

n -角范畴的局部化

王敏雄, 郑燕

(华侨大学数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 本文研究了 n -角范畴的局部化理论. 利用给定的 n -角范畴 K 和 K 的一个相容乘法系 S , 通过局部化方法构造与原范畴对象相同的商范畴 $S^{-1}K$, 在新范畴中 S 的态射成为同构, 并且该商范畴具有 n -角结构且满足一定的泛性, 推广了三角范畴的局部化理论.

关键词: n -角范畴; 商范畴; 局部化

MR(2010) 主题分类号: 18E10; 18E30

中图分类号: O154.1; O154.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)01-0061-09

1 引言

三角范畴^[1]是同调代数中的核心概念. 在最近的发展中, 三角范畴成为数学中的重要工具和研究对象, 是描述数学和数学物理中许多复杂研究对象的基本语言和分类新依据. 高维同调代数由 Iyama^[2-3] 引入并发展, 它也被称为 n -同调代数. 继三角范畴的发展以及高维同调代数的引入后, n -角范畴^[4]自然而然地被提出. n -角范畴是三角范畴的一种推广形式, 经典三角范畴就是 n -角范畴中 $n=3$ 的特殊情况. 给定一个 n -角范畴 K , 有时需要得到一个新的 n -角范畴, 使得两者对象相同, 但对于 n -角范畴 K 的某个态射集 S , 在新范畴中成为同构. 为满足这种需求, 可引入 n -角范畴的局部化理论, 即通过局部化方法构造商范畴.

2 预备知识

定义 2.1^[5] 设 K 是一个加法范畴, S 是 K 中某些态射做成的类, S 称为 K 的一个乘法系, 如果满足下述条件:

(FR1) S 对于态射的合成是封闭的, 即若 $s: X \rightarrow Y$ 和 $t: Y \rightarrow Z$ 是 S 中的态射, 则它们的合成 ts 也是 S 中的态射; 并且对于 K 中的任意对象 X , 其恒等态射 id_X 属于 S ;

(FR2) 对于 K 中每个态射图

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

这里 $s \in S$, 存在 K 中的态射 $g: W \rightarrow Y$ 和 S 中的态射 $t: W \rightarrow X$ 使得下图可交换.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

*收稿日期: 2018-09-03 接收日期: 2019-06-10

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11871014); 福建省教育厅高校青年重点项目资助 (JZ160405)

作者简介: 王敏雄 (1974-), 男, 福建宁化, 副教授, 主要研究方向: 代数表示论.

对偶地, 对于 K 中每个态射图

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \uparrow s \\ X & \xleftarrow{f} & Z \end{array}$$

这里 $s \in S$, 存在 K 中的态射 $g: Y \rightarrow W$ 和 S 中的态射 $t: X \rightarrow W$ 使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{g} & Y \\ \uparrow t & & \uparrow s \\ X & \xleftarrow{f} & Z \end{array}$$

(FR3) 设 $f, g: X \rightarrow Y$ 是 K 中的两个态射. 那么存在 S 中的态射 $s: Y \rightarrow Z$ 使得 $sf = sg$ 当且仅当存在 S 中的态射 $t: W \rightarrow X$ 使得 $ft = gt$.

乘法系 S 称为饱和的, 若 S 满足 $gf, kg \in S$ 蕴含着 $g \in S$.

设 K 是一个加法范畴, S 是 K 的一个乘法系, 对 K 中的任意两个对象 X, Y , 定义 K 中从 X 到 Y 的右分式 (f, s) 为态射图 $X \xleftarrow{s} \cdot \xrightarrow{f} Y$, 其中 $s \in S$. 从 X 到 Y 的两个右分式 $(f, s), (g, t)$ 称为等价, 记为 $(f, s) \sim (g, t)$, 若有交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & & \uparrow i & & \searrow f \\ & s & & & \\ X & \xleftarrow{u} & U & & Y \\ & \uparrow t & \downarrow h & & \nearrow g \\ & & W' & & \end{array}$$

其中 $u \in S$. 易证右分式的等价是一个等价关系. 记 (f, s) 的等价类为 f/s .

定理 2.1 [5] 设 K 是一个加法范畴, S 是 K 的一个乘法系, 那么下列结论成立.

(a) $S^{-1}K$ 是一个加法范畴, 其中 $S^{-1}K$ 的对象是 K 中的对象; $S^{-1}K$ 中从对象 X 到对象 Y 的态射集 $\text{Hom}_{S^{-1}K}(X, Y)$ 是 K 中 X 到 Y 的右分式所有等价类作成的集合.

(b) 局部化函子 $F: K \rightarrow S^{-1}K$ 是加法函子, 其中对 K 中的任意对象 X , $F(X) = X$; 对任意的 K 中态射 $f: X \rightarrow Y$, $F(f) = f/id_X$. 且若 $s \in S$, 则 $F(s)$ 是 $S^{-1}K$ 中的同构.

(c) 对于加法函子 $H: K \rightarrow C$, 若 $s \in S$, $H(s)$ 是 C 中的同构, 则存在唯一一个加法函子 $G: S^{-1}K \rightarrow C$ 使得 $H = GF$.

(d) 若 S 是饱和的, 则 $F(f)$ 是同构当且仅当 $f \in S$.

3 n -角范畴的局部化

定义 3.1 设 (K, Σ, Θ) 是一个 n -角范畴, K 的一个乘法系 S 称为相容乘法系, 若满足

(FR4) 对于任意态射 $s, s \in S$ 当且仅当 $\Sigma s \in S$;

(FR5) 设下图中上下两行均为 n -角, $\varphi_1, \varphi_2 \in S$, 并且左边第一个方块可交换

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \cdots & \xrightarrow{f_{n-1}} & X_n & \xrightarrow{f_n} & \Sigma X_1 \\ \Downarrow \varphi_1 & & \Downarrow \varphi_2 & & & & & & & & \Downarrow \Sigma \varphi_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_3 & \xrightarrow{g_3} & \cdots & \xrightarrow{g_{n-1}} & Y_n & \xrightarrow{g_n} & \Sigma Y_1 \end{array}$$

则存在 $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i \in S, 3 \leq i \leq n$, 使得下图为 n -角态射

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \cdots & \xrightarrow{f_{n-1}} & X_n & \xrightarrow{f_n} & \Sigma X_1 \\ \Downarrow \varphi_1 & & \Downarrow \varphi_2 & & \Downarrow \varphi_3 & & & & \Downarrow \varphi_n & & \Downarrow \Sigma \varphi_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_3 & \xrightarrow{g_3} & \cdots & \xrightarrow{g_{n-1}} & Y_n & \xrightarrow{g_n} & \Sigma Y_1 \end{array}$$

定义 3.2 [6] 设 (K, Σ) 和 (K', Σ') 是两个 n -角范畴, 函子 $L : K \rightarrow K'$ 称为 n -角函子, 若满足

- (a) L 是加法函子.
- (b) 存在一个自然同构 $\eta : L \cdot \Sigma \rightarrow \Sigma' \cdot L$.
- (c) L 保持 n -角, 即若 $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$ 是 K 中的 n -角, 则 $L(X_1) \xrightarrow{L(f_1)} L(X_2) \xrightarrow{L(f_2)} \cdots \xrightarrow{L(f_{n-1})} L(X_n) \xrightarrow{\eta_{X_1} \cdot L(f_n)} \Sigma' L(X_1)$ 是 K' 中的 n -角.

定理 3.1 设 (K, Σ, Θ) 是一个 n -角范畴, S 是 K 的一个相容乘法系. 则

- (1) K 的自同构 Σ 诱导 $S^{-1}K$ 的自同构, 仍记为 Σ , 这里 $\Sigma(b/s) = \Sigma b / \Sigma s$; 并且 $(S^{-1}K, \Sigma, \tilde{\Theta})$ 也是 n -角范畴, 这里 $\tilde{\Theta}$ 中的元素同构于以下的 n - Σ -序列

$$X_1 \xrightarrow{f_1/id_{X_1}} X_2 \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} X_3 \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} X_n \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} \Sigma X_1$$

其中

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$$

是 K 中 n -角.

- (2) 局部化函子 $F : K \rightarrow S^{-1}K$ 是 n -角函子; 对任意的 $s \in S$, $F(s)$ 是同构; 若 $H : K \rightarrow C$ 是 n -角函子, 并且使得对任意的 $s \in S$, $H(s)$ 是同构, 那么存在唯一的 n -角函子 $G : S^{-1}K \rightarrow C$ 使得 $H = GF$.

- (3) $S^{-1}K$ 中, $\tilde{\Theta}$ 是使得 $F : K \rightarrow S^{-1}K$ 是 n -角函子的唯一的 n -角结构.

证 (1) 下面证明 $\tilde{\Theta}$ 满足 (N1)–(N4), 从而 $(S^{-1}K, \Sigma, \tilde{\Theta})$ 是 n -角范畴.

- (N1) (a) 若在 $\tilde{\Theta}$ 中有如下两个 n - Σ -序列

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1/id_{X_1}} & X_2 & \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} & X_3 & \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} & \cdots & \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} & X_n & \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} & \Sigma X_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1/id_{Y_1}} & Y_2 & \xrightarrow{g_2/id_{Y_2}} & Y_3 & \xrightarrow{g_3/id_{Y_3}} & \cdots & \xrightarrow{g_{n-1}/id_{Y_{n-1}}} & Y_n & \xrightarrow{g_n/id_{Y_n}} & \Sigma Y_1 \end{array}$$

因此有 K 中的两个 n -角

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$$

$$Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_3 \xrightarrow{g_3} \cdots \xrightarrow{g_{n-1}} Y_n \xrightarrow{g_n} \Sigma Y_1$$

由于 (K, Σ, Θ) 是 n -角范畴, 所以 Θ 对直和封闭, 因此有

$$\begin{aligned} X_1 \oplus Y_1 &\xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix}} X_2 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}} X_3 \oplus Y_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_3 & 0 \\ 0 & g_3 \end{pmatrix}} \cdots \\ &\cdots \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & g_{n-1} \end{pmatrix}} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & g_n \end{pmatrix}} \Sigma X_1 \oplus \Sigma Y_1 \end{aligned}$$

属于 Θ , 其在 F 下的像为如下 n - Σ -序列

$$\begin{aligned} X_1 \oplus Y_1 &\xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1/id_{X_1} & 0 \\ 0 & g_1/id_{Y_1} \end{pmatrix}} X_2 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_2/id_{X_2} & 0 \\ 0 & g_2/id_{Y_2} \end{pmatrix}} X_3 \oplus Y_3 \\ &\xrightarrow{\begin{pmatrix} f_3/id_{X_3} & 0 \\ 0 & g_3/id_{Y_3} \end{pmatrix}} \cdots \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_{n-1}/id_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & g_{n-1}/id_{Y_{n-1}} \end{pmatrix}} X_n \oplus Y_n \\ &\xrightarrow{\begin{pmatrix} f_n/id_{X_n} & 0 \\ 0 & g_n/id_{Y_n} \end{pmatrix}} \Sigma X_1 \oplus \Sigma Y_1, \end{aligned}$$

所以此 n - Σ -序列属于 $\tilde{\Theta}$, 即 $\tilde{\Theta}$ 对直和封闭.

同理, 可以得到在 $S^{-1}K$ 中 $\tilde{\Theta}$ 对直和项亦封闭.

(b) 设 $f/s: X \rightarrow Y$ 是 $S^{-1}K$ 中的态射, 那么可以用右分式表示如下

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ & \swarrow s & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

这里 $s \in S$. 因为 K 是一个 n -角范畴, 因此由态射 $f: U \rightarrow Y$, K 中存在如下 n -角

$$U \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_2} Y_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} Y_n \xrightarrow{f_n} \Sigma U.$$

考虑下图

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \xrightarrow{f/s} & Y & \xrightarrow{f_2/id_Y} & Y_3 & \xrightarrow{f_3/id_{Y_3}} & \cdots & \xrightarrow{f_{n-1}/id_{Y_{n-1}}} & Y_n & \xrightarrow{f_n/id_{Y_n}} & \Sigma X \\ \downarrow id_U/s & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \downarrow \Sigma(id_U/s) \\ U & \xrightarrow{f/id_U} & Y & \xrightarrow{f_2/id_Y} & Y_3 & \xrightarrow{f_3/id_{Y_3}} & \cdots & \xrightarrow{f_{n-1}/id_{Y_{n-1}}} & Y_n & \xrightarrow{f_n/id_{Y_n}} & \Sigma U \end{array}$$

其中第二行属于 $\tilde{\Theta}$, 且 id_U/s 是同构, 因此第一行也属于 $\tilde{\Theta}$, 也就是说 f/s 可以嵌入一个 $\tilde{\Theta}$ 中的 n - Σ -序列.

(c) 设 X 是 $S^{-1}K$ 中的一个对象, 因此它也是 K 中的一个对象, 那么有 K 中 n -角 $X \xrightarrow{id_X} X \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma X$. 因此可知 $\tilde{\Theta}$ 包含以下平凡 n - Σ -序列

$$X \xrightarrow{id_X/id_X} X \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma X.$$

(N2) 若有 $\tilde{\Theta}$ 中 n - Σ -序列

$$X_1 \xrightarrow{f_1/id_{X_1}} X_2 \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} X_3 \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} X_n \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} \Sigma X_1,$$

那么有 K 中的 n -角 $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$ 左移后可得

$$X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1 \xrightarrow{(-1)^n \Sigma f_1} \Sigma X_2,$$

所以 $\tilde{\Theta}$ 包含如下 n - Σ -序列

$$X_2 \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} X_3 \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} X_n \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} \Sigma X_1 \xrightarrow{(-1)^n \Sigma f_1/id_{X_1}} \Sigma X_2.$$

若有 $\tilde{\Theta}$ 中的 n - Σ -序列

$$X_2 \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} X_3 \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} X_n \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} \Sigma X_1 \xrightarrow{(-1)^n \Sigma f_1/id_{X_1}} \Sigma X_2,$$

那么有 K 中的 n -角

$$X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1 \xrightarrow{(-1)^n \Sigma f_1} \Sigma X_2.$$

由于 K 是 n -角范畴, 则 Θ 包含 n -角

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1,$$

所以 $\tilde{\Theta}$ 包含如下 n - Σ -序列

$$X_1 \xrightarrow{f_1/id_{X_1}} X_2 \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} X_3 \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} X_n \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} \Sigma X_1.$$

因此 (N2) 成立.

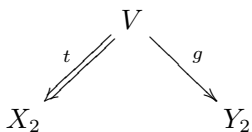
(N3) 给定以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1/id_{X_1}} & X_2 & \xrightarrow{f_2/id_{X_2}} & X_3 & \xrightarrow{f_3/id_{X_3}} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}/id_{X_{n-1}}} & X_n & \xrightarrow{f_n/id_{X_n}} & \Sigma X_1 \\ \downarrow f/s & & \downarrow g/t & & & & & & & & \downarrow \Sigma(f/s) \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1/id_{Y_1}} & Y_2 & \xrightarrow{g_2/id_{Y_2}} & Y_3 & \xrightarrow{g_3/id_{Y_3}} & \dots & \xrightarrow{g_{n-1}/id_{Y_{n-1}}} & Y_n & \xrightarrow{g_n/id_{Y_n}} & \Sigma Y_1 \end{array}$$

第一行和第二行均为 $\tilde{\Theta}$ 中的元素, 并且左边第一个方块可交换. 态射 $f/s, g/t$ 可以分别用如下的右分式来表示

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

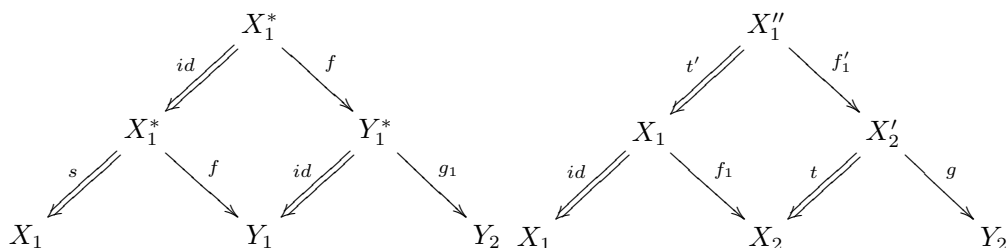
和



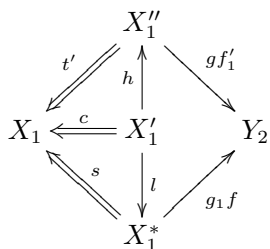
由于左边第一个方块是可交换的, 所以有

$$g/t \cdot f_1/id_{X_1} = gf'_1/t', \quad g_1/id_{Y_1} \cdot f/s = g_1f/s$$

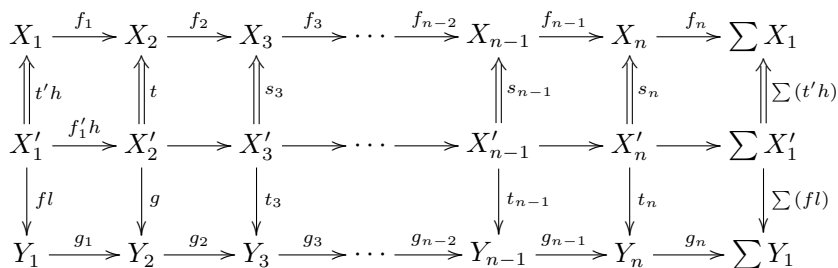
且两式相等



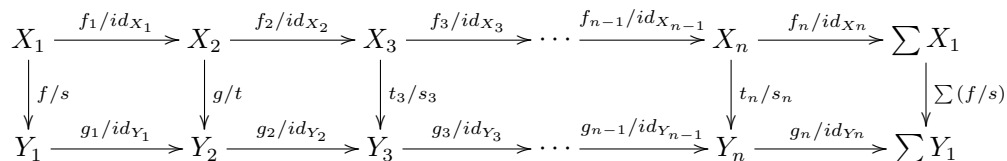
有交换图



因此根据 (FR5) 可知有如下交换图



那么, 得到 $S^{-1}K$ 中的态射 $t_i/s_i : X_i \rightarrow Y_i, 3 \leq i \leq n$, 并且这些态射可使得下图可交换



从而 (N3) 成立.

(N4) 显然 $\tilde{\Theta}$ 满足高维八面体公理 (N4*), 根据文献 [7, 定理 4.4] 知 (N4) 成立.

(2) 由于 $S^{-1}K$ 中的标准 n -角是指 K 中的 n -角在局部化函子 $F : K \rightarrow S^{-1}K$ 下的像, 因此可知 F 是 n -角函子. 由于 $H : K \rightarrow C$ 是 n -角函子, 且对任意的 $s \in S$, $H(s)$ 是同构, 则由定理 2.1 可知存在唯一一个加法函子 $G : S^{-1}K \rightarrow C$ 使得 $H = GF$, 加法函子 G 是 n -角函子可由等式 $H = GF$ 来保证.

(3) 若还有一个满足条件的 n -角结构 $\tilde{\Theta}'$, 则由 $\tilde{\Theta}$ 的定义知 $\tilde{\Theta}' \subseteq \tilde{\Theta}$, 根据文献 [4, 命题 2.5(c)] 知, $\tilde{\Theta}' = \tilde{\Theta}$.

定义 3.3 设 (K, Σ, Θ) 是一个 n -角范畴, A 是 Abel 范畴. 加法函子 $Q : K \rightarrow A$ 称为一个上同调函子, 若对 K 中任意 n -角 $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$ 均有 A 中的正合列

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{Q(\Sigma^{-1}f_n)} Q(X_1) \xrightarrow{Q(f_1)} Q(X_2) \xrightarrow{Q(f_2)} \dots \\ \dots &\xrightarrow{Q(f_{n-1})} Q(X_n) \xrightarrow{Q(f_n)} Q(\Sigma X_1) \xrightarrow{Q(\Sigma f_1)} \dots \end{aligned}$$

命题 3.1 设 K 是 n -角范畴, A 是 Abel 范畴, $Q : K \rightarrow A$ 是一个上同调函子, S 是 K 的一个相容乘法系, 且满足若 $s \in S$, $Q(s)$ 是 A 中的一个同构, 那么存在唯一一个上同调函子 $F_S : S^{-1}K \rightarrow A$ 使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ \downarrow F & \searrow Q & \\ S^{-1}K & \xrightarrow{F_S} & A \end{array}$$

证 加法函子 $F_S : S^{-1}K \rightarrow A$ 的存在性和唯一性可由定理 2.1 保证. 下面证明 F_S 是上同调函子.

设 $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$ 是 $S^{-1}K$ 中的 n -角. 有 K 中的 n -角

$$U_1 \xrightarrow{g_1} U_2 \xrightarrow{g_2} U_3 \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_{n-1}} U_n \xrightarrow{g_n} \Sigma U_1$$

并且有 $S^{-1}K$ 中的 n -角同构

$$\begin{array}{ccccccccccc} U_1 & \xrightarrow{g_1/id_{U_1}} & U_2 & \xrightarrow{g_2/id_{U_2}} & U_3 & \xrightarrow{g_3/id_{U_3}} & \dots & \xrightarrow{g_{n-1}/id_{U_{n-1}}} & U_n & \xrightarrow{g_n/id_{U_n}} & \Sigma U_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & X_n & \xrightarrow{f_n} & \Sigma X_1 \end{array}$$

通过作用 F_S , 得到 A 中的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & QU_1 & \xrightarrow{Qg_1} & QU_2 & \xrightarrow{Qg_2} & \dots & \xrightarrow{Qg_n} & Q\Sigma U_1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F_S X_1 & \xrightarrow{F_S f_1} & F_S X_2 & \xrightarrow{F_S f_2} & \dots & \xrightarrow{F_S f_n} & F_S \Sigma X_1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

因为 Q 是上同调函子, 且上述交换图的第一行是 A 中的正合列, 因此第二行也是正合的, 故 F_S 是上同调函子. \square

定义 3.4^[6] 设 (K, Σ, Θ) 是 n -角范畴, K 的加法满子范畴 G 称为 n -角子范畴, 若 G 对同构封闭, Σ 是 G 的自同构, 并且 G 对扩张封闭, 即对任意 K 中态射 $f_n: X_n \rightarrow \Sigma X_1$, 其中 $X_1, X_n \in G$, 均存在 K 中 n -角 $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$ 使得 $X_i \in G$, $2 \leq i \leq n-1$.

注 在三角范畴局部化理论中, 饱和相容乘法系与厚子范畴之间存在一一对应关系, 其中用到三角的如下重要性质. 设 $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \Sigma X_1$ 是三角, 则 f_1 是同构当且仅当 $X_3 \cong 0$. 但在 n -角范畴 ($n > 3$) 时并没有类似的 n -角性质, 从而不容易在 n -角范畴的饱和相容乘法系与 n -角子范畴之间建立对应.

引理 3.1 设 (K, Σ, Θ) 是 n -角范畴, $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1$ 是 n -角, 则下列叙述等价

- (1) $X_n = 0$;
- (2) $f_{n-1} = 0, f_n = 0$;
- (3) f_1 为可裂单, f_{n-2} 为可裂满.

证 (1) \implies (2) 显然. (2) \implies (1) 由于 $f_n = 0$, 根据文献 [8, 引理 2.3] 知 f_{n-1} 为可裂满, 所以存在态射 g 使得 $f_{n-1} \cdot g = id_{X_n}$, 又 $f_{n-1} = 0$, 从而 $X_n = 0$. 再根据文献 [8, 引理 2.3] 易知 (2) \Leftrightarrow (3).

命题 3.2 设 S 是 n -角范畴 K 的相容乘法系, $F: K \rightarrow S^{-1}K$ 是局部化函子. 令

$$\Psi(S) = \{X_n \mid \exists n\text{-角 } X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \Sigma X_1, \text{ 使得 } f_1, f_{n-2} \in S\},$$

则 $\Psi(S) \subseteq \text{Ker}F$. 进一步, 若 S 饱和, 则 $\Psi(S) = \text{Ker}F$.

证 设 $X_n \in \Psi(S)$, 则在 $S^{-1}K$ 中有标准 n -角

$$F(X_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(X_2) \xrightarrow{F(f_2)} \cdots \xrightarrow{F(f_{n-1})} F(X_n) \xrightarrow{F(f_n)} \Sigma F(X_1)$$

且 $F(f_1), F(f_{n-2})$ 为同构, 由引理 3.1 知 $X_n \in \text{Ker}F$.

反之, 若 $X_n \in \text{Ker}F$, 考虑 K 中 n -角 $0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{g} X_n \xrightarrow{id_{X_n}} X_n \rightarrow \Sigma 0$, 则在 $S^{-1}K$ 中有 n -角 $0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{F(g)} F(X_n) \xrightarrow{id_{F(X_n)}} F(X_n) \rightarrow \Sigma 0$, 且 $F(g)$ 为同构, 由 S 饱和知 $g \in S$, 从而由 $\Psi(S)$ 的定义知 $X_n \in \Psi(S)$.

参 考 文 献

- [1] Verdier J L. Des catégories dérivées des catégories abéliennes[M]. Astérisque, No. 239, Paris: Soc. Math. France, 1996.
- [2] Iyama O. Cluster tilting for higher Auslander algebras[J]. Adv. Math., 2011, 226(1): 1–61.
- [3] Iyama O. Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories[J]. Adv. Math., 2007, 210(1): 22–50.
- [4] Geiss C, Keller B, Oppermann S. n -Angulated categories[J]. J. Reine Angew. Math., 2013, 675: 101–120.
- [5] 章璞. 三角范畴与导出范畴 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [6] Bergh P A, Thaulé M. The Grothendieck group of an n -angulated category[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2014, 218(2): 354–366.

- [7] Bergh P A, Thaule M. The axioms for n -angulated categories[J]. *Algebr. Geom. Topol.*, 2013, 13(4): 2405–2428.
- [8] Lin Z Q. A general construction of n -angulated categories using periodic injective resolutions[J]. *J. Pure Appl. Algebra*, 2019, 223: 3129–3149.

LOCALIZATION OF N -ANGULATED CATEGORIES

WANG Min-xiong , ZHENG Yan

(*School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China*)

Abstract: In this paper, we study localization theory of n -angulated categories. By using localization method, given an n -angulated category K and a compatible localizing class S of K , the quotient category $S^{-1}K$ is constructed. In the new category, objects are the same as the original category and the elements of S become isomorphisms. Furthermore, the quotient category has an n -angulated structure and satisfies certain universal property, which generalize the corresponding results in triangulated categories.

Keywords: n -angulated category; quotient category; localization

2010 MR Subject Classification: 18E10; 18E30