Vol. 40 (2020)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

两类图的符号全控制数

马梦焓, 红 霞
(洛阳师范学院数学科学学院, 河南 洛阳 471022)

摘 要: 本文研究了图 G 的符号全控制数 $\gamma_{st}(G)$ 的问题. 利用穷标法及分类讨论法, 主要得到了两类图 $n\cdot F_{m+1}$ 和 $n\cdot W_{m+1}$ 的符号全控制数的精确值, 从而改正了已知结果, 这里图 $n\cdot F_{m+1}$ 和 $n\cdot W_{m+1}$ 分别表示把 n 个扇图的中心点和 n 个轮图的中心点粘接而得到的图.

关 键 词: 符号全控制函数; 符号全控制数; 图 $n\cdot F_{m+1}$; 图 $n\cdot W_{m+1}$

MR(2010) **主题分类号**: 05C22,05C38,05C75,05C78　　**中图分类号**: O157.5

文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2020)01-0053-08

1 引言

本文所指定的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同文献 [1].

设 $G=(V,E)$ 是一个图, 其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$. 对任意 $u\in V(G)$, 则 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的领域, $N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭领域, $d_G(u)=|N_G(v)|$ 为 u 点在 G 中的度, 而 $\delta=\delta(G)$ 和 $\Delta=\Delta(G)$ 分别为图 G 的最小度和最大度. 在不致混淆情况下, 可将 $N_G(v),N_G[v],\Delta(G),\delta(G)$ 分别简单记为 $N(v),N[v],\Delta,\delta$. 用 C_n,P_n,F_n,W_n 分别表示 n 阶圈、路、扇图和轮图, 其中扇图 F_{m+1} 是指 $m+1$ 个顶点的图, 即由一个中心顶点 w 连接 m 个顶点路 P_m 的所有顶点的图. 轮图 W_{m+1} 是指 $m+1$ 个顶点的图, 即由一个中心顶点 w 连接 m 个顶点圈 C_m 的所有顶点的图. 图 $n\cdot F_{m+1}$ 表示把 n 个扇图的中心点粘接而得到的图, 图 $n\cdot W_{m+1}$ 表示把 n 个轮图的中心点粘接而得到的图.

近几十年来, 图的控制理论的研究内容越来越丰富, 各种类型的符号控制数以及其变化的形式依次被提出, 如图的符号控制数 [2−4]、图的边符号控制数 [5]、图的边全符号控制数 [5]、图的符号全控制数 [6]、图的星符号控制数 [5]、图的圈符号 (边) 控制数 [7]、图的团符号 (边) 控制数 [5]、图的逆符号 (边) 控制数 [5]、图的反符号 (边) 控制数 [5]、罗曼符号 (边) 控制数 [8,9] 等. 其中首次被提出的是图的符号控制概念, 由 Dunbar 等人在 1995 年提出. 图的符号控制数的研究有着广泛的应用背景, 如交通岗位、物资供应点的设置等, 但是符号控制数的计算是 NP 完全问题.

目前很多相关学者研究了关于图的符号全控制数的上下界 [10,11] 以及特殊图的符号全控制数的精确值 [12]. 文献 [13] 中, 吕新忠等人确定了完全图、星图、扇图、轮图以及完全多部图的符号全控制数. 本文中主要得到了两类特殊图 $n\cdot F_{m+1}$ 和 $n\cdot W_{m+1}$ 的符号全控制数的

*收稿日期: 2018-10-20　　接收日期: 2019-2-20

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11701257; 11801253); 河南省教育厅高校重点项目资助 (18A110025; 18A110026); 河南省科技计划项目资助 (182102310930; 182102310955); (2017-JSJYYB-074); (2017XJJG054).

作者简介: 马梦焓 (1999–), 女, 河南南阳, 本科生, 主要研究方向: 图论及其应用.

精确值. 特别地, 当 $n=1$ 时, 得到了扇图和轮图的符号全控制数, 从而改正了文献 [13] 中的两个关于扇图和轮图的符号全控制数的结果.

对于图 $G=(V,E)$, 定义一个函数 $f: V\mapsto R$ 和 G 的一个子集 $S\subseteq V(G)$, 记 $f(S)=\sum\limits_{v\in S}f(v)$. 为简单起见, 下文中适合 $f(u)=+1$ 的顶点称为 $+1$ 点, 适合 $f(u)=-1$ 的顶点称为 -1 点.

2 基本概念

定义 2.1 (文献 [6]) 设图 $G=(V,E)$ 为一个图, 一个双值函数 $f: V\mapsto\{1,-1\}$, 如果对任意的顶点 $v\in V$, 均有 $f(N(v))\geq 1$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个符号全控制函数, 图 G 的符号全控制数定义为 $\gamma_{st}(G)=\min\{f(V)|f$ 是图 G 的一个符号全控制函数 $\}$, 并将使得 $\gamma_{st}(G)=f(V)$ 的符号全控制函数称 f 为图 G 的一个最小符号全控制函数.

从符号全控制的定义, 容易看出以下结论.

引理 2.2 设函数 f 是图 G 的符号全控制函数. 对于 $u\in V(G)$, 若 $d(u)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $f(N(u))$ 为偶数. 若 $d(u)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $f(N(u))$ 为奇数.

3 主要结果

定理 3.1 若 $n\geq 1, m>1$, 则

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

若 $n\geq 1, m=1$, 则

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=\begin{cases}2, & \text{当 } n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ 3, & \text{当 } n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

证 令图 $n\cdot F_{m+1}$ 是由 n 个扇图 F_{m+1} 的中心点粘接而得到的图, 记为

$$n\cdot F_{m+1}=F_{m+1}^{(1)}\cup F_{m+1}^{(2)}\cup\cdots\cup F_{m+1}^{(n)},$$

其中 $F_{m+1}^{(i)}$ 是由中心点 w 与路 $P^{(i)}=u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_m^{(i)}$ 上每个顶点相连接而得到的图. 记

$$\begin{aligned}V(F_{m+1}^{(i)}) &= \{w,u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_m^{(i)}\}, 1\leq i\leq n,\\ E(F_{m+1}^{(i)}) &= \{wu_j^{(i)}|1\leq j\leq m\}\cup\{u_j^{(i)}u_{j+1}^{(i)}|1\leq j\leq m-1\}, 1\leq i\leq n.\end{aligned}$$

首先证明

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})\geq\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

令 f 是图 $n\cdot F_{m+1}$ 的一个最小符号全控制函数, 则 $f(V(G))=\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})$.

设图 $n\cdot F_{m+1}$ 中所有 -1 点个数为 t, 所有 $+1$ 点个数为 s, 则有 $s+t=nm+1$, 从而有

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=nm+1-2t.$$

因为 $f(N(u_1^{(i)}))=f(w)+f(u_2^{(i)})\geq 1$, 故 $f(w)=f(u_2^{(i)})=+1, i=1,\cdots,n$.

当 $m=1$ 时, 图 $n\cdot F_{m+1}$ 是 $n+1$ 个顶点的星图 $K_{1.n}=\{w,u_1^{(1)},\cdots,u_1^{(n)}\}$, 此时给出星图的符号全控制函数 f 如下: $f(w)=+1$,

$$f(u_1^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } i=1,\cdots,\lceil\frac{n}{2}\rceil,\\ -1, & \text{当 } i=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1,\cdots,n.\end{cases}$$

容易验证, 此时函数 f 为最优, 从而有

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=\begin{cases}2, & \text{当 } n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ 3, & \text{当 } n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

当 $m=2$ 时, 图 $n\cdot F_{m+1}$ 中每个顶点必标为 $+1$, 从而有 $\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=2n+1$.

下面只考虑当 $m\geq 3$. 为此通过分三种情况来证明图 $n\cdot F_{m+1}$ 的符号全控制数的下界.

情况 1 当 $m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 因 $d(w)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 由引理知, $f(N(w))$ 为偶数, 从而有

$$f(N(w))\geq 2.$$

故

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=f(V)=f(N(w))+f(w)\geq 3.$$

情况 2 当 $m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 先证明以下五个断言 (这里 $1\leq i\leq n$).

断言 1 每条路 $P^{(i)}$ 上没有连续三个标为 -1 的点. 否则, 不妨设 $f(u_{j-1}^{(i)})=f(u_j^{(i)})=f(u_{j+1}^{(i)})=-1$, 那么对于点 $u_j^{(i)}$, 有

$$f(N(u_j^{(i)}))=f(w)+f(u_{j-1}^{(i)})+f(u_{j+1}^{(i)})=-1,$$

这与符号全控制函数的定义矛盾.

断言 2 若 $U=\{u_r^{(i)},u_s^{(i)}|f(u_r^{(i)})=f(u_s^{(i)})=-1,d(u_r^{(i)},u_s^{(i)})=2\}\subseteq V(P^{(i)})$, 则 $U=\emptyset$. 否则, 存在两个顶点 $u_r^{(i)},u_{r+2}^{(i)}$ 使得 $f(u_r^{(i)})=f(u_{r+2}^{(i)})=-1$ 且 $d(u_r^{(i)},u_{r+2}^{(i)})=2$, 那么对于顶点 $u_{r+1}^{(i)}$, 有

$$f(N(u_{r+1}^{(i)}))=f(w)+f(u_r^{(i)})+f(u_{r+2}^{(i)})=-1$$

这与符号全控制函数的定义矛盾.

结合断言 1 和断言 2, 推出下面的断言 3 和断言 4.

断言 3 每条路 $P^{(i)}$ 上连续三个顶点中至多有两个顶点标为 -1.

断言 4 每条路 $P^{(i)}$ 上连续四个顶点中至多有两个顶点标为 -1.

断言 5 每条路 $P^{(i)}$ 上顶点中至多有 $\frac{m}{2}-1$ 个标为 -1 的点.

因为 $f(u_2^{(i)})=f(u_{m-1}^{(i)})=1$, 由 $f(N(u_2^{(i)}))=f(u_1^{(i)})+f(w)+f(u_3^{(i)})\geq 1$, 有 $f(u_1^{(i)})+f(u_3^{(i)})\geq 0$. 同理, 有 $f(u_m^{(i)})+f(u_{m-2}^{(i)})\geq 0$, 故 $f(u_1^{(i)})$, $f(u_2^{(i)})$, $f(u_3^{(i)})$ 中至多有一个 -1 点. 从而在 $f(u_m^{(i)})$, $f(u_{m-1}^{(i)})$, $f(u_{m-2}^{(i)})$ 中也至多有一个 -1 点. 剩余顶点个数为 $m-6$ 个, 再由断言 3 可知在剩余顶点中至多有 $\frac{m-6}{2}$ 个 -1 点. 故 $P^{(i)}$ 上顶点中至多有 $2+\frac{m-6}{2}=\frac{m}{2}-1$ 个 -1 点.

因为 $\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=nm+1-2t$. 由断言 5 可知

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})=nm+1-2t\geq nm+1-2n(\tfrac{m}{2}-1)=2n+1.$$

情况 3 当 $m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 情况 2 中的断言 1、2、3、4 依然成立.

断言 6 每条路 $P^{(i)}$ 上顶点中至多有 $\frac{m-1}{2}$ 个标为 -1 的点.

当 $m=3$ 时, 由于 $f(u_2^{(i)})=1$ 且 $f(u_1^{(i)}),f(u_3^{(i)})$ 不能同时为 -1, 从而每条路 $P^{(i)}$ 上顶点中至多有 1 个标为 -1 点. 当 $m=5$ 时, 由于 $f(u_2^{(i)})=f(u_4^{(i)})=1$ 且 $f(u_1^{(i)}),f(u_3^{(i)}),f(u_5^{(i)})$ 不能同时为 -1, 从而每条路 $P^{(i)}$ 上顶点中至多有 2 个标为 -1 点. 当 $m\geq 7$ 时, 因为 $f(u_2^{(i)})=f(u_{m-1}^{(i)})=1$ 且 $f(N(u_2^{(i)}))\geq 1$,$f(N(u_{m-1}^{(i)}))\geq 1$, 故 $f(u_1^{(i)})$,$f(u_2^{(i)})$,$f(u_3^{(i)})$ 中至多有一个 -1 点. 同理有 $f(u_m^{(i)})$, $f(u_{m-1}^{(i)})$, $f(u_{m-2}^{(i)})$ 中至多有一个 -1 点. 再由断言 3、4 可知, 剩余 $m-6$ 个点中至多有 $\frac{m-5}{2}$ 个 -1 点, 故路 $P^{(i)}$ 上至多有 $2+\frac{m-5}{2}=\frac{m-1}{2}$ 个 -1 点.

从断言 6 可知, $n\cdot F_{m+1}$ 中所有 -1 点个数 t 至多为 $n(\frac{m-1}{2})$ 个, 从而有

$$\begin{aligned}\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1}) &= nm+1-2t\geq nm+1-2n(\frac{m-1}{2})\\ &= nm+1-n(m-1)=n+1.\end{aligned}$$

综上所述, 有

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})\geq\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

下面给出 $n\cdot F_{m+1}$ 的符号全控制的上界.

情况 1 当 $m\equiv 0\ (mod\ 4)$ 时, 给出 $n\cdot F_{m+1}$ 的一个符号全控制函数 f: $f(w)=+1$.

当 $m=4$ 时, 令

$$f(u_j^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } i=1,j\neq 1,\\ & \text{当 } i\neq 1,j=2,3;\\ -1, & \text{当 } i=1,j=1,\\ & \text{当 } i\neq 1,j=1,4.\end{cases}$$

当 $m>4$ 时, 令

$$f(u_j^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } i=1,2,3,\cdots,n,j=2,3,m-1,m-2,\\ & \text{当 } i\neq 1,4\leq j\leq m-3 \text{ 且 } j\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ & \text{当 } i=1,4\leq j\leq m-4 \text{ 且 } j\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\ 4),j=m-3;\\ -1, & \text{当 } i=1,2,3,\cdots,n,j=1,m,\\ & \text{当 } i\neq 1,4\leq j\leq m-3 \text{ 且 } j\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ & \text{当 } i=1,4\leq j\leq m-4 \text{ 且 } j\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}$$

容易验证, 此时 $f(V)=3$, 从而有

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})\leq 3.$$

情况 2 当 $m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 对于 $1\leq i\leq n$, 给出 $n\cdot F_{m+1}$ 的一个符号全控制函数 f: $f(w)=+1$,

$$f(u_j^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } j=2,3,m-1,m-2,\\ & \text{当 } 4\leq j\leq m-3,j\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\ 4);\\ -1, & \text{当 } j=1,m,\\ & \text{当 } 4\leq j\leq m-3,j\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}$$

容易验证, 此时 $f(V)=2n+1$, 从而有 $\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})\le 2n+1$.

情况 3 当 $m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 对于 $1\le i\le n$, 给出 $n\cdot F_{m+1}$ 的一个符号全控制函数 f: $f(w)=+1$.

当 $m=3$ 时, 令

$$f(u_j^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } j=2,3,\\ -1, & \text{当 } j=1.\end{cases}$$

当 $m=5$ 时, 令

$$f(u_j^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } j=2,3,4,\\ -1, & \text{当 } j=1,5.\end{cases}$$

当 $m>5$ 时, 令

$$f(u_j^{(i)})=\begin{cases}+1, & \text{当 } j=2,3,m-1,m-2,\\ & \text{当 } 4\le j\le m-3, j\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\ 4);\\ -1, & \text{当 } j=1,m,\\ & \text{当 } 4\le j\le m-3, j\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}$$

容易验证, 此时 $f(V)=n+1$, 从而有

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})\le n+1.$$

综上所述, 有

$$\gamma_{st}(n\cdot F_{m+1})\le\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)\end{cases}$$

定理 1 证毕.

注 定理 1 中当 $m=1$ 时, 得到了 $n+1$ 阶星图的符号全控制数的结果, 这与文 [13] 中的结论一致.

定理 3.2 设 $n\ge 1, m\ge 3$, 则

$$\gamma_{st}(n\cdot W_{m+1})=\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)\end{cases}$$

证 令图 $n\cdot W_{m+1}$ 是由 n 个轮图 W_{m+1} 的中心点粘接而得到的图, 记为

$$n\cdot W_{m+1}=W_{m+1}^{(1)}\cup W_{m+1}^{(2)}\cup\cdots\cup W_{m+1}^{(n)},$$

其中 $W_{m+1}^{(i)}$ 是由中心点 w 与圈 $C^{(i)}=u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_m^{(i)},u_1^{(i)}$ 上每个顶点相连接而得到的图. 记

$$\begin{aligned}V(W_{m+1}^{(i)}) &= \{w,u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_m^{(i)}\}, 1\le i\le n,\\ E(W_{m+1}^{(i)}) &= \{wu_j^{(i)}|1\le j\le m\}\cup\{u_j^{(i)}u_{j+1}^{(i)}|1\le j\le m-1\}\cup\{u_1^{(i)}u_m^{(i)}\}, 1\le i\le n.\end{aligned}$$

令 f 是图 $n\cdot W_{m+1}$ 的一个最小符号全控制函数, 则

$$f(V(G)) = \gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}).$$

设 $n \cdot W_{m+1}$ 中所有 -1 点个数为 t, 所有 $+1$ 点个数为 s, 则有 $s+t=nm+1$, 从而有

$$\gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) = nm+1-2t.$$

首先证明

$$\gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) \geq \begin{cases} 2n+1, & \text{当 } m \equiv 2 \pmod 4 \\ 3, & \text{当 } m \equiv 0 \pmod 4 \\ n+1, & \text{当 } m \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

若 $f(w)=-1$ 时, 注意到, 对于每个点 $u_j^{(i)}$ 有 $f(N(u_j^{(i)})) \geq 1$ 且 $w \in N(u_j^{(i)})$, 从而必有 $f(u_j^{(i)})=1$. 故, 有

$$\gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) = mn-1.$$

若 $f(w)=1$ 时, 分情况讨论图 $n \cdot W_{m+1}$ 的符号全控制数的下界.

情况 1　当 $m \equiv 0 \pmod 4$ 时, 同证明定理 1 中的下界时的情况 1 一样推导出

$$\gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) = f(V) = f(N(w)) + f(w) \geq 3.$$

情况 2　当 $m \equiv 2 \pmod 4$ 时, 定理 1 中的断言 1、2、3、4 仍然成立.

断言 7　每个圈 $C^{(i)}$ 上顶点中至多有 $\frac{m}{2}-1$ 个标为 -1 的点. 因为 $f(N(u_1^{(i)})) = f(u_2^{(i)}) + f(w) + f(u_m^{(i)}) \geq 1$, 有 $f(u_2^{(i)}) + f(u_m^{(i)}) \geq 0$. 同理, 有

$$f(u_1^{(i)}) + f(u_{m-1}^{(i)}) \geq 0.$$

故 $\{f(u_1^{(i)}), f(u_2^{(i)}), f(u_m^{(i)}), f(u_{m-1}^{(i)})\}$ 中至多有两个 -1 点. 剩余顶点个数为 $m-4$ 个, 其中顶点 $\{f(u_3^{(i)}), \cdots, f(u_{m-4}^{(i)})\}$ 中, 由断言 4 可知至多有 $\frac{m-6}{2}$ 个 -1 点. 从而剩余两个顶点 $f(u_{m-2}^{(i)}) = f(u_{m-3}^{(i)}) = +1$(否则, 存在一个点 $u_j^{(i)} \in V(C^{(i)})$ 使得 $f(N(u_j^{(i)})) < 1$, 这与符号全控制数的定义矛盾). 故 $C^{(i)}$ 上顶点中至多有 $2+\frac{m-6}{2}=\frac{m}{2}-1$ 个 -1 点.

因为 $\gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) = nm+1-2t$. 由断言 7 可知

$$\gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) = nm+1-2t \geq nm+1-2n(\tfrac{m}{2}-1) = 2n+1.$$

情况 3　当 $m \equiv 1 \pmod 2$ 时, 定理 1 中的断言 1、2、3、4 仍然成立.

断言 8　每圈 $C^{(i)}$ 上顶点中至多有 $\frac{m-1}{2}$ 个标为 -1 的点.

从上述情况 2 知, $\{f(u_1^{(i)}), f(u_2^{(i)}), f(u_m^{(i)}), f(u_{m-1}^{(i)})\}$ 中至多有两个 -1 点. 剩余顶点个数为 $m-4$ 个, 其中顶点 $\{f(u_3^{(i)}), \cdots, f(u_{m-3}^{(i)})\}$ 中, 由断言 4 可知至多有 $\frac{m-5}{2}$ 个 -1 点. 从而剩余一个顶点 $f(u_{m-2}^{(i)}) = +1$(否则, 存在一个点 $u_j^{(i)} \in V(C^{(i)})$ 使得 $f(N(u_j^{(i)})) < 1$, 这与符号全控制数的定义矛盾). 故, 圈 $C^{(i)}$ 上至多有 $2+\frac{m-5}{2}=\frac{m-1}{2}$ 个 -1 点.

从断言 8 可知, $n \cdot W_{m+1}$ 中所有 -1 点个数 t 至多为 $n(\frac{m-1}{2})$ 个, 从而有

$$\begin{aligned} \gamma_{st}(n \cdot W_{m+1}) &= nm+1-2t \geq nm+1-2n(\frac{m-1}{2}) \\ &= nm+1-n(m-1) = n+1. \end{aligned}$$

考虑到当 $f(w)=-1$ 和 $f(w)=1$ 时的图 $n\cdot W_{m+1}$ 的符号全控制数的下界, 容易得出

$$\gamma_{st}(n\cdot W_{m+1})\geq\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2 \pmod 4,\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0 \pmod 4,\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

下面再考虑图 $n\cdot W_{m+1}$ 的符号全控制的上界. 同定理 1 的证明, 现只需定义一个符号全控制数函数 g 使得 $g=f$ (这里 f 是指定理 1 情况 3 中给出的函数 f).

因图 $n\cdot W_{m+1}$ 比图 $n\cdot F_{m+1}$ 多了边 $\{u_1^{(i)}u_m^{(i)}\}$, 增加此边时只有对两个端点 $u_1^{(i)}$,$u_m^{(i)}$ 的符号全控制数有变化. 事实上, 在符号全控制数函数 g 下, 有 $g(N(u_1^{(i)}))=1, g(N(u_m^{(i)}))=1$. 对于顶点 $u\neq u_1^{(i)}, u_m^{(i)}$, 有 $g(N(u))=f(N(u))$. 容易验证, 得出

$$\gamma_{st}(n\cdot W_{m+1})\geq\begin{cases}2n+1, & \text{当 } m\equiv 2 \pmod 4,\\ 3, & \text{当 } m\equiv 0 \pmod 4,\\ n+1, & \text{当 } m\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

证毕.

特别地, 定理 1 和定理 2 中当 $n=1$ 时, 分别得到扇图和轮图的符号全控制数的结果.

推论 3.3 若 $n=1, m\geq 1$, 则

$$\gamma_{st}(F_{m+1})=\begin{cases}3, & \text{当 } m\equiv 0 \pmod 2,\\ 2, & \text{当 } m\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

若 $n=1, m\geq 2$, 则

$$\gamma_{st}(W_{m+1})=\begin{cases}3, & \text{当 } m\equiv 0 \pmod 2,\\ 2, & \text{当 } m\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

注 事实上, 定理 1 证明过程中的断言 3 否定了文 [13] 中的证明过程, 从而得出扇图和轮图的符号全控制数的精确值.

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. London: Macmillan, 1977.

[2] Dunbar J E, Hedetniemi S T, Henning M A, Slater P J. Signed domination in graphs[M]. New York: John Wiley Inc., 1995.

[3] 尚华辉, 苗连英. 关于图的两类符号控制数的下界 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(21): 223–230.

[4] 闫云娟, 徐保根, 冯大一. 两类图的符号控制数 [J]. 华东交通大学学报, 2017, 34(6): 109–115.

[5] 徐保根. 图的控制与染色理论 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2013.

[6] Henning M A. Signed total domination in graphs[J]. Discrete Math., 2004, 278(7): 109–125.

[7] Xu Baogen. On signed cycle domination numbers in graphs[J]. Discrete Math., 2009, 309(1): 1007–1012.

[8] Lutz V. On the signed total Roman domination and domatic numbers of graphs[J]. Discrete Appl. Math., 2016, 214: 179–186.

[9] Leila A, Seyed M S. Signed total roman edge domination in graphs[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37(4): 1039–1053.

[10] Hosseini Moghaddam S M, Mojdeh D A, Samadi B, Volkmann L. New bounds on the signed total domination number of graphs[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2016, 36(2): 467–477.

[11] 尚华辉, 谢凤艳. 关于图的两类符号全控制数 [J]. 四川文理学院学报, 2016, 26(5): 17–20.

[12] Li Wensheng,Xing Huaming, Sohn M Y. On the signed total domination number of generalized petersen graphs $P(n,2)$[J]. Bull. Korean Math. Soc., 2013, 50(6): 2021–2026.

[13] 吕新忠, 仪明源. 几类图的符号全控制数 [J]. 浙江大学学报, 2009, 32(3): 253–256.

SIGNED TOTAL DOMINATION NUMBER OF TWO CLASSES GRAPHS

MA Meng-han, HONG Xia

(*School of Mathematical Sciences, Luoyang Normal University, Luoyang 471022, China*)

Abstract: In this paper, we study the signed total domination number $\gamma_{st}(G)$ of graphs G. We obtain exact values of the signed total domination number of two classes graph $n \cdot F_{m+1}$ and $n \cdot W_{m+1}$ by exhaustived method and classified discussion, which is corrected the known results, where $n \cdot F_{m+1}$ and $n \cdot W_{m+1}$ are denote a graph obtained by identifying the center vertex of n Fan graphs F_{m+1} and identifying the center vertex of n Wheel graphs W_{m+1}, respectively.

Keywords: signed total domination function; signed total domination number; graph $n \cdot F_{m+1}$; graph $n \cdot W_{m+1}$

2010 MR Subject Classification: 05C22; 05C38; 05C75; 05C78