

基于同步的有向相互依存网络骨干结构识别

陈洁怡, 涂俐兰, 余东

(武汉科技大学冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430065)

(武汉科技大学理学院, 湖北 武汉 430065)

摘要: 本文探讨了由两个子网构成的有向相互依存网络的骨干结构识别问题. 基于李雅普诺夫稳定性理论、自适应同步控制技术和线性矩阵不等式 (LMI) 方法, 本文提出了使得驱动网络和响应网络达到自适应同步的充分条件. 这些条件使得在网络达到同步的同时, 获得驱动网络的骨干结构的识别. 最后的数值模拟验证了本文所提出的理论的正确性和有效性.

关键词: 有向相互依存网络; 骨干结构识别; 自适应同步; LMI; 李雅普诺夫稳定性理论

MR(2010) 主题分类号: 93D99 中图分类号: O231.9

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2020)01-0070-11

1 引言

2008 年美国的关键基础设施报告指出“理解跨部门基础设施系统之间的相互依赖和相互作用, 对于评估整个关键基础设施系统的恢复能力或鲁棒性至关重要”^[1]. 为了更好地理解现今社会中的重要基础设施系统之间的相互作用, Buldyrev 等人^[2] 首次在数学的框架下研究了两个相互依赖的设施系统的协调性与级联失效. 他们的分析方法主要基于单网络渗流和单网络结构, 从而打开了利用复杂网络工具研究相互依赖设施系统的大门.

相互依存网络是由若干不同性质、不同尺度的复杂网络由相互依存关系耦合成的网络, 所以它仍然可看作是复杂网络, 是一种网络中的网络. 在过去的二十年里, 复杂网络科学中的相互依赖、相互作用研究领域吸引了大批科技工作者的关注^[3-13]. 不只是因为这种相互依赖关系存在于基础设施系统中, 它还广泛存在于社会、经济、工程和生物系统中. 网络的相互作用关系由网络的拓扑结构来表达. 网络的结构决定了网络的功能. 相互依存网络的结构包括子网络结构和骨干结构 (即子网间结构). 相比较而言, 骨干结构扮演着更重要的角色. 一个自然的且带有挑战性的问题是: 对于相互依存网络, 它的骨干结构是怎样的, 如何识别, 如何挖掘?

结构信息的挖掘问题一直是复杂网络科学中的热点问题. 它主要涉及两个问题: 一是结构预测问题, 即从现有观察中出发, 挖掘网络中的缺失信息, 进行网络结构演化预测; 二是从动力学表征挖掘网络结构. 迄今为止, 网络结构信息挖掘和识别已经有一系列的研究成果^[14-25]. Zhang 等人^[14] 通过结合新的模块化功能来识别复杂网络中的重叠社区; Liu 等人^[15] 探讨了具有时滞的一般不确定复杂网络的结构识别和参数识别; Sun 等人^[16] 利用复杂网络的节点和连边的特征来描述蛋白质, 通过分析、识别蛋白质网络的结构获得蛋白质结构的最

*收稿日期: 2018-09-13 接收日期: 2018-10-25

基金项目: 国家自然科学基金资助 (61473338).

作者简介: 陈洁怡 (1994-), 女, 湖北孝感, 硕士, 主要研究方向: 复杂网络的拓扑结构识别.

通讯作者: 涂俐兰

好表达; Wu 等人^[17]研究了在随机噪声下, 时滞/非时滞复杂网络的未知结构恢复问题; Gui 等人^[18]提出了一种新的可扩展算法, 用于识别全基因组基因调控网络 (GRN) 结构; Zhou 等人^[19]通过引入辅助系统, 提出了两种具有耦合时延的复杂时空网络的有限时间拓扑识别方法.

一直以来, 利用动力学来挖掘结构信息是主流方法, 它的基本思想是基于同步控制. 文献[20–27]都是通过设置合适的控制器, 在使得复杂网络达到同步的同时, 获得各种复杂网络结构的识别.

然而, 上述现有结果的研究对象都是单个的复杂网络, 现今, 对相互依存网络甚至网络的网络的结构识别研究少之又少^[28]. 基于以上, 本文将研究由两个子网构成的有向相互依存网络的骨干结构识别问题. 在该网络中, 本文只考虑子网间的耦合连接, 不涉及子网的内部结构. 基于李雅普诺夫稳定性理论、自适应反馈控制技术和 LMI 方法, 本文对响应网络施加合适的自适应控制器, 从理论上提出了使得驱动网络和响应网络达到同步的充分条件. 这些条件简单易行, 而且利用这些条件, 可同时识别出驱动网络中的有向骨干结构.

2 预备知识

给定一个有向相互依存网络, 它由节点数分别为 N 的子网 G_1 和子网 G_2 在相互依赖关系下构成. 网络的状态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_i^1(t) = f(t, x_i^1(t)) + c^1 \sum_{j=1}^N \hat{A}_{ij} H(x_j^2(t)), \\ \dot{x}_i^2(t) = g(t, x_i^2(t)) + c^2 \sum_{j=1}^N \hat{B}_{ij} H(x_j^1(t)), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

其中 $x_i^1 = (x_{i1}^1, x_{i2}^1, \dots, x_{in}^1)^T \in R^n$ 和 $x_i^2 = (x_{i1}^2, x_{i2}^2, \dots, x_{in}^2)^T \in R^n$ 分别是子网 G_1 和子网 G_2 中的第 i 个节点的状态变量; $f: R^n \rightarrow R^n$ 和 $g: R^n \rightarrow R^n$ 均是有界的非线性函数; 常数 $c^1 > 0$ 是子网 G_1 对子网 G_2 的耦合强度, 常数 $c^2 > 0$ 是子网 G_2 对子网 G_1 的耦合强度; $\hat{A} = (\hat{A}_{ij})_{N \times N}$ 是子网 G_1 对子网 G_2 的外部耦合矩阵, 其中 \hat{A}_{ij} 定义为: 若从子网 G_1 的节点 i 出发到子网 G_2 的节点 j 有连接, 那么 $\hat{A}_{ij} \neq 0$; 否则, $\hat{A}_{ij} = 0$. 类似地, $\hat{B} = (\hat{B}_{ij})_{N \times N}$ 是子网 G_2 对子网 G_1 的外部耦合矩阵, 其中 \hat{B}_{ij} 表示: 若从子网 G_2 的节点 i 出发到子网 G_1 的节点 j 有连接, 那么 $\hat{B}_{ij} \neq 0$; 否则, $\hat{B}_{ij} = 0$; 耦合函数 $H: R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 是未知但有界的非线性函数. 特别地, 当 H 为线性函数时, 网络 (2.1) 可表示成

$$\begin{cases} \dot{x}_i^1(t) = f(t, x_i^1(t)) + c^1 \sum_{j=1}^N \hat{A}_{ij} M x_j^2(t), \\ \dot{x}_i^2(t) = g(t, x_i^2(t)) + c^2 \sum_{j=1}^N \hat{B}_{ij} M x_j^1(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

其中 M 是具有适当维数的矩阵.

注 1 本文的研究对象是网络 (2.1). 本文的研究目标是: 在控制器的作用下, 如何识别出网络 (2.1) 的骨干结构 \hat{A}_{ij} 和 \hat{B}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$), 即外部耦合矩阵 \hat{A} 和 \hat{B} .

为了识别出骨干结构, 本文将在李雅普诺夫稳定性理论的框架下, 利用自适应同步控制技术和 LMI 方法, 使得网络达到同步的同时, 获得拓扑结构的识别. 假设网络 (2.1) 为驱动网络, 再设响应网络为

$$\begin{cases} \dot{y}_i^1(t) = f(t, y_i^1(t)) + c^1 \sum_{j=1}^N A_{ij} H(y_j^2(t)) + u_i^1(t), \\ \dot{y}_i^2(t) = g(t, y_i^2(t)) + c^2 \sum_{j=1}^N B_{ij} H(y_j^1(t)) + u_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

其中 $u_i^1(t)$ 和 $u_i^2(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 分别是对子网 G_1 和子网 G_2 施加的控制器.

注 2 在结构识别过程中, 本文的研究目标转化为构造出合适的自适应控制器 $u_i^1(t)$ 和 $u_i^2(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 使得驱动网络 (2.1) 和响应网络 (2.3) 达到自适应同步, 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i^1(t) - x_i^1(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

和

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i^2(t) - x_i^2(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.5)$$

令 $e_i^1(t) = y_i^1(t) - x_i^1(t)$ 和 $e_i^2(t) = y_i^2(t) - x_i^2(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 为子网 G_1 和子网 G_2 的节点的误差状态变量, 则驱动网络 (2.1) 和响应网络 (2.3) 的自适应同步条件 (2.4) 和 (2.5) 也可以表示为: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\|e_i^1(t)\| \rightarrow 0 \text{ 和 } \|e_i^2(t)\| \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

注 3 若令 $\tilde{A}_{ij} = A_{ij} - \hat{A}_{ij}$ 和 $\tilde{B}_{ij} = B_{ij} - \hat{B}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$), 则本文结构识别的目标是在获得式 (2.6) 成立的同时, 满足

$$|\tilde{A}_{ij}| \rightarrow 0 \text{ 和 } |\tilde{B}_{ij}| \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

或

$$A_{ij} \rightarrow \hat{A}_{ij} \text{ 和 } B_{ij} \rightarrow \hat{B}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

为了更好地说明所做出的的理论结果, 下面给出本文需要用到的几个假设和引理.

假设 1 本文总假设 I 为具有适当维数的单位矩阵, 同时设文中所用到的范数 $\|\cdot\|$ 为 2-范数.

假设 2 设 $F(t, e(t)) = f(t, y(t)) - f(t, x(t))$, $G(t, e(t)) = g(t, y(t)) - g(t, x(t))$, 则由函数的有界性, 假设存在正数 L_1 和 L_2 , 使得 $\|F(t, e(t))\| \leq L_1 \|e(t)\|$ 和 $\|G(t, e(t))\| \leq L_2 \|e(t)\|$ 成立.

假设 3 若令 $\tilde{H}(e(t)) = H(y(t)) - H(x(t))$. 类似地, 假设存在常数 $L_3 > 0$, 总有

$$\|\tilde{H}(e(t))\| \leq L_3 \|e(t)\|.$$

引理 1 [29] 对于任意向量 $x, y \in R^n$ 和正定矩阵 $T \in R^{n \times n}$, 下面的矩阵不等式成立

$$2x^T y \leq x^T T x + y^T T^{-1} y.$$

引理 2 [30] 假设 $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ 和 $S(x)$ 都是 x 的矩阵函数, 下列线性矩阵不等式 (LMI) $\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} < 0$ 等价于下列条件中的任何一个

- (1) $R(x) < 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T < 0$,
- (2) $Q(x) < 0, R(x) - S^T(x)Q(x)^{-1}S(x) < 0$.

3 主要结果

基于李雅普诺夫方法、自适应控制技术和 LMI 方法, 本节获得驱动网络 (2.1) 和响应网络 (2.3) 达到自适应同步的充分条件, 从而识别出驱动网络 (2.1) 的骨干结构.

定理 1 当假设 1、假设 2 和假设 3 成立时, 若存在两个正定的矩阵 P 和 Q 使得

$$\begin{bmatrix} (L_1 + L_3 c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ji}|))I - 2k_i^{1*} P & P^T \\ P & -\frac{1}{1+c^1 \sum_{j=1}^N |A_{ij}|} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

且

$$\begin{bmatrix} (L_2 + L_3 c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ji}|))I - 2k_i^{2*} Q & Q^T \\ Q & -\frac{1}{1+c^2 \sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}|} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

成立, 那么网络 (2.1) 和网络 (2.3) 在控制器

$$\begin{cases} u_i^1(t) = -k_i^1 e_i^1(t), \\ u_i^2(t) = -k_i^2 e_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

和自适应律

$$\begin{cases} \dot{k}_i^1 = e_i^{1T}(t) P e_i^1(t), \\ \dot{k}_i^2 = e_i^{2T}(t) Q e_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

和

$$\begin{cases} \dot{A}_{ij} = -c^1 H^T(y_j^2(t)) P e_i^1(t), \\ \dot{B}_{ij} = -c^2 H^T(y_j^1(t)) Q e_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

的作用下达到自适应同步, 其中 k_i^1 和 k_i^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) 是反馈增益, k_i^{1*} 和 k_i^{2*} 分别是 k_i^1 和 k_i^2 的近似值.

证 由网络 (2.1) 和网络 (2.3) 以及假设 1 和假设 2, 可得网络的节点误差状态方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_i^1(t) = F(t, e_i^1(t)) + c^1 \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ij} H(y_j^2(t)) + c^1 \sum_{j=1}^N \hat{A}_{ij} \tilde{H}(e_j^2(t)) - k_i^1 e_i^1(t), \\ \dot{e}_i^2(t) = G(t, e_i^2(t)) + c^2 \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ij} H(y_j^1(t)) + c^2 \sum_{j=1}^N \hat{B}_{ij} \tilde{H}(e_j^1(t)) - k_i^2 e_i^2(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

构造一个李亚普诺夫函数为

$$\begin{aligned} V(t) = & \sum_{i=1}^N e_i^{1T}(t) P e_i^1(t) + \sum_{i=1}^N e_i^{2T}(t) Q e_i^2(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ij}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ij}^2 \\ & + \sum_{i=1}^N (k_i^1 - k_i^{1*})^2 + \sum_{i=1}^N (k_i^2 - k_i^{2*})^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

则由控制器 (3.3) 和自适应律 (3.4) 和 (3.5), 关于误差系统 (3.6) 的导数有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N 2\dot{e}_i^{1T}(t)Pe_i^1(t) + \sum_{i=1}^N 2\dot{e}_i^{2T}(t)Qe_i^2(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2\tilde{A}_{ij}\dot{\tilde{A}}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2\tilde{B}_{ij}\dot{\tilde{B}}_{ij} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N 2(k_i^1 - k_i^{1*})\dot{k}_i^1 + \sum_{i=1}^N 2(k_i^2 - k_i^{2*})\dot{k}_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^N [2F^T(t, e_i^1(t))Pe_i^1(t) + 2c^1 \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ij}H^T(y_j^2(t))Pe_i^1(t) + 2c^1 \sum_{j=1}^N \hat{A}_{ij}\tilde{H}^T(e_j^2(t))Pe_i^1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [2G^T(t, e_i^2(t))Qe_i^2(t) + 2c^2 \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ij}H^T(y_j^1(t))Qe_i^2(t) + 2c^2 \sum_{j=1}^N \hat{B}_{ij}\tilde{H}^T(e_j^1(t))Qe_i^2(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2\tilde{A}_{ij}(-c^1 H^T(y_j^2(t))Pe_i^1(t)) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2\tilde{B}_{ij}(-c^2 H^T(y_j^1(t))Qe_i^2(t)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^N 2k_i^1 e_i^{1T}(t)Pe_i^1(t) + \sum_{i=1}^N 2(k_i^1 - k_i^{1*})e_i^{1T}(t)Pe_i^1(t) + \sum_{i=1}^N 2(k_i^2 - k_i^{2*})e_i^{2T}(t)Qe_i^2(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^N 2k_i^2 e_i^{2T}(t)Qe_i^2(t),
\end{aligned}$$

所以整理得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N [2F^T(t, e_i^1(t))Pe_i^1(t) + 2c^1 \sum_{j=1}^N \hat{A}_{ij}\tilde{H}^T(e_j^2(t))Pe_i^1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [2G^T(t, e_i^2(t))Qe_i^2(t) + 2c^2 \sum_{j=1}^N \hat{B}_{ij}\tilde{H}^T(e_j^1(t))Qe_i^2(t)] \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^N k_i^{1*} e_i^{1T}(t)Pe_i^1(t) - 2 \sum_{i=1}^N k_i^{2*} e_i^{2T}(t)Qe_i^2(t).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

根据引理 1, 有

$$\begin{aligned}
2F^T(t, e_i^1(t))Pe_i^1(t) &\leq F^T(t, e_i^1(t))F(t, e_i^1(t)) + e_i^{1T}(t)P^T Pe_i^1(t) \\
&\leq L_1 e_i^{1T}(t)e_i^1(t) + e_i^{1T}(t)P^T Pe_i^1(t) \\
&= e_i^{1T}(t)(L_1 I + P^T P)e_i^1(t).
\end{aligned}$$

类似地, 有 $2G^T(t, e_i^2(t))Qe_i^2(t) \leq e_i^{2T}(t)(L_2 I + Q^T Q)e_i^2(t)$. 再由引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
2 \sum_{j=1}^N \hat{A}_{ij}\tilde{H}^T(e_j^2(t))Pe_i^1(t) &\leq \sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|(\tilde{H}^T(e_j^2(t))\tilde{H}(e_j^2(t)) + e_i^{1T}(t)P^T Pe_i^1(t)) \\
&\leq \sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|(L_3 e_j^{2T}(t)e_j^2(t)) + \sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|(e_i^{1T}(t)P^T Pe_i^1(t))
\end{aligned}$$

且

$$2 \sum_{j=1}^N \hat{B}_{ij} \tilde{H}^T(e_j^1(t)) Q e_i^2(t) \leq \sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}| (L_3 e_j^{1T}(t) e_j^1(t)) + \sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}| (e_i^{2T}(t) Q^T Q e_i^2(t)).$$

所以不等式 (3.8) 可化为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N [e_i^{1T}(t)(L_1 I + P^T P) e_i^1(t) + L_3 c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ji}|) (e_i^{2T}(t) e_i^2(t)) + c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|) (e_i^{1T}(t) P^T P e_i^1(t))] \\ & + \sum_{i=1}^N [e_i^{2T}(t)(L_2 I + Q^T Q) e_i^2(t) + L_3 c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ji}|) (e_i^{1T}(t) e_i^1(t)) + c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}|) (e_i^{2T}(t) Q^T Q e_i^2(t))] \\ & - 2 \sum_{i=1}^N k_i^{1*} e_i^{1T}(t) P e_i^1(t) - 2 \sum_{i=1}^N k_i^{2*} e_i^{2T}(t) Q e_i^2(t), \end{aligned}$$

整理后可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^N e_i^{1T}(t) [L_1 I + P^T P + c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|) P^T P + L_3 c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ji}|) - 2k_i^{1*} P] e_i^1(t) \\ & + \sum_{i=1}^N e_i^{2T}(t) [L_2 I + Q^T Q + c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}|) Q^T Q + L_3 c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ji}|) - 2k_i^{2*} Q] e_i^2(t), \end{aligned}$$

所以若

$$\begin{cases} L_1 I + P^T P + c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|) P^T P + L_3 c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ji}|) I - 2k_i^{1*} P < 0, \\ L_2 I + Q^T Q + c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}|) Q^T Q + L_3 c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ji}|) I - 2k_i^{2*} Q < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.9)$$

则有 $\dot{V}(t) < 0$. 由李雅普诺夫稳定性理论可知, 在条件 (3.9) 成立时, 网络 (2.1) 和网络 (2.3) 达到自适应同步, 且此时拓扑结构式 (2.7) 和 (2.8) 也成立. 需要特别注意的是: 矩阵不等式 (3.9) 不是线性的. 根据引理 2, 矩阵不等式 (3.9) 可以改写为线性矩阵不等式 (3.1) 和 (3.2), 从而证明完毕.

定理 1 提出了当耦合函数为非线性的情况下, 网络 (2.1) 和网络 (2.3) 达到自适应同步的充分条件. 当耦合函数 $H(\cdot)$ 为线性函数时, 就不需要用到假设 3, 此时, 定理 1 中的条件相对来说更简单些, 因此得以下推论 1.

推论 1 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 若存在两个矩阵 $P > 0$ 和 $Q > 0$ 使得不等式

$$\begin{bmatrix} (L_1 + c^2 (\sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ji}|)) M^T M - 2k_i^{1*} P & P^T \\ P & -\frac{1}{1+c^1 \sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ij}|} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

和

$$\begin{bmatrix} (L_2 + c^1 (\sum_{j=1}^N |\hat{A}_{ji}|)) M^T M - 2k_i^{2*} Q & Q^T \\ Q & -\frac{1}{1+c^2 \sum_{j=1}^N |\hat{B}_{ij}|} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.11)$$

成立, 那么网络 (2.2) 和网络 (2.3) 在控制器 (3.3) 和自适应律 (3.4), (3.5) 的作用下达到自适应同步.

4 数值模拟

为了验证定理 1 的可行性和有效性, 本节将对一个由两个子网构成的有向相互依存网络 (2.1) 和 (2.3) 进行数值模拟. 因为节点个数过多, 对骨干结构的识别就显得过于复杂, 所以在本节中, 为了简单起见, 设网络节点个数为 8, 其中子网 G_1 和子网 G_2 的节点个数分别为 4. 同样地, 对于网络 (2.1) 和 (2.3), 本节只考虑子网间的耦合, 不涉及到子网内部的耦合. 对于子网 G_1 , 设它的每个节点动力系统都是 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}^1 = a_1(x_{i2}^1 - x_{i1}^1), \\ \dot{x}_{i2}^1 = a_3x_{i1}^1 - x_{i1}^1x_{i3}^1 - x_{i2}^1, \\ \dot{x}_{i3}^1 = x_{i1}^1x_{i2}^1 - a_2x_{i3}^1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 4,$$

其中 a_1, a_2, a_3 是实数. 当 $a_1 = 10, a_2 = 8/3, a_3 = 28$ 时, Lorenz 系统是混沌的. 同时, 设子网 G_2 的每个节点动力系统为 Chen 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}^2 = a_1(x_{i2}^2 - x_{i1}^2), \\ \dot{x}_{i2}^2 = (a_3 - a_1)x_{i1}^2 - x_{i1}^2x_{i3}^2 + a_3x_{i2}^2, \\ \dot{x}_{i3}^2 = x_{i1}^2x_{i2}^2 - a_2x_{i3}^2, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 4,$$

其中 a_1, a_2, a_3 是实参数. 当 $a_1 = 35, a_2 = 3, a_3 = 28$ 时, Chen 系统处于混沌状态. 由 Lorenz 系统和 Chen 系统的特点, 可知存在 $L_1 = L_2 = 60$ 满足假设 2. 在以下所有的数值模拟中, 设子网 G_1 和子网 G_2 的外部耦合矩阵为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 0 \\ 9 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

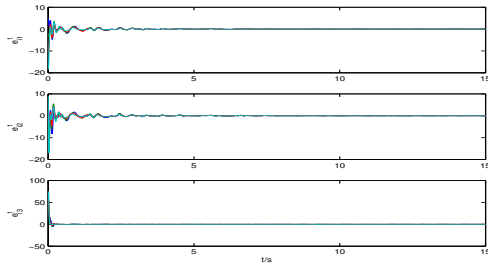
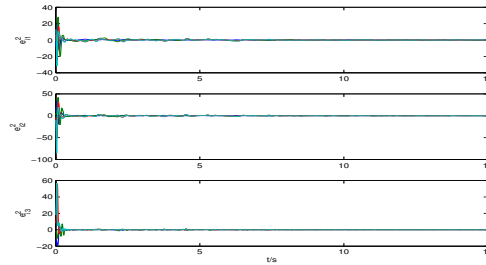
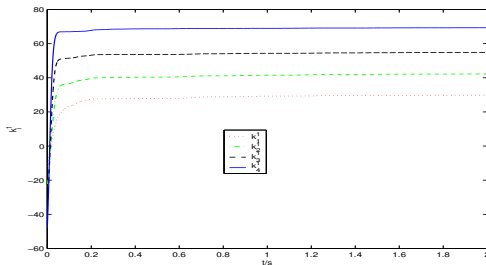
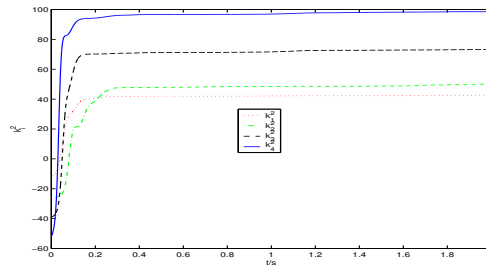
非线性耦合函数为 $H(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), \sin(x_3(t)))^T$. 此时, 可设 $L_3 = 1$ 满足假设 3. 再设子网间的耦合强度 $c^1 = c^2 = 0.5$, 驱动网络 (2.1) 和响应网络 (2.3) 的节点 ($i = 1, 2, \dots, 4$) 的初始值分别为

$$\begin{aligned} & (x_{i1}^1(t), x_{i2}^1(t), x_{i3}^1(t), x_{i1}^2(t), x_{i2}^2(t), x_{i3}^2(t)) \\ &= (5 * i, 10 - 3 * i, -15 - 5 * i, 10 - 2 * i, -13 + 3 * i, 20 - 5 * i), \\ & (y_{i1}^1(t), y_{i2}^1(t), y_{i3}^1(t), y_{i1}^2(t), y_{i2}^2(t), y_{i3}^2(t)) \\ &= (12 - 2 * i, -5 + 3 * i, 1.5 + 5 * i, -5 + 5 * i, 1.3 - 3 * i, -2 + 5 * i), \end{aligned}$$

反馈增益的初始值为 $(k_i^1(t), k_i^2(t)) = (-12 * i, -13 * i)$ ($i = 1, 2, \dots, 4$), 响应网络 (2.3) 的拓扑结构初始值为 $(A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}) = (1.2 * (i + 5), 8 + 1 * i, 2 * i, 0.5 * (i + 7))$ 和 $(B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}, B_{i4}) = (2 * (i + 2), 0.3 * i, 12 * i, 1.5 * i)$. 根据控制器 (3.3) 和自适应律 (3.4), (3.5) 以及以上数据, 利用 Matlab 的 LMI 工具箱, 可知存在正定矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.8607 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8607 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8607 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.5099 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5099 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5099 \end{bmatrix}$$

满足定理 1 中的条件 (3.1) 和 (3.2), 从而从理论上保证了网络 (2.1) 和网络 (2.3) 能够达到自适应同步. 在上述条件下, 利用 Matlab 软件, 本节获得了子网 G_1 和子网 G_2 的误差轨迹图, 如图 1 和图 2. 图 1 中的第二和第三个子图和图 2 均表明了误差状态变量在控制器的作用下, 很快趋于零, 也即驱动网络和响应网络很快达到了渐近同步. 而图 1 的第一个子图表明误差虽然在零的附近有很小的摆动, 但是它的轨迹仍然是有界的, 也就是说它在零的附近是渐近稳定的.

图 1: 子网 G_1 的误差状态变量轨迹图 2: 子网 G_2 的误差状态变量轨迹图 3: 子网 G_1 的反馈增益运动轨迹图 4: 子网 G_2 的反馈增益运动轨迹

在驱动网络和响应网络达到同步的同时, 随着时间的增大, 网络 (2.3) 的控制器反馈增益也很快稳定在有界的值, 如图 3 和图 4 所示. 而且, 此时, 驱动网络 (2.1) 的拓扑结构也同时被识别出. 图 5 和图 6 分别表示了响应网络 (2.3) 中从子网 G_1 出发和从子网 G_2 出发的连接识别轨迹. 与驱动网络 (2.1) 相比, 图 5 和图 6 表明了识别的精度非常高. 随着时间的变化, 矩阵 A 和矩阵 B 的每个元素都很快稳定在矩阵 \hat{A} 和 \hat{B} 式 (4.1) 中的值.

5 结论

随着社会、科技的日益发展与成熟, 我们赖以生存的自然环境、社会环境以及各种人造环境之间的联系变得更加紧密和错综复杂. 相互依存网络从复杂网络的角度, 利用网络的拓扑结构信息阐述了这种关系. 对相互依存网络的结构的研究, 特别是骨干结构的研究是一个具有重要的理论和实际意义的热点课题. 本文研究了有向相互依存网络的骨干结构识别问题. 其中该网络中的连接只存在于子网间, 且具有非线性连接, 而在子网间没有连接关系. 这种形式的网络代表了实际中的很多网络, 在以往的文献中很少涉及到. 基于李亚普诺夫稳定性理论、自适应控制技术和 LMI 方法, 本文提出了自适应同步的充分条件. 这些条件能够保证驱动网络和响应网络中对应的每个节点的运动轨迹达到一致, 在此基础上, 驱动网络的骨干结构也能被响应网络对应识别出来. 而且, 本文的假设和所获得的自适应控制器以及自适应律

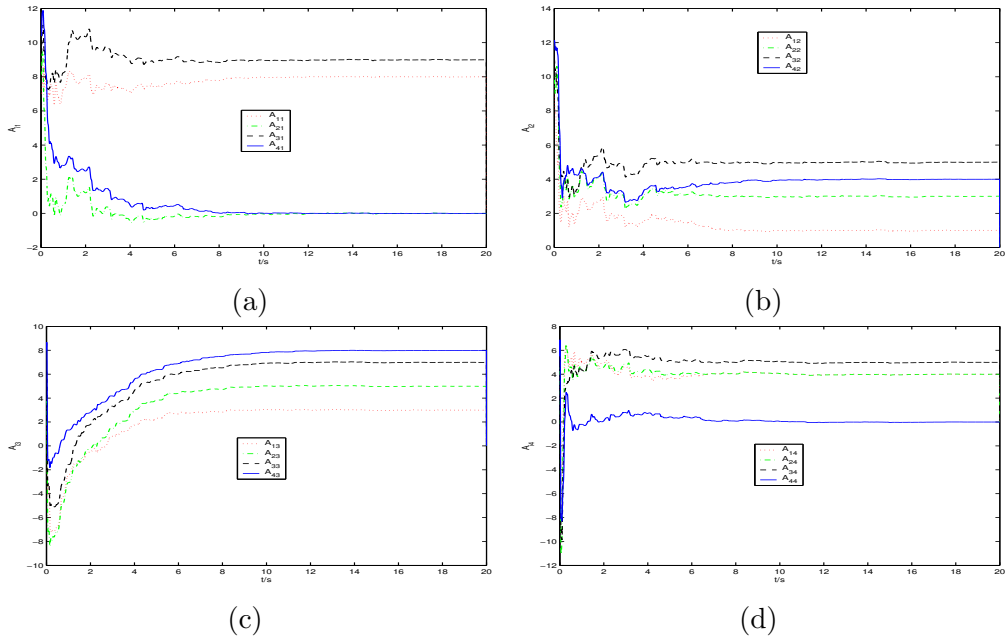


图 5: (a) 矩阵的第 1 列的识别; (b) 矩阵的第 2 列的识别;
(c) 矩阵的第 3 列的识别; (d) 矩阵的第 4 列的识别.

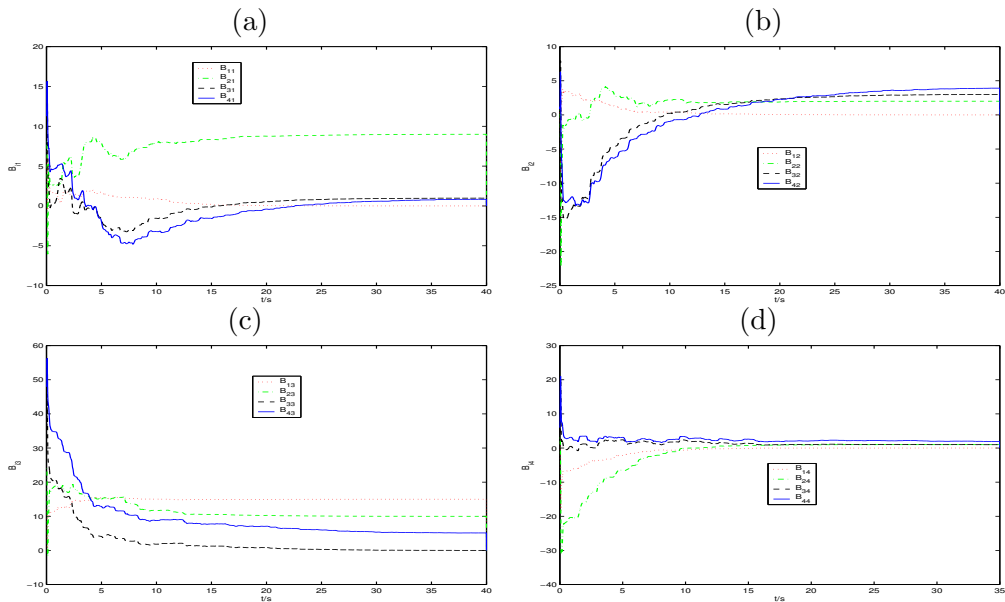


图 6: (a) 矩阵的第 1 列的识别; (b) 矩阵的第 2 列的识别;
(c) 矩阵的第 3 列的识别; (d) 矩阵的第 4 列的识别.

非常简单,也便于实际中运行.最后的数值模拟也证明了所提出理论的正确性和有效性.本文的研究成果是目前相互依存网络研究的一个重要的发展和深入,对于现实生活中存在的相互依存网络(譬如重要的基础设施系统等)具有一定的理论指导意义.

参 考 文 献

- [1] Foster J, Gjeldre E, Graham W. Report of the commission to assess the threat to the united states from electromagnetic pulse (emp) attack: Critical national infrastructures[J]. Technical Report, DTIC Document, 2008.
- [2] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks[J]. *Nature*, 2010, 464(7291): 1025–8.
- [3] Watts D J, Strogatz S H. Collectivedynamics of ‘small-world’ networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440–442.
- [4] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Sci.*, 1999, 286(5439): 509.
- [5] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, Havlin S. Resilience of the internet to random breakdowns[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85(21): 4626.
- [6] Callaway D S, Newman M E, Strogatz S H, Watts D J. Network robustness and fragility: percolation on random graphs[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85(25): 5468.
- [7] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, Havlin S. Breakdown of the internet under intentional attack[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86(16): 3682.
- [8] Barrat A, Barthélemy M, Pastor-Satorras R, Vespignani A. The architecture of complex weighted networks[J]. *Proc. Nat. Acad. Sci. United States Amer.*, 2004, 101(11): 3747–3752.
- [9] Gallos L K, Cohen R, Argyrakis P, Bunde A, Havlin S. Stability and topology of scale-free networks under attack and defense strategies[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94(18): 188701.
- [10] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U. Complex networks: structure and dynamics[J]. *Phys. Rep.*, 2006, 424(4): 175–308.
- [11] Newman M, Barabási A L, Watts D J. The structure and dynamics of networks[M]. Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [12] Kenett D Y, Preis T, Gershgoren G G, Jacob E B. Dependency network and node influence: application to the study of financial markets[J]. *IJBC*, 2012, 22(7): 1250181.
- [13] Majdandzic A, Podobnik B, Buldyrev S V, Kenett D Y, Havlin S, Stanley H E. Spontaneous recovery in dynamical networks[J]. *Nature Phys.*, 2013, 10(1): 34–38.
- [14] Zhang S, Wang R S, Zhang X S. Identification of overlapping community structure in complex networks using fuzzy c -means clustering[J]. *Phys. A*, 2007, 374(1): 483–490.
- [15] Liu H, Lu J A, Lu J H, Hill D J. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay[J]. *Automatica*, 2009, 45(8): 1799–1807.
- [16] Sun J, Jing R Y, Wu D, Zhu T F, Li M L, Li Y Z. The effect of edge definition of complex networks on protein structure identification[J]. *Comput. Math. Methods Med.*, 2013, 2013: 365410.
- [17] Wu X Q, Zhao X Y, Lu J H, Tang L K, Lu J A. Identifying topologies of complex dynamical networks with stochastic perturbations[J]. *IEEE Trans. Control Network Syst.*, 2016, 3(4): 379–389.
- [18] Gui S P, Rice A P, Chen R, Wu L, Liu J, Miao H Y. A scalable algorithm for structure identification of complex gene regulatory network from temporal expression data[J]. *BMC Bioinformatics*, 2017, 18: 74.
- [19] Zhou D D, Hu B, Guan Z H, Liao R Q, Xiao J W. Finite time topology identification of complex spatio-temporal networks with time delay[J]. *Nonl. Dyn.*, 2018, 91(2): 785–795.
- [20] Fan C X, Wan Y H, Jiang Y H, P G. Topology identification for a class of complex dynamical networks using output variables[J]. *Chin. Phys. B*, 2012, 21(2): 193–201.
- [21] Xu Y H, Zhou W N, Fang J A. Topology identification of the modified complex dynamical network with non-delayed and delayed coupling[J]. *Nonl. Dyn.*, 2012, 68(1-2): 195–205.

- [22] Che Y, Li R X, Han C X. Adaptive lag synchronization based topology identification scheme of uncertain general complex dynamical networks[J]. *Eur. Phys. J. B*, 2012, 85(8): 265.
- [23] 杨浦, 郑志刚. 基于动力学同步的复杂网络结构识别速度研究 [J]. *物理学报*, 2012, 61(12): 120508.
- [24] Che Y Q, Li R X, Han C X, Cui S G, Wang J, Wei X L, Deng B. Topology identification of uncertain nonlinearly coupled complex networks with delays based on anticipatory synchronization[J]. *Chaos*, 2013, 23(1): 013127.
- [25] Xu J Q, Zhang J X, Tang W S. Parameters and structure identification of complex delayed networks via pinning control[J]. *T. I. Meas. Control*, 2013, 35(5): 619–624.
- [26] Liu D F, Wu Z Y, Ye Q L. Chaotic systems via adaptive impulsive control[J]. *Chin. Phys. B*, 2014, 23(4): 040504.
- [27] Zhang H, Wang X Y. Complex projective synchronization of complex-valued neural network with structure identification[J]. *J. Franklin I.*, 2017, 354(72): 5011–5025.
- [28] Mei G F, Wu X Q, Wang Y F, Hu M, Lu J A, Chen G R. Compressive-Sensing-Based structure identification for multilayer networks[J]. *IEEE Trans. Cybern.*, 2018, 48(2): 754–764.
- [29] Lu J, Cao J. Synchronization-based approach for parameters identification in delayed chaotic neural networks[J]. *Physica A*, 2007, 382: 672–682.
- [30] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E. *Linear matrix inequalities in system and control theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

SYNCHRONIZATION-BASED BACKBONE STRUCTURE IDENTIFICATION FOR DIRECTED INTERDEPENDENT NETWORKS

CHEN Jie-yi, TU Li-lan, YU Dong

(*Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process,
Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China*)

(*College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China*)

Abstract: In this paper, the problem of backbone structure identification for directed interdependent networks is investigated, which is composed of two subnets. Based on Lyapunov stability theory, adaptive synchronization and control technology and linear matrix inequality method, some sufficient conditions for the adaptive synchronization of drive network and response network are proposed in this paper. These conditions enable us to identify the backbone structure of the drive network while the networks obtain their synchronization. Finally, some numerical simulations verify the correctness and effectiveness of the theory presented in this paper.

Keywords: directed interdependent networks; backbone structure identification; adaptive synchronization; LMI; Lyapunov stability theory

2010 MR Subject Classification: 93D99