_{X_0}>1$, 则 $\|u\|_{X_0}^{p^-}\le\rho_{X_0}(u)\le\|u\|_{X_0}^{p^+}$;

(3) 若 $\|u\|_{X_0}<1$, 则 $\|u\|_{X_0}^{p^+}\le\rho_{X_0}(u)\le\|u\|_{X_0}^{p^-}$.

引理 2.5 设 $u,\ u_n \in X_0$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{X_0}=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{X_0}(u_n-u)=0$ 是等价的.

注 2.3 (i) $(X_0,\|\cdot\|_{X_0})$ 是可分、自反、一致凸 Banach 空间.

(ii) 定理 2.2 的结论对空间 X_0 亦成立, 且在空间 X_0 中范数 $\|\cdot\|_{X_0}$ 与 $\|\cdot\|_X$ 是等价的.

3 主要结果的证明

本小节给出定理 1.1 的证明.

定义 3.1 若对任意的 $\varphi \in X_0$, 有下式成立

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy=\int_\Omega f(x,u)\varphi dx,$$

则称 $u \in X_0$ 是方程 (1.1) 的弱解.

方程 (1.1) 相应的能量泛函 $\Phi: X_0 \to \mathbb{R}$ 为

$$\Phi(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy-\int_\Omega F(x,u)dx,$$

其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$ 是 f 的原函数. 由非线性项 f 满足的条件可知: 泛函 Φ 是有意义的, $\Phi \in C^1(X_0,\mathbb{R})$, 且 Φ 的 Fréchet 导数为

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy-\int_\Omega f(x,u)vdx.$$

从而泛函 Φ 的临界点即为方程 (1.1) 的弱解.

为了更好的了解泛函 Φ, 定义算子 $L: X_0 \to X_0^*$ 如下

$$\langle L(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy,$$

这里 X_0^* 为空间 X_0 的对偶空间. 则 $\langle L(u),v\rangle=\langle(-\Delta_{p(x)})^s u,v\rangle,\quad \forall u,\ v\in X_0$. 关于算子 L 的性质还有如下结论.

引理 3.6 (见文献 [4, 引理 4.2]) 设函数 p 满足 (P_1) 和 (P_2), $s \in (0,1)$, 对任意的 $(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ 有 $sp(x,y)<N$. 则 L 是 (S_+) 型算子, 即: 若 $u_n \rightharpoonup u_0$ 弱收敛于 X_0 且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle L(u_n)-L(u_0),u_n-u_0\rangle\le 0$, 则 $u_n \to u_0$ 强收敛于 X_0.

定义 3.2 设 E 为 Banach 空间, 泛函 $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. 若满足 $I(u_n) = c + o_n(1)$, $(1+\|u_n\|_E)\|I'(u_n)\|_{E*} = o_n(1)$ 的序列 $\{u_n\} \subset E$ 均存在收敛子列, 则称泛函 I 满足 Cerami c - 条件 (简记 $(C)_c$ - 条件). 若对任意的 $c \in \mathbb{R}$, I 均满足 $(C)_c$ - 条件, 则称 I 满足 (C) - 条件.

定理 3.3 (喷泉定理 [19]) 设 E 为实可分的 Banach 空间, $E = Y \bigoplus Z$, 其中 $\dim Y < +\infty$. 若偶函数 $I \in C^1(E,R)$ 满足 (C) - 条件, 且对每一个 $k = 1,2,\cdots$, 存在 $\rho_k > r_k > 0$, 使得

(i) 当 $k \to \infty$ 时, 有 $b_k := \inf\limits_{u\in Z;\|u\|_E = r_k} I(u) \to +\infty$;

(ii) $a_k := \max\limits_{u\in Y;\|u\|_E=\rho_k} I(u) \le 0$.

则泛函 I 存在一列弱解 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $I(u_n) \to +\infty$ $(n\to\infty)$.

下面首先证明泛函 I 满足 (C) - 条件.

引理 3.7 在定理 1.1 的假设下, 泛函 Φ 满足 (C) - 条件.

证 对任意的 $c \in \mathbb{R}$, 设 $\{u_n\}$ 为泛函 Φ 的 $(C)_c$ - 序列, 即当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\Phi(u_n) \to c, \quad (1+\|u_n\|_{X_0})\Phi'(u_n) \to 0. \tag{3.1}$$

首先证明序列 $\{u_n\}$ 在 X_0 中有界. 假设 $\{u_n\}$ 在 X_0 中无界, 即当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|u_n\|_{X_0} \to \infty$. 令 $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{X_0}}$, 则 $\|w_n\|_{X_0} = 1$, 从而存在 $\{w_n\}$ 的子序列, 仍记作 $\{w_n\}$, 和 $w_0 \in X_0$, 使得

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w_0 & \text{在 } X_0 \text{ 中};\\ w_n \to w_0 & \text{在 } L^{q(x)}(\Omega) \text{ 中};\\ w_n(x) \to w_0(x) & \text{几乎处处于 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{3.2}$$

若 $w_0 = 0$, 取序列 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得 $\Phi(t_nu_n) = \max\limits_{t\in[0,1]}\Phi(tu_n)$. 对任意的 $L > 1$, 令 $\widetilde{w}_n = \frac{Lu_n}{\|u_n\|_{X_0}} = Lw_n$, 则 $\|\widetilde{w}_n\|_{X_0} > 1$. 当 n 充分大时, 可得

$$\begin{aligned}\Phi(t_nu_n) \ge \Phi(\widetilde{w}_n) &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\widetilde{w}_n(x)-\widetilde{w}_n(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy - \int_\Omega F(x,\widetilde{w}_n)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{L^{p(x,y)}|w_n(x)-w_n(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy - \int_\Omega F(x,Lw_n)dx\\ &\ge \frac{L^{p^-}}{p^+}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n(x)-w_n(y)|^{p(x,y)}}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy - \int_\Omega F(x,Lw_n)dx\\ &= \frac{L^{p^-}}{p^+} - \int_\Omega F(x,Lw_n)dx.\end{aligned} \tag{3.3}$$

利用条件 (f_1) 和 (f_3) 可得 $F(x,Lw_n) \to 0$ $(n\to\infty)$. 从而由 L 的任意性可得 $\Phi(t_nu_n) \to +\infty$ $(n\to\infty)$. 又因为 $\Phi(0) = 0$, $\Phi(u_n) = c + o_n(1)$, 所以当 n 充分大时有 $t_n \in (0,1)$, 从而可得

$$\langle \Phi'(t_nu_n), t_nu_n\rangle \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{3.4}$$

结合式 (3.2)–(3.4) 和 (f_4), 可得

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty}[\Phi(u_n) - \frac{1}{p^+}\langle\Phi'(u_n), u_n\rangle] \\
&= \lim_{n\to\infty}[\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy - \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p(x,y)}}{p^+|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy \\
&\quad + \frac{1}{p^+}\int_\Omega G(x,u_n)dx] \\
&\geq \lim_{n\to\infty}[\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|t_nu_n(x)-u_n(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy - \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|t_nu_n(x)-t_nu_n(y)|^{p(x,y)}}{p^+|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy \\
&\quad + \frac{1}{p^+}\int_\Omega \frac{G(x,t_nu_n)}{\theta}dx] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\theta}[\theta\Phi(t_nu_n) - \frac{1}{p^+}\langle\Phi'(t_nu_n), t_nu_n\rangle] = +\infty.
\end{aligned}$$

从而当 $w_0 = 0$ 时, 序列 $\{u_n\}$ 在 X_0 中是有界的.

若 $w_0 \neq 0$, 则令 $\Omega_0 = \{x \in \Omega : w_0(x) \neq 0\}$, 且 $\mathrm{meas}(\Omega_0) > 0$. 对任意的 $x \in \Omega_0$, 有 $|u_n| \to +\infty$ $(n \to \infty)$. 在 Ω_0 中由 (f_2), 可得

$$\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^{p^+}}|w_n|^{p^+} \to +\infty \quad (n \to +\infty). \tag{3.5}$$

由式 (3.5) 和 $\Phi(u_n) = c + o_n(1)$ 可得

$$\begin{aligned}
\frac{c+o_n(1)}{\|u_n\|_{X_0}^{p^+}} + \frac{1}{p^-} \geq \frac{1}{\|u_n\|_{X_0}^{p^+}}\int_\Omega F(x,u_n)dx &= \int_{\Omega_0}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|_{X_0}^{p^+}}dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|_{X_0}^{p^+}}dx \\
&= \int_{\Omega_0}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^{p^+}}|w_n|^{p^+}dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_0}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^{p^+}}|w_n|^{p^+}dx \\
&= \int_{\Omega_0}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^{p^+}}|w_n|^{p^+}dx \to +\infty.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

从而当 $w_0 \neq 0$ 时, 序列 $\{u_n\}$ 在 X_0 中是有界的. 综上所述, 序列 $\{u_n\}$ 在 X_0 中有界.

下证该序列 $\{u_n\}$ 在 X_0 中有收敛子列. 因为 $\{u_n\}$ 在 X_0 中有界, 而 X_0 是自反的, 从而存在 $\{u_n\}$ 的子列, 仍记作 $\{u_n\}$, 以及 $u_0 \in X_0$, 使得 $u_n \rightharpoonup u_0$ 弱收敛于 X_0. 由定理 2.2 和注 2.3, 对任意的 $q(x) < p_s^*(x)$, 有 $\{u_n\} \to u_0$ 强收敛于 $L^{q(x)}(\Omega)$. 利用 Hölder 不等式和嵌入定理, 可得

$$|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u_0)dx| \leq c\int_\Omega |u_n-u_0|dx + c\|u_n-u_0\|_{L^{q(x)}}\||u_n|^{q(x)-1}\|_{L^{\hat{q}(x)}} \to 0 (n\to\infty). \tag{3.7}$$

从而由 $\langle\Phi'(u_n), u_n-u_0\rangle = o_n(1)$ 和式 (3.7) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\langle L(u_n), u_n-u_0\rangle = 0. \tag{3.8}$$

再利用引理 3.6 可得 $u_n \to u_0$ 强收敛于 X_0, 即泛函 Φ 满足 (C) - 条件. 引理 3.7 得证.

因为 X_0 可分自反的 Banach 空间, 则存在 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X_0$, 使得

$$X_0=\overline{\mathrm{span}\{e_j\,:\,j=1,2,3,\cdots\}}.$$

记 $E_j=\mathrm{span}\{e_j\}$, 则 $X_0=\oplus_{j\geq1}E_j$. 对任意的 $k=1,2,\cdots$, 记 $Y_k=\oplus_{j=1}^{k}E_j, Z_k=\overline{\oplus_{j\geq k}E_j}$.

引理 3.8 (见文献 [15, 引理 3.9]) 设 $q\in C_+(\overline{\Omega})$, 对任意的 $x\in\Omega$ 有 $\bar{p}(x)\leq q(x)\leq p_s^*(x)$. 定义 $\beta_k=\sup\{\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\,:\,\|u\|_{X_0}=1,\ \ u\in Z_k\}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=0$.

下面来验证能量泛函 Φ 满足喷泉定理中的两个条件.

引理 3.9 设 $p(x,y)$ 满足 (P_1)–(P_2), f 满足 (f_1)–(f_4). 则存在 $\rho_k>r_k>0$, 使得

(i) 当 $k\to\infty$ 时, 有 $b_k:=\inf\limits_{u\in Z_k;\|u\|_{X_0}=r_k}\Phi(u)\to+\infty$;

(ii) 当 $k\to\infty$ 时, 有 $a_k:=\max\limits_{u\in Y_k;\|u\|_{X_0}=\rho_k}\Phi(u)\leq 0$.

证 (i) 由 (f_1) 和 (f_3), 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $C_\varepsilon>0$, 使得

$$|F(x,u)|\leq\varepsilon|u|^{p^+}+C_\varepsilon|u|^{q(x)},\quad\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R},\tag{3.9}$$

则

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy-\int_\Omega F(x,u)dx\\&\geq\frac{1}{p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}-\varepsilon\int_\Omega|u|^{p^+}dx-C_\varepsilon\int_\Omega|u|^{q(x)}dx.\end{aligned}\tag{3.10}$$

令 $u\in Z_k$, 且 $\|u\|_{X_0}=r_k$. 选取充分小的 ε 使得 $\frac{1}{2p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}\geq\varepsilon\int_\Omega|u|^{p^+}dx$. 则由 (3.10) 式和引理 2.4 (2), 可得

$$\begin{aligned}\Phi(u)&\geq\begin{cases}\dfrac{1}{2p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}-C_\varepsilon\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}^{q^-}, & \text{当 }\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq1,\\ \dfrac{1}{2p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}-C_\varepsilon\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}^{q^+}, & \text{当 }\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}>1\end{cases}\\&\geq\begin{cases}\dfrac{1}{p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}-C, & \text{当 }\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq1,\\ \dfrac{1}{p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}-C_\varepsilon(\beta_k\|u\|_{X_0})^{q^+}, & \text{当 }\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)}>1\end{cases}\\&\geq\frac{1}{p^+}\|u\|_{X_0}^{p^-}-C_\varepsilon(\beta_k\|u\|_{X_0})^{q^+}-C\\&=r_k^{p^-}(\frac{1}{p^+}-C_\varepsilon\beta_k^{q^+}r_k^{q^+-p^-})-C,\end{aligned}\tag{3.11}$$

这里的 C 是互不相等的正常数. 令 $r_k=(2C_\varepsilon\beta_k^{q^+})^{\frac{1}{p^--q^+}}$, 则由引理 3.8 及 $p^-\leq p^+<q^+$, 可得当 $k\to+\infty$ 时有 $r_k\to+\infty$, 从而

$$\Phi(u)\geq r_k^{p^-}\frac{1}{2p^+}-C\to+\infty\quad(k\to+\infty).$$

即当 $k\to+\infty$ 时, 有 $b_k:=\inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|_{X_0}=r_k}\Phi(u)\to+\infty$. (i) 得证

(ii) 对任意的 $u\in Y_k$, 设 $\|u\|_{X_0}\geq 1$, 则由引理 2.4 中 (2), 可得

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy-\int_\Omega F(x,u)dx\\&\leq\frac{1}{p^-}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy-\int_\Omega F(x,u)dx\\&\leq\frac{1}{p^-}\|u\|_{X_0}^{p^+}-\int_\Omega F(x,u)dx.\end{aligned}\tag{3.12}$$

由 (f_2)–(f_3) 知, 对任意的 $u\in Y_k$, 存在常数 $C_k>0$ 使得

$$F(x,u)\geq C_k|u|^{p^+}-\varepsilon|u|^{p^+},\quad\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}.\tag{3.13}$$

因为 Y_k 是有限维的, 所以 Y_k 中的所有范数等价, 从而

$$\int_\Omega F(x,u)dx\geq C_k\|u\|_{X_0}^{p^+}-\varepsilon\|u\|_{X_0}^{p^+}.\tag{3.14}$$

结合式 (3.12) 与 (3.14), 对任意的 $u\in Y_k$, $\|u\|_{X_0}=\rho_k>r_k$, 有

$$\Phi(u)\leq\frac{1}{p^-}\|u\|_{X_0}^{p^+}-C_k\|u\|_{X_0}^{p^+}-\varepsilon\|u\|_{X_0}^{p^+}=(\frac{1}{p^-}-C_k)\|u\|_{X_0}^{p^+}-\varepsilon\|u\|_{X_0}^{p^+},\tag{3.15}$$

取 $C_k\geq\frac{2}{p^-}$, 从而当 ρ_k 充分大时可得, 有 $\max\limits_{u\in Y_k;\|u\|_{X_0}=\rho_k}\Phi(u)\leq 0$ $(k\to\infty)$. (ii) 得证.

定理 1.1 的证明 利用引理 3.7, 引理 3.9 及 $\Phi(-u)=\Phi(u)$, 可知泛函 Φ 满足喷泉定理的几何结构. 从而由喷泉定理 (定理 3.3) 可得方程 (1.1) 在 X_0 中存在一非平凡解列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, 并且该解列满足 $\Phi(u_n)\to+\infty$ $(n\to\infty)$. 定理得证.

参 考 文 献

[1] Kaufmann U, Rossi J D, Vidal R. Fractional Sobolev spaces with variable exponents and fractional $p(x)$-Laplacians[J]. Elec. Jour. Qual. Theory Diff. Equ., 2017, 76: 1–10.

[2] Azroul E, Benkira A, Shimi M. Eigenvalue problems involving the fractional $p(x)$-Laplacian operator[J]. Adv. Oper. Theory, 2019, 4: 539–555.

[3] Bahrouni A. Comparaison and sub-supersolution principles for the fractional $p(x)$-Laplacian[J]. J. Math. Anal. Appl., 2018, 458: 1363–1372.

[4] Bahrouni A, Rădulescu V D. On a new fractional Sobolev space and applications to nonlocal variational problems with variable exponent[J]. Disc. Cont. Dyn. Syst., 2018, 11: 379–389.

[5] Fan X L. Remarks on eigenvalue problems involving the $p(x)$-Laplacian[J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 352: 85–98.

[6] Fan X L, Zhang Q H. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem[J]. Nonlinear Anal., 2003, 52: 1843–1852.

[7] Fan X L, Zhao D. On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$[J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, 263: 424–446.

[8] Fan X L, Zhang Q, Zhao D. Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 302: 306–317.

[9] Zhang J, Cai L. Infinitely many solutions for a superlinear fractional Schrödinger equations[J]. J. Math. (PRC), 2019, 39: 335–343.

[10] Zhang J, Hsu T S. Multiplicity of positive solutions for a nonlocal elliptic problem involving critical Sobolev-Hardy exponents and concave-convex nonlinearities[J]. Acta Mathematica Scientia, 2019, preprint,

[11] Zhang J, Hsu T S. Nonlocal elliptic systems involving critical Sobolev-Hardy exponents and concave-convex nonlinearities[J]. Taiwan J. Math., 2019, 23(6): 1479–1510.

[12] Zhang J, Hsu T S. Existence results for a fractional Laplacian system with critical Sobolev-Hardy exponents and concave-convex nonlinearities[J]. Math. Meth. Appl. Sci., 2019, DOI: 10.1002/mma.6134,.

[13] Zhang J, Hsu T S. Multiple solutions for a fractional Laplacian system involving critical Sobolev-Hardy exponents and homogeneous term[J]. Mathematical Modelling and Analysis, 2019, preprint,.

[14] Zhang J, Liu X, Jiao H. Multiplicity of positive solutions for a fractional laplacian equations involving critical nonlinearity[J]. Topological Meth. Nonlinear Anal., 2019, 53: 151–182.

[15] Zhang J, Bahrouni A. On a class of Kirchhoff-type equation involving fractional $p(x)$-Laplacian[J]. Revista Matemática Complutense, 2019, preprint.

[16] Cruz-Uribe V, Fiorenza A. Variable Lebesgue spaces: foundations and harmonic analysis[M]. Heidelberg: Birkhäuser, 2013.

[17] Rădulescu V D, Repovš D D. Partial Differential Equations with Variable Exponents, Variational Methods and Qualitative Analysis[M]. Boca Raton FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.

[18] Zhang C, Zhang X. Renormalized solutions for the fractional $p(x)$-Laplacian equation with L^1 data[J]. 2017, https://arxiv.org/pdf/1708.04481.pdf.

[19] Willem M. Minimax theorems[M]. Boston: Biekhauser, 1996.

MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR A FRACTIONAL $p(x)$-LAPLACIAN EQUATION

ZHANG Jin-guo[1] , JIAO Hong-ying[2,3] , LIU Qiu-yun[1]

(*1. Department of Mathematics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

(*2.Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

(*3.School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the existence and multiplicity of solutions to a class of fractional $p(x)$-Laplacian equation. By means of Fountain theorem and the theory of fractional variable exponent Sobolev space, we show that the equation has a sequence of nontrivial solutions with high energies, which generalize the results of classical variable exponent problem.

Keywords: fractional $p(x)$-Laplacian operator; fractional variable exponent Sobolev space; fountain theorem; multiple solutions

2010 MR Subject Classification: 35R11; 35J35