Vol. 40 (2020)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

素的 $*$ - 代数上的非线性混合 Lie 三重 ξ - 导子

周 游[1], 杨柱俊[2], 张建华[2]

(1. 曲阜师范大学数学科学学院, 山东 曲阜 273165)

(2. 陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

摘 要: 本文刻画了素 $*$ 代数上的非线性混合 Lie 三重 ξ - 导子 $(\xi \neq 1)$ 的结构. 利用皮尔斯分解和混合 Lie 三重 ξ - 导子的性质, 证明了一个有单位元和非平凡投影的素 $*$ - 代数上的非线性的混合 Lie 三重 ξ - 导子 $(\xi \neq 1)$ 一定是可加导子, 且关于 ξ 是线性的.

关键词: 混合 Lie 三重 ξ - 导子; $*$ - 代数; 导子

MR(2010) **主题分类号**: 47C10; 47B47　　　　**中图分类号**: O153.5

文献标识码: A　　　　**文章编号**: 0255-7797(2020)01-0047-06

1 引言

设 $\mathcal{A}$ 是一个 $*$ - 代数, 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 将 $[A, B] = AB - BA$ 与 $[A, B]_* = AB - BA^*$ 分别定义为 A 和 B 的 Lie 积与斜 Lie 积, 将满足 $L([A, B]) = [L(A), B] + [A, L(B)]$ 与 $L([A, B]_*) = [L(A), B]_* + [A, L(B)]_*$ 的映射分别称为 Lie 导子和斜 Lie 导子.

近年来, 已经有许多学者对 Lie 积与斜 Lie 积性质的刻画做出了很大贡献. 例如, 很多学者对代数上的 Lie 三重导子, 斜 Lie 三重导子, 保持斜 Lie 三重积的映射, 混合 Lie 三重导子以及保持混合 Lie 三重积的映射等问题进行了深入的研究, 其详细工作可参见文献 [1–8].

在本文中我们将给出一个复数域上的有单位元和非平凡投影的素的 $*$ - 代数 $\mathcal{M}$ 上的混合 Lie 三重 ξ - 导子的结构, 即对任意的 $A, B, C \in \mathcal{M}$, L 满足: $L([[A, B]_*, C]_\xi) = [[L(A), B]_*, C]_\xi + [[A, L(B)]_*, C]_\xi + [[A, B]_*, L(C)]_\xi$, 且 $\xi \neq 1$ 时, 则可得 L 是一个可加的 $*$ - 导子, 且对任意的 $A \in \mathcal{M}$, 有 $L(\xi A) = \xi L(A)$.

2 可加性

在这一小节中，我们将证明如下定理.

定理 2.1 设 $\mathcal{M}$ 是一个有单位元和非平凡投影的素的 $*$ - 代数, $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个混合 Lie 三重 ξ - 导子, 其中 $\xi \neq 1$. 则 L 是可加映射.

设 P_1 为 $\mathcal{M}$ 中的一个非平凡投影, I 是 $\mathcal{M}$ 中的单位元和 $P_2 = I - P_1$. 令 $\mathcal{M}_{ij} = P_i\mathcal{M}P_j (i, j = 1, 2)$，则 $\mathcal{M} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \mathcal{M}_{ij}$, 且其两两相交均为 $\{0\}$. 因为 $\mathcal{M}$ 是一个素代数, 所以对任意的 $A \in \mathcal{M}$, 若对任意的 $B_{kl} \in \mathcal{M}_{kl}$, 均有 $AB_{kl} = 0$, 则可得 $AP_k = 0$.

在证明此定理前, 我们首先给出一系列的引理.

引理 2.1 $L(0) = 0$.

---

*收稿日期: 2018-05-05　　　接收日期: 2019-04-29

作者简介: 周游 (1994–), 女, 山东青岛, 硕士, 要研究方向: 算子代数. E-mail: yzhou201302@163.com.

证 很容易验证 $L(0)=L([[0,0]_*,0]_\xi)=0$.

引理 2.2 设 $A_{ij}\in\mathcal{M}_{ij}\ (i,j=1,2)$, 则 $L(\sum\limits_{i,j=1}^{2}A_{i,j})=\sum\limits_{i,j=1}^{2}L(A_{ij})$.

证 设 $T=L(\sum\limits_{i,j=1}^{2}A_{ij})-\sum\limits_{i,j=1}^{2}L(A_{ij})$, 对任意的 $B_{kl}\in\mathcal{M}_{kl}(k\neq l)$, 有

$$\begin{aligned}L([[P_k,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,B_{kl}]_\xi)=&L([[P_k,A_{lk}]_*,B_{kl}]_\xi)\\=&L([[P_k,A_{11}]_*,B_{kl}]_\xi)+L([[P_k,A_{12}]_*,B_{kl}]_\xi)\\&+L([[P_k,A_{21}]_*,B_{kl}]_\xi)+L([[P_k,A_{22}]_*,B_{kl}]_\xi)\\=&[[L(P_k),\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,B_{kl}]_\xi+[[P_k,\sum_{i,j=1}^{2}L(A_{ij})]_*,B_{kl}]_\xi\\&+[[P_k,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,L(B_{kl})]_\xi,\\L([[P_k,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,B_{kl}]_\xi)=&[[L(P_k),\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,B_{kl}]_\xi+[[P_k,L(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij})]_*,B_{kl}]_\xi\\&+[[P_k,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,L(B_{kl})]_\xi.\end{aligned}$$

由此可知 $[[P_k,T]_*,B_{kl}]_\xi=0$, 故 $P_lTP_k=0\ (k\neq l)$. 另一方面则有

$$\begin{aligned}L([[B_{kl},\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,P_l]_\xi)=&L([[B_{kl},A_{ll}]_*,P_l]_\xi)\\=&L([[B_{kl},A_{11}]_*,P_l]_\xi)+L([[B_{kl},A_{12}]_*,P_l]_\xi)\\&+L([[B_{kl},A_{21}]_*,P_l]_\xi)+L([[B_{kl},A_{22}]_*,P_l]_\xi)\\=&[[L(B_{kl}),\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,P_l]_\xi+[[B_{kl},\sum_{i,j=1}^{2}L(A_{ij})]_*,P_l]_\xi\\&+[[B_{kl},\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,L(P_l)]_\xi,\\L([[B_{kl},\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,P_l]_\xi)=&[[L(B_{kl}),\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,P_l]_\xi+[[B_{kl},L(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij})]_*,P_l]_\xi\\&+[[B_{kl},\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}]_*,L(P_l)]_\xi.\end{aligned}$$

因此 $[[B_{kl},T]_*,P_l]_\xi=0$, 故 $P_lTP_l=0(l=1,2)$. 因而 $T=0$. 则 $L(\sum\limits_{i,j=1}^{2}A_{ij})=\sum\limits_{i,j=1}^{2}L(A_{ij})$. 证毕.

引理 2.3 设 $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}(i \neq j)$, 则 $L(A_{ij}+B_{ij}) = L(A_{ij}) + L(B_{ij})$.

证 由引理 2.2 可知, 对任意的 $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}$ $(i \neq j)$, 有

$$\begin{aligned}
L(A_{ij}+B_{ij}) &= L([[\frac{i}{2}I, P_i - iA_{ij}]_*, P_j - iB_{ij}]_\xi) \\
&= [[L(\frac{i}{2}I), P_i - iA_{ij}]_*, P_j - iB_{ij}]_\xi + [[\frac{i}{2}I, L(P_i - iA_{ij})]_*, P_j - iB_{ij}]_\xi \\
&\quad + [[\frac{i}{2}I, P_i - iA_{ij}]_*, L(P_j - iB_{ij})]_\xi \\
&= L([[\frac{i}{2}I, P_i]_*, P_j]_\xi) + L([[\frac{i}{2}I, P_i]_*, -iB_{ij}]_\xi) \\
&\quad + L([[\frac{i}{2}I, -iA_{ij}]_*, P_j]_\xi) + L([[\frac{i}{2}I, -iA_{ij}]_*, -iB_{ij}]_\xi) \\
&= L(A_{ij}) + L(B_{ij}).
\end{aligned}$$

证毕.

引理 2.4 设 $A_{ii}, B_{ii} \in \mathcal{M}_{ii}, i = 1, 2$, 则 $L(A_{ii}+B_{ii}) = L(A_{ii}) + L(B_{ii})$.

证 令 $T = L(A_{ii}+B_{ii}) - (L(A_{ii}) + L(B_{ii}))$. 则易验证,

$$\begin{aligned}
L([[P_j, A_{ii}+B_{ii}]_*, P_i]_\xi) &= L([[P_j, A_{ii}]_*, P_i]_\xi) + L([[P_j, B_{ii}]_*, P_i]_\xi) \\
&= [[L(P_j), A_{ii}+B_{ii}]_*, P_i]_\xi + [[P_j, L(A_{ii}) + L(B_{ii})]_*, P_i]_\xi \\
&\quad + [[P_j, A_{ii}+B_{ii}]_*, L(P_i)]_\xi, \\
L([[P_i, A_{ii}+B_{ii}]_*, P_j]_\xi) &= L([[P_i, A_{ii}]_*, P_j]_\xi) + L([[P_i, B_{ii}]_*, P_j]_\xi) \\
&= [[L(P_i), A_{ii}+B_{ii}]_*, P_j]_\xi + [[P_i, L(A_{ii}) + L(B_{ii})]_*, P_j]_\xi \\
&\quad + [[P_i, A_{ii}+B_{ii}]_*, L(P_j)]_\xi.
\end{aligned}$$

故 $[[P_j, T]_*, P_i]_\xi = [[P_i, T]_*, P_j]_\xi = 0$, 则可推出 $P_iTP_j = P_jTP_i = 0$.

由引理 2.2 和引理 2.3 知, 对任意的 $C_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}, i \neq j$, 有

$$\begin{aligned}
L([[C_{ji}, A_{ii}+B_{ii}]_*, P_i]_\xi) &= L(C_{ji}A_{ii} + \xi A_{ii}C_{ji}^* + C_{ji}B_{ii} + \xi B_{ii}C_{ji}^*) \\
&= L([[C_{ji}, A_{ii}]_*, P_i]_\xi) + L([[C_{ji}, B_{ii}]_*, P_i]_\xi) \\
&= [[L(C_{ji}), A_{ii}+B_{ii}]_*, P_i]_\xi + [[C_{ji}, L(A_{ii}) + L(B_{ii})]_*, P_i]_\xi \\
&\quad + [[C_{ji}, A_{ii}+B_{ii}]_*, L(P_i)]_\xi, \\
L([[C_{ij}, A_{ii}+B_{ii}]_*, P_j]_\xi) &= L([[C_{ij}, A_{ii}]_*, P_j]_\xi) + L([[C_{ij}, B_{ii}]_*, P_j]_\xi) \\
&= [[L(C_{ij}), A_{ii}+B_{ii}]_*, P_j]_\xi + [[C_{ij}, L(A_{ii}) + L(B_{ii})]_*, P_i]_\xi \\
&\quad + [[C_{ij}, A_{ii}+B_{ii}]_*, L(P_j)]_\xi.
\end{aligned}$$

故 $[[C_{ji}, T]_*, P_i]_\xi = [[C_{ij}, T]_*, P_j]_\xi = 0$, 则可推出 $P_iTP_i = P_jTP_j = 0$. 因此 $T = 0$. 从而 $L(A_{ii}+B_{ii}) = L(A_{ii}) + L(B_{ii})$. 证毕.

定理 2.1 的证明 由引理 2.2, 引理 2.3 和引理 2.4 易知, 对任意的 $A, B \in \mathcal{M}$, 有 $L(A+B) = L(A) + L(B)$. 继而可知 L 是一个可加映射. 定理证毕.

3 主要结论

下面的定理便是本文最主要的结论.

定理 3.1 设 $\mathcal{M}$ 是一个有单位元和非平凡投影的素的 $*$ - 代数, $L:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是一个混合 Lie 三重 ξ - 导子且 $\xi\neq 1$. 则 L 是一个可加 $*$ - 导子, 且对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 有 $L(\xi A)=\xi L(A)$.

设 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 的中心. 为了证明定理 3.1, 首先证明接下来的几个引理.

引理 3.1 设 $A\in\mathcal{M}$, 则

(1) $L(I)=L(I)^*\in\mathcal{Z}(\mathcal{M})$;

(2) 若 $A=A^*$, 则有 $L(A)=L(A)^*$;

(3) $\forall B\in\mathcal{Z}(\mathcal{M})$, 有 $L(B)\in\mathcal{Z}(\mathcal{M})$.

证 (1) 对任意的 $B\in\mathcal{M}$, 有 $0=L([[I,B]_*,I]_\xi)=[[L(I),B]_*,I]_\xi$. 从而对任意的 $B\in\mathcal{M}$, 有 $[L(I),B]_*=0$, 因此 $L(I)=L(I)^*\in\mathcal{Z}(\mathcal{M})$.

(2) 由 (1) 可知对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 若 $A=A^*$, 则有 $0=L([[A,I]_*,I]_\xi)=[[L(A),I]_*,I]_\xi$. 由此可推出 $[L(A),I]_*=0$, 从而当 $A=A^*$ 时, 则有 $L(A)=L(A)^*$.

(3) 由 (2) 可知对任意的 $A\in\mathcal{M}$, $B\in\mathcal{Z}(\mathcal{M})$, 若 $A=A^*$, 则有 $0=L([[A,B]_*,I]_\xi)=[[A,L(B)]_*,I]_\xi$. 因此对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 若 $A=A^*$, 则有 $[A,L(B)]_*=0$, 从而对任意的 $X\in\mathcal{M}$, 都有 $XL(B)=L(B)X$. 因此 $L(B)\in\mathcal{Z}(\mathcal{M})$. 证毕.

引理 3.2 设 $A\in\mathcal{M}$, 则 $L(iA)=iL(A)$, $L(A)^*=L(A^*)$.

证 设 $A\in\mathcal{M}$, 则有

$$2L((1-\xi)iA)=L([[iI,A]_*,I]_\xi)=(1-\xi)(L(iI)-L(iI)^*)A+2i(1-\xi)L(A)+2i(1-\xi)L(I)A, \tag{3.1}$$

$$-2L((1-\xi)A)=L([[iI,A]_*,iI]_\xi)=i(1-\xi)(L(iI)-L(iI)^*)A-2(1-\xi)L(A)+2i(1-\xi)L(iI)A. \tag{3.2}$$

在 (3.1) 式和 (3.2) 式中, 用 iA 代替 A 后, 可得

$$-2L((1-\xi)A)=i(1-\xi)(L(iI)-L(iI)^*)A+2i(1-\xi)L(iA)-2(1-\xi)L(I)A, \tag{3.3}$$

$$-2L((1-\xi)iA)=-(1-\xi)(L(iI)-L(iI)^*)A-2(1-\xi)L(iA)-2(1-\xi)L(iI)A. \tag{3.4}$$

对比 (3.1) 式和 (3.4) 式以及 (3.2) 式和 (3.3) 式知, 对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 有

$$iL(A)+iL(I)A-L(iA)-L(iI)A=0, \tag{3.5}$$

$$-L(A)+iL(iI)A-iL(iA)+L(I)A=0. \tag{3.6}$$

在 (3.6) 式等号两侧同时乘以 i 后有

$$iL(A)-iL(I)A-L(iA)+L(iI)A=0. \tag{3.7}$$

因而由 (3.5) 式和 (3.7) 式可知, 对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 有 $L(iA)=iL(A)$. 根据引理 3.1(2) 和上式可知, 对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 均有 $L(A)^*=L(A^*)$. 证毕.

引理 3.3 $L-L(I)$ 是一个可加 $*$ - 导子.

证 对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 有

$$\begin{aligned}-2L((1-\xi)A)&=L([[iI,iI]_*,A]_\xi)\\&=[[L(iI),iI]_*,A]_\xi+[[iI,L(iI)]_*,A]_\xi+[[iI,iI]_*,L(A)]_\xi\\&=-4(1-\xi)L(I)A-2(1-\xi)L(A).\end{aligned}$$

继而有

$$L((1-\xi)A)=2(1-\xi)L(I)A+(1-\xi)L(A). \tag{3.8}$$

从而由 (3.8) 式和 L 是混合 Lie 三重 ξ - 导子可知, 对任意的 $A,B\in\mathcal{M}$, 有

$$\begin{aligned}L((1-\xi)[A,B]_*) &= 2(1-\xi)L(I)[A,B]_*+(1-\xi)L([A,B]_*)\\ &= 2[[A,B]_*,L(I)]_\xi+(1-\xi)L([A,B]_*),\\ L((1-\xi)[A,B]_*) &= L([[A,B]_*,I]_\xi)\\ &= [[L(A),B]_*,I]_\xi+[[A,L(B)]_*,I]_\xi+[[A,B]_*,L(I)]_\xi.\end{aligned}$$

因此对任意的 $A,B\in\mathcal{M}$, 有

$$[[L(A),B]_*,I]_\xi+[[A,L(B)]_*,I]_\xi=[[A,B]_*,L(I)]_\xi+(1-\xi)L([A,B]_*). \tag{3.9}$$

在 (3.9) 式中, 用 iA 代替 A 后可知, 对任意的 $A,B\in\mathcal{M}$, 有

$$[L(A)B+BL(A)^*,I]_\xi+[AL(B)+L(B)A^*,I]_\xi=[AB+BA^*,L(I)]_\xi+(1-\xi)L(AB+BA^*). \tag{3.10}$$

由 (3.9) 式和 (3.10) 式可知 $[L(A)B,I]_\xi+[AL(B),I]_\xi=[AB,L(I)]_\xi+(1-\xi)L(AB)$. 继而对任意的 $A,B\in\mathcal{M}$, 有

$$L(AB)=L(A)B+AL(B)-ABL(I). \tag{3.11}$$

因此 $L-L(I)$ 是一个可加 $*$ - 导子. 证毕.

定理 3.1 的证明 由引理 3.3 可知, 对任意的 $A,B,C\in\mathcal{M}$, 有

$$\begin{aligned}L(ABC) &= L(A)BC+AL(B)C+ABL(C)-2ABCL(I),\\ L(BA^*C) &= L(B)A^*C+BL(A)^*C+BA^*L(C)-2BA^*CL(I),\\ L(\xi CAB) &= \xi L(C)AB+\xi CL(A)B+\xi CAL(B)+(L(\xi I)-3\xi L(I))CAB,\\ L(\xi CBA^*) &= \xi L(C)BA^*+\xi CL(B)A^*+\xi CBL(A)^*+(L(\xi I)-3\xi L(I))CBA^*.\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}L([[A,B]_*,C]_\xi) &= [[L(A),B]_*,C]_\xi+[[A,L(B)]_*,C]_\xi+[[A,B]_*,L(C)]_\xi,\\ L([[A,B]_*,C]_\xi) &= L(ABC)-L(BA^*C)-L(\xi CAB)+L(\xi CBA^*),\end{aligned}$$

从而对任意的 $A,B,C\in\mathcal{M}$, 有

$$\begin{aligned}&[[L(A),B]_*,C]_\xi+[[A,L(B)]_*,C]_\xi+[[A,B]_*,L(C)]_\xi\\ =\ & L(ABC)-L(BA^*C)-L(\xi CAB)+L(\xi CBA^*).\end{aligned}$$

所以

$$-2ABCL(I)+2BA^*CL(I)-(L(\xi I)-3\xi L(I))CAB+(L(\xi I)-3\xi L(I))CBA^*=0. \tag{3.12}$$

在 (3.12) 式中, 令 $A = iI$, $B = C = I$, 则可得 $2L(I) + L(\xi I) - 3\xi L(I) = 0$. 因此

$$L(\xi I) = (3\xi - 2)L(I). \tag{3.13}$$

由 (3.12) 式和 (3.13) 式可知, 对任意的 $A, B, C \in \mathcal{M}$, 有 $L(I)[[A, B]_*, C] = 0$ 成立, 故 $L(I) = 0$. 从而由引理 2.3 可知 L 是一个可加的 $*$- 导子, 且由 (3.8) 式可得 $L(\xi A) = \xi L(A)$. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] Ebrahimi S. Lie triple derivations on primitive rings[J]. Asian–Eur. J. Math., 2015, 8: 1–7.

[2] Miers C R. Lie triple derivations of von Neumann algebras[J]. Proceedings of the American Math. Soc., 1978, 71: 57–61.

[3] Liu L. Lie triple derivations of facor von Neumann algebras[J]. Bulletin of the Korean Math. Soc., 2015, 52: 581–591.

[4] Li C J, Zhao F F. Nonlinear skew Lie triple derivations between factors[J]. Acta Math. Sinica, 2016, 32: 821–830.

[5] Zhao F F, Li C J. Nonlinear $*$-Jordan triple derivations on von Neumann algebras[J]. Math. Slovaca, 2018, 68: 163–170.

[6] Li C J, Lu F Y. Nonlinear maps preserving the Jordan triple 1-$*$-product on von Neumann algebras[J]. Complex Anal. Oper. Theory, 2017, 11: 109–117.

[7] Huo D H, Zheng B D, Liu H Y. Nonlinear maps preserving Jordan triple η-$*$-products[J]. J. Math. Anal. Appl., 2015, 430: 830–844.

[8] Li C J, Lu F Y. Nonlinear maps preserving the Jordan triple 1-$*$-product on von Neumann algebras[J]. Complex Anal. Oper. Theory, 2016, 11: 1–9.

THE MIXED LIE TRIPLE ξ-DERIVATION ON PRIME $*$-ALGEBRAS

ZHOU You[1], YANG Zhu-jun[2], ZHANG Jian-hua[2]

(*1.School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, China*)

(*2.School of Mathematics and Information Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

Abstract: The aim of this paper is to characterize the nonlinear mixed Lie triple ξ-derivation ($\xi \neq 1$) of a prime $*$-algebra. By using Peirce decomposition and the main proposition of mixed Lie triple ξ-derivation, it is proved that the nonlinear mixed Lie triple ξ-derivation ($\xi \neq 1$) of a prime $*$-algebra with unit and non-trivial projection is an additive $*$-derivation and linear about ξ.

Keywords: mixed Lie triple ξ-derivation; $*$-algebra; derivation

2010 MR Subject Classification: 47C10; 47B47