

逆散射问题求解的正则化 GAUSS-NEWTON 法

闵 涛, 仝云莉

(西安理工大学理学院应用数学系, 陕西 西安 710054)

摘要: 本文研究了一类重要的反问题 – 逆散射问题, 它是从远场散射数据识别散射体中的障碍物的形状问题. 利用迭代正则化 Gauss-Newton 法, 通过数值模拟比较分析, 验证了本文所提出的方法在求解逆散射问题时是可行有效的.

关键词: 逆散射; 噪声; 正则化; Gauss-Newton 法; 数值解

MR(2010) 主题分类号: 97N99

中图分类号: O175.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)03-0464-11

1 引言

逆散射问题在遥感、无损探测、地球物理、医用成像和雷达目标识别等方面^[1-4]有着广泛的应用. 但由于此类问题具有非线性、不适定的特点, 给数值求解带来了很大困难. 20 世纪 60 年代, 前苏联数学家吉洪诺夫、伊万诺夫和拉弗伦捷耶夫等提出了不适定问题正则化方法, 随后, 很多学者对逆散射问题进行了卓有成效的研究. Jost 等人^[5]提出了逆散射微扰论, Moses^[6]和 Prosser^[7-10]等人对此作了进一步的研究, 研究了一维和三维逆散射问题, 对解误差进行了分析和估计, 随后 Newton 等人^[7-8,11-14]对一维和三维逆散射问题进行了进一步的研究, 并对解的唯一性进行了讨论. Colton 等人^[15-18]利用积分方程方法对声波和电磁波逆问题作了深入研究. 其中, 对逆散射理论发展贡献最大的是 Bleistein^[19-26]和 Cohen 等人^[27-29], 他们以小扰动理论和 Born 近似为理论基础, 建立了利用 Fourier 变换等方法进行反演的理论, 最终形成了逆散射反演方法. 本文在对障碍物的边界进行参数化处理的基础上, 将逆散射问题转化为一非线性积分方程, 通过数值积分离散, 提出利用迭代正则化高斯 - 牛顿法来求解, 并进行了数值模拟.

2 逆散射模型的建立

散射是指由光波、音波、电磁波或粒子在通过均匀介质时, 遇到区域大小为 Ω 、边界为 Γ 的障碍物而改变其直线运动轨迹的物理现象. 为了计算方便, 我们主要考虑二维区域并假定散射区域 Ω 是呈星形的, 即在散射区域 Ω 中, 存在连续的正函数 $R(\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$), 使得边界 Γ 上的点用极坐标表示为 $(R(\theta), \theta)$. 假定入射波为波矢为 k_0 的简谐波, 即 $\psi^{in}(r) = \exp(ik_0 \cdot r)$, 障碍物中的波数 k_1 是一个常量. 令 $\psi^{sc}(r)$ 表示散射区域, 总区域

*收稿日期: 2016-06-28 接收日期: 2017-06-20

基金项目: 国家自然科学基金 (51679186); 青年科学基金 (11601418).

作者简介: 闵涛 (1963-), 男, 陕西西安, 教授, 主要研究方向: 数学物理方程反问题, 科学工程计算与计算机模拟.

通讯作者: 仝云莉

$\psi = \psi^{in} + \psi^{sc}$ 满足微分方程

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_1^2)\psi(r) &= 0, r \in \Omega, \\ (\nabla^2 + k_0^2)\psi(r) &= 0, r \in R^2 - \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ψ 和导数 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 在区域 Ω 的边界 Γ 上连续.

如果平面波正常照射介质柱的轴线, 并且电场 E 的两极沿轴线分布在两端, 该散射问题转化为求解方程 (1), 其中 $\psi = E$, 波数 $k_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$, $k_1^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \omega^2 + i \omega \mu_0 \sigma$, ε_0 , μ_0 是真空中介电常数和磁导率, ε_r , σ 是障碍物的相对介电常数和电导率.

从入射角 φ 处的远场散射数据, 得到散射振幅为

$$S(\varphi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi^{sc}(r) \left(\frac{1}{2} \pi k_0 r\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-ik_0 r + \frac{1}{4} i \pi), \quad (2)$$

其中向量 r 用极坐标表示为 (r, φ) . 对于 $\frac{k_1}{k_0} \approx 1$, 障碍为弱散射, 则

$$S(\varphi) = S_B(\varphi) + \delta_B(\varphi). \quad (3)$$

这种情况下

$$S_B(\varphi) = \frac{1}{2} i k_0^2 \left(\frac{k_1}{k_0} - 1\right) \int_{\Omega} \exp(-i2k_0 \cdot r) dr \quad (4)$$

表示散射振幅和 δ_B 的 Born 近似^[30-32]. 与 S_B 相比, Born 近似导致的误差是很小的.

为了求方程 (4) 的导数近似, 首先利用方程 (1) 和辐射边界条件 ($\nabla \psi - k_0 \psi = O(r^{-\frac{1}{2}})(r \rightarrow \infty)$) 下区域 ψ 中边界 Γ 的光滑性, 得到格林函数表示为

$$\begin{aligned} \psi^{sc}(r) &= \frac{1}{4} i (k_1^2 - k_0^2) \int_{\Omega} H_0^{(1)}(k_0 R) \psi(r') dr' \\ R &= [r^2 - 2r \cdot r' + (r')^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其中 $H_0^{(1)}$ 是第一类 Hankel 函数. 用 $\psi(r)$ 代替 $\exp(ik_0 \cdot r)$, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $R \rightarrow r - \hat{r} \cdot r$ (\hat{r} 是反向散射方向 $(-k_0)$ 的单位矢量). 由于 $k_1^2 - k_0^2 \approx 2k_0^2(\frac{k_1}{k_0} - 1)$, 因此

$$H(k_0 R) \rightarrow \left(\frac{2}{\pi k_0 R}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(ik_0 R - \frac{1}{4} i \pi) \approx \left(\frac{2}{\pi k_0 r}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(ik_0 r - \frac{1}{4} i \pi) \exp(ik \cdot r').$$

对于模型的离散测量数据, 考虑

$$d_i = S_B(\varphi_i) + \delta_B(\varphi_i) + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq N, \quad (5)$$

其中 ε_i 表示噪声. 假设 ε_i 是随机变量, 满足

$$E(\varepsilon_i) = 0, E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq N, \quad (6)$$

通过 $\frac{1}{2} i k_0^2 (\frac{k_1}{k_0} - 1)$, 方程 (5) 可写为

$$d_j = \int \int I_{\Omega}(r) \exp(-iq_j \cdot r) dr + \eta_j, 1 \leq j \leq N, \quad (7)$$

其中如果 $r \in \Omega$ (0 除外), 则 $I_\Omega(r) = 1$. q 用极坐标表示为 $(2k_0, \varphi)$, Born 近似所导致的误差包含在 η_j 中.

为了解决反问题的数据缺失和不适定性, 使问题更容易处理, 对问题进行降维处理. 假设散射区域 Ω 呈星形, 方程 (7) 转化为极坐标表示

$$d_i = \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi_i, R(\theta))d\theta + \eta_i, 1 \leq i \leq N, \quad (8)$$

其中

$$f(\theta, \varphi, R) = \frac{[\exp(\beta R)(\beta R - 1) + 1]}{\beta^2}, \quad \beta = -i2k_0 \cos(\varphi - \theta).$$

方程 (8) 可以转化为一维非线性第一类 Fredholm 积分方程

$$d(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi, R(\theta))d\theta. \quad (9)$$

一般来说, 该方程的解 $R(\theta)$ 不连续依赖于数据 $d(\varphi)$.

3 迭代正则化 Gauss-Newton 法

方程 (9) 可以归结为求解非线性方程 $F(\gamma) = y$, 这里

$$[F(\gamma)](\phi) = \int_0^{2\pi} f(\psi, \phi, \gamma(\psi))d\psi = y(\phi), \quad (10)$$

其中

$$f(\psi, \phi, \gamma) = \frac{[\exp(\beta\gamma)(\beta\gamma - 1) + 1]}{\beta^2}, \quad \beta = -i2k_0 \cos(\phi - \psi),$$

k_0 是固定波数, $\gamma(\psi)$ 未知^[1, 2, 33].

在实际问题中, 右端数据 y 通常是由测量得到的, 因而得到的数据是一个满足 $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ 的近似数据 y^δ , 这里 $\delta > 0$ 是给定的较小的扰动水平^[34-35].

求解不适定问题的方法主要有两种: Tikhonov 正则化和迭代法, 本文主要采用迭代正则化 Gauss-Newton 法求解逆散射问题.

定义泛函

$$\min_{\gamma \in X} J_\alpha[\gamma, y] = \|F(\gamma) - y^\delta\|^2 + \alpha\Omega(\gamma), \quad (11)$$

其中 $\alpha > 0$ 为正则化参数, $\Omega(\gamma)$ 为稳定泛函. 要求无约束最优化问题 (11) 的解, 首先将算子 F 线性化, 利用 $F(\gamma)$ 在第 k 次迭代点 γ_k 处的泰勒展开式, 得到

$$\min_{\gamma \in X} J_\alpha[\gamma, y^\delta] = \|y^\delta - F(\gamma_k) - F'(\gamma_k)(\gamma - \gamma_k)\|^2 + \alpha\Omega(\gamma), \quad (12)$$

其中 $\Omega(\gamma) = \|L(\gamma - \gamma_0)\|$ 为稳定泛函, L 是单位矩阵 ($L = L_0 = I \in R^{n \times n}$) 或者是一阶或二阶导算子的离散近似, 即

$$\begin{aligned} [L_1]_{ij} &= \delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ [L_2]_{ij} &= \delta_{i,j} - 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \end{aligned}$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克符号, $j = 1, 2, \dots, n$. 方程 (12) 通过一阶最优条件求解, 可得到

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k - (\alpha_k L^T L + F'(\gamma_k)^T F'(\gamma_k))^{-1} [F'(\gamma_k)^T (F(\gamma_k) - y^\delta) + \alpha_k L^T L(\gamma_k - \gamma_0)], \quad (13)$$

(13) 式称为迭代正则化 Gauss-Newton 法^[36-37], 简记为 IRGN 法.

要利用此方法数值求解逆散射问题 (10), 需要将其离散化, 本文采用梯形公式将其离散. 将公式 (13) 改写为如下形式

$$[F'(\gamma_k)^T F'(\gamma_k) + \alpha_k L^T L] h_k = -[F'(\gamma_k)^T (F(\gamma_k) - y^\delta) + \alpha_k L^T L(\gamma_k - \gamma_0)],$$

其中 $h_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k$, 要得到 $F'(\gamma_k)^T F'(\gamma_k)$, 需要求解非线性算子 F 的 Fréchet 导数.

令 $f(\psi, \phi, \gamma(\psi))$ 为定义在 $0 \leq \psi, \phi \leq 2\pi$, $\|\gamma\| \leq r$ 上的函数, 则可知 $f(\psi, \phi, \gamma(\psi))$, $f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma(\psi))$ 处处连续. 积分算子 F 为 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数, 并且在开球 $\|\gamma\| \leq r$ 上 Fréchet 可导, 对任意的 $\gamma_0 \in C[0, 2\pi]$ 且 $\|\gamma_0\| \leq r$, $h \in C[0, 2\pi]$, 可得到 F 的 Fréchet 导数为

$$(F'(\gamma_0)h)\phi = \int_0^{2\pi} f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma_0(\psi))h(\psi)d\psi. \quad (14)$$

上述 (14) 式定义的算子是 $[0, 2\pi]$ 上的线性连续算子.

事实上, 对于确定的 $\theta = \theta(h) \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} & \|F(\gamma_0 + h) - F(\gamma_0) - F'(\gamma_0)h\| \\ & \leq \int_0^{2\pi} \sup_{0 \leq \phi \leq 2\pi} |f(\psi, \phi, \gamma_0(\psi) + h(\psi)) - f(\psi, \phi, \gamma_0(\psi)) - f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma_0(\psi))h(\psi)|d\psi \\ & \leq \|h\| \int_0^{2\pi} \sup_{0 \leq \phi \leq 2\pi} |f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma_0(\psi) + \theta h(\psi)) - f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma_0(\psi))|d\psi. \end{aligned}$$

由于函数 $f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma(\psi))$ 在 γ 处连续, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(\gamma_0 + \phi h) - F(\gamma_0) - F'(\gamma_0)h\| \\ & \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sup_{0 \leq \phi \leq 2\pi} |f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma_0(\psi) + \theta h(\psi)) - f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma_0(\psi))|d\psi = 0. \end{aligned}$$

因此 F 的 Fréchet 导数可以通过 (14) 式得到.

利用梯形公式将方程 (14) 进行离散: 把区间 $[0, 2\pi]$ 等分成 N 个小区间, 其步长为 $l = \Delta s = \frac{2\pi}{N}$, 令 $\psi_0 = 0$, $\psi_j = j\Delta s$. 同理 $\psi_0 = \phi_0 = 0$, $\psi_N = \phi_N = 2\pi$, $\phi_j = j\Delta s$ ($\psi_j = \phi_j$). 设 $\gamma(\psi_j) = \gamma_j$, 则有

$$\begin{aligned} (F'(\gamma)h)\phi & = \int_0^{2\pi} f'_\gamma(\psi, \phi, \gamma(\psi))h(\psi)d\psi \\ & \approx \Delta s [f'_\gamma(\psi_0, \phi_0, \gamma_0)h_0 + f'_\gamma(\psi_1, \phi_1, \gamma_1)h_1 + \dots + f'_\gamma(\psi_{N-1}, \phi_{N-1}, \gamma_{N-1})h_{N-1} + \frac{1}{2}f'_\gamma(\psi_N, \phi_N, \gamma_N)h_N] \\ & \approx \sum_{j=0}^N f'_\gamma(\psi_j, \phi_j, \gamma_j)h_j \omega_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

改写成矩阵形式为

$$F'_\gamma h = \begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0N} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0N} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix} = \Delta s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} f'_\gamma(\psi_0, \phi_0, \gamma_0) & f'_\gamma(\psi_1, \phi_0, \gamma_1) & \cdots & \frac{1}{2} f'_\gamma(\psi_N, \phi_0, \gamma_N) \\ \frac{1}{2} f'_\gamma(\psi_0, \phi_1, \gamma_0) & f'_\gamma(\psi_1, \phi_1, \gamma_1) & \cdots & \frac{1}{2} f'_\gamma(\psi_N, \phi_1, \gamma_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} f'_\gamma(\psi_0, \phi_N, \gamma_0) & f'_\gamma(\psi_1, \phi_N, \gamma_1) & \cdots & \frac{1}{2} f'_\gamma(\psi_N, \phi_N, \gamma_N) \end{pmatrix}.$$

对于每一步迭代 k , 利用迭代正则化 Gauss-Newton 法可得到

$$\left[\begin{pmatrix} b_{01}^k & b_{11}^k & \cdots & b_{N1}^k \\ b_{02}^k & b_{12}^k & \cdots & b_{N2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{0N}^k & b_{1N}^k & \cdots & b_{NN}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{01}^k & b_{02}^k & \cdots & b_{0N}^k \\ b_{11}^k & b_{12}^k & \cdots & b_{1N}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1}^k & b_{N2}^k & \cdots & b_{NN}^k \end{pmatrix} + \alpha_k L^T L \right] \begin{pmatrix} h_0^k \\ h_1^k \\ \vdots \\ h_N^k \end{pmatrix} = g, \quad (15)$$

其中

$$g = - \begin{pmatrix} b_{01}^k & b_{11}^k & \cdots & b_{N1}^k \\ b_{02}^k & b_{12}^k & \cdots & b_{N2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{0N}^k & b_{1N}^k & \cdots & b_{NN}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^N f(\psi_j, \phi_0, \gamma_j^k) \omega_j - y^\delta(\phi_0) \\ \sum_{j=0}^N f(\psi_j, \phi_1, \gamma_j^k) \omega_j - y^\delta(\phi_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^N f(\psi_j, \phi_N, \gamma_j^k) \omega_j - y^\delta(\phi_N) \end{pmatrix} - \alpha_k L^T L \begin{pmatrix} \gamma_0^k - \gamma_0^0 \\ \gamma_1^k - \gamma_1^0 \\ \vdots \\ \gamma_N^k - \gamma_N^0 \end{pmatrix},$$

$$F(\gamma_i^{(k)}) = \sum_{j=0}^N f(\psi_j, \phi_i, \gamma_j^{(k)}) \omega_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\gamma^{(0)} = (\gamma_0^{(0)}, \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_N^{(0)}).$$

因此得到迭代格式 $\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + h^{(k)}$, 通过此格式便可求出方程 (10) 的近似解.

4 数值模拟

考虑方程 (10) 所示的逆散射问题, 在数值求解之前, 先做如下规定

- (1) 用 L_∞ 表示误差的 ∞ -范数, 即 $L_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |\gamma(\psi_j) - \tilde{\gamma}(\psi_j)|$.
- (2) 用 RE 表示相对误差, 即

$$RE = \sqrt{\sum_{j=0}^N |\gamma(\psi_j) - \tilde{\gamma}(\psi_j)|^2} / \sqrt{\sum_{j=0}^N |\gamma(\psi_j)|^2},$$

其中 ψ_j 为节点, N 为区间 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的节点的个数, $\gamma(\psi)$ 为精确解, $\tilde{\gamma}(\psi)$ 为数值解.

(3) 在数值计算时, 假定扰动 $\{y^\delta(\phi_j)\}_{j=0}^N$ 是随机的, 但是在实际应用时, 反复测试是相当困难甚至不可能的. 因此, 考虑确定性误差. 假设观测到的数据有以下扰动形式

$$y^\delta(\phi_j) = y(\phi_j) + \delta \sin(\sqrt{10}\pi\phi_j), j = 0, 1, \dots, N.$$

(4) 基于 Sigmoid - 型函数的性质, 选取正则化参数为

$$\alpha_k = \alpha(k) = \frac{1}{1 + \exp(k)}, \quad k \text{ 为迭代次数.}$$

不难验证其满足下列条件

(i) $1 < \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} < 3,$

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0.$

可以看到, 根据上述正则化参数的选取方法, 在迭代开始时能够充分对问题进行正则化, 然后随着迭代数的增加正则化参数逐渐减小, 达到解稳定的目的.

数值模拟时, 对所识别的障碍物边界 $\gamma(\psi)$, 给定两种参数化模型的精确解, 分别对所得数值解和精确解进行比较, 以验证本文所提方法的有效性.

数值模拟一 考虑真解

$$\gamma(\psi) = (1.2 + 0.25 \cos(3\psi)), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

数值模拟时, 取 $N = 100, L = L_1, k_0 = 2$, 迭代次数 $k = 30$, 初始猜测 $\gamma^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$, 扰动分别为 $\delta = 0, 0.01, 0.05$ 时, 所得 L_∞ 和 RE 分别如表 1 所示, 精确解与数值解的比较如图 1 所示.

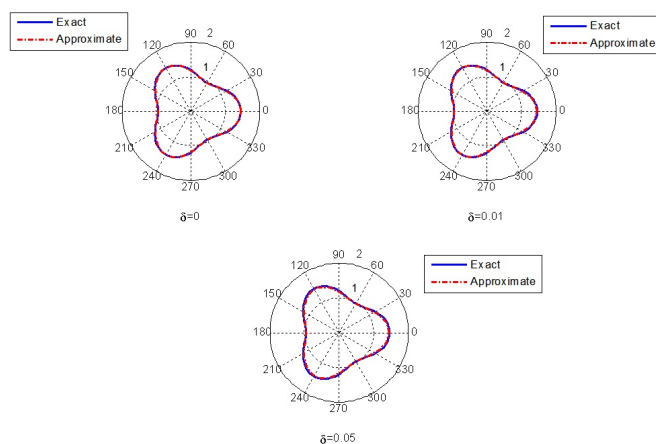
表 1: 不同扰动、相同迭代数下, 迭代正则化 Gauss-Newton 法所得误差比较

δ	L_∞/IRGN	RE/IRGN
0	0.019586673363717	0.009521564438011
0.01	0.023000060840979	0.011322525128602
0.05	0.036480037554188	0.018648316339288

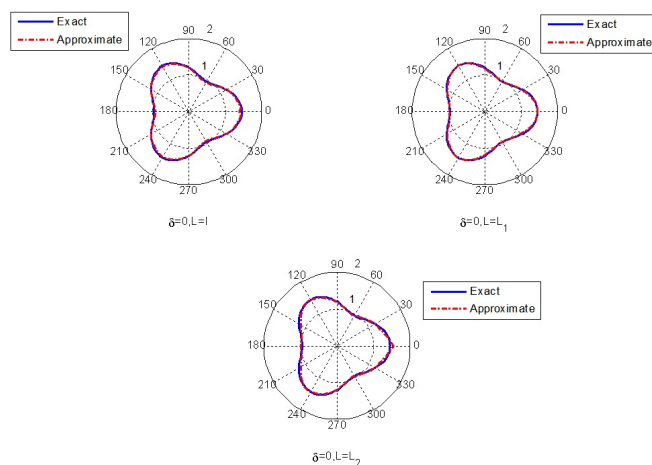
取 $N = 100, k_0 = 2$, 迭代次数 $k = 30$, 初始猜测 $\gamma^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$, L 分别取单位矩阵 I, L_1 或 L_2 , 扰动分别为 $\delta = 0, 0.01, 0.05$ 时, 所得 L_∞ 和 RE 分别如表 2、表 3 所示, 精确解与数值解的比较如图 2 所示.

表 2: 不同扰动、相同迭代数下, L 取不同时所得误差 (L_∞) 比较

δ	I	L_1	L_2
0	0.066628807399539	0.019586673363717	0.095640279511095
0.01	0.072528550348058	0.023000060840979	0.093145639089269
0.05	0.094913058680335	0.036480037554188	0.083230642692703

图 1: 取不同的扰动水平 δ 时, 所得精确解与数值解的比较表 3: 不同扰动、相同迭代数下, L 取不同时所得误差 (RE) 比较

δ	I	L_1	L_2
0	0.018924728113654	0.009521564438011	0.026057415068152
0.01	0.020326606296930	0.011322525128602	0.026971296017496
0.05	0.026377236115007	0.018648316339288	0.031317792291028

图 2: 无扰动时, L 取不同的值所得精确解与数值解的比较

数值模拟二 考虑真解

$$\gamma(\psi) = (1.2 + 0.25 \cos(7\psi)), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

参数设置与模拟一相同, 所得 L_∞ 和 RE 分别如下表 4 所示, 精确解与数值解的比较如图 3 所示.

表 4: 不同扰动、相同迭代数下, 迭代正则化 Gauss-Newton 法所得误差比较

δ	L_∞/IRGN	RE/IRGN
0	0.039063736856112	0.017932064312255
0.01	0.040683680142086	0.018762432738289
0.05	0.047127955134274	0.022598790961604

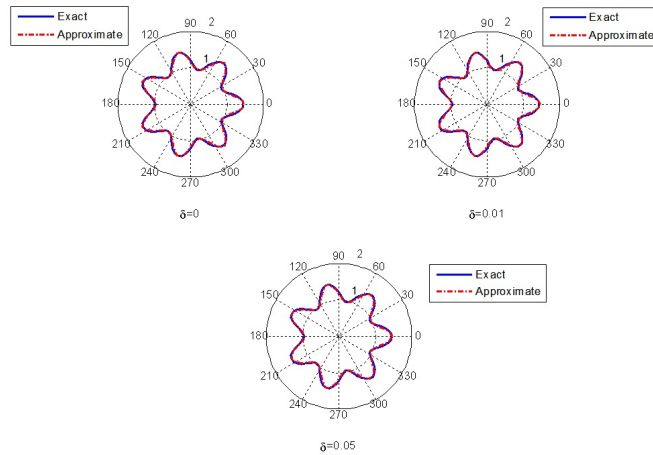


图 3: 取不同的扰动水平 δ 时, 所得精确解与数值解的比较

取 $N = 100, k_0 = 2$, 迭代次数 $k = 30$, 初始猜测 $\gamma^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$, L 分别取单位矩阵 I 、 L_1 或 L_2 , 扰动分别为 $\delta = 0, 0.01, 0.05$ 时, 所得 L_∞ 和 RE 分别如下表 5、表 6 所示, 精确解与数值解的比较如下图 4 所示.

表 5: 不同扰动、相同迭代数下, L 取不同时所得误差 L_∞ 比较

δ	I	L_1	L_2
0	0.315312961792972	0.039063736856112	0.371872644385648
0.01	0.316396067775845	0.040683680142086	0.367965250855694
0.05	0.320673251623274	0.047127955134274	0.352641067793320

表 6: 不同扰动、相同迭代数下, L 取不同时所得误差 RE 比较

δ	I	L_1	L_2
0	0.090635401887756	0.017932064312255	0.097826047340875
0.01	0.091445174358393	0.018762432738289	0.095469157800761
0.05	0.094738224062347	0.022598790961604	0.086806714107307

比较上述两个数值模拟结果, 可以得到如下结论: 从表 1 和表 4 可以看出, 在迭代数相同的情况下, 当右端测量数据无扰动时, 所得解的误差很小, 数值解较准确, 而随着扰动的增加, 数值解与精确解误差的 ∞ -范数和相对误差也逐渐增加; 从表 2、表 3 和表 5、表 6 可以看出, 在迭代数一定的情况下, 取不同的 L 值时, 随着扰动的增加, 所得数值解与精确解误差的

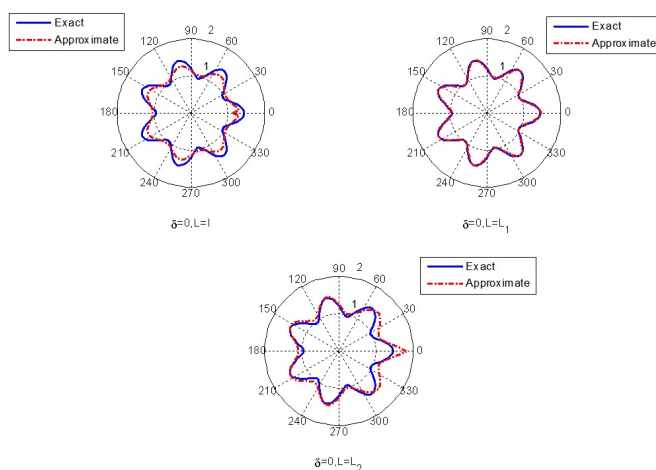


图 4: 无扰动时, L 取不同的值所得精确解与数值解的比较

∞ - 范数和相对误差都在非常小的范围内, 特别取 $L = L_1$ 时, 所得数值解与精确解误差的
 ∞ - 范数和相对误差都相对较小.

5 结论

本文采用迭代正则化 Gauss-Newton 法求解一类根据远场散射数据识别介质中障碍物形状的逆散射问题, 通过数值模拟可以看出: 用此方法求解此类问题是可行的、有效的; 但是对于参数化后的边界函数, 在利用正则化方法求解时, 当稳定泛函中的 L 取不同的算子时, 数值解的稳定性和准确性有微小差别, 而当 L 取一阶导算子时, 数值求解所得结果更准确.

参 考 文 献

- [1] Lee K-M. Inverse scattering via nonlinear integral equations for a Neumann crack[J]. Inver. Prob., 2006, 22(6): 1989–2000.
- [2] Qin H-H, Cakoni F. Nonlinear integral equations for shape reconstruction in the inverse interior scattering problem[J]. Inver. Prob., 2011, 27(3): 005–021.
- [3] Cakoni F, Colton D. Qualitative methods in inverse scattering theory[M]. Springer, 2006.
- [4] Cakoni F, Kress R. Integral equations for inverse problems in corrosion detection from partial Cauchy data[J]. Inver. Prob., 2007: 229–245.
- [5] Jost R, Walte K. Construction of a potential from a phase shift[J]. Phys. Rev., 1952, 87(6): 977–991.
- [6] Moses H E. Calculation of the scattering potential from reflection coefficients[J]. Phys. Rev., 1955, 102(2): 559–567.
- [7] Norton J. Iterative seismic inversion[J]. Geophys J., 1988, 94: 457–468.
- [8] Prosser R T. Formal solution of inverse scattering problems: I[J]. J. Math. Phys., 1969, 10(8): 1819–1822.
- [9] Prosser R T. Formal solution of inverse scattering problems: II[J]. J. Math. Phys., 1976, 17(11): 1775–1779.

- [10] Prosser R T. Formal solution of inverse scattering problems: III[J]. *J. Math. Phys.*, 1980, 21(11): 2648–2653.
- [11] Newton R G. Inverse scattering: I. One dimension[J]. *J. Math. Phys.*, 1980, 21(3): 493–505.
- [12] Newton R G. Inverse scattering: II. Three dimensions[J]. *J. Math. Phys.*, 1980, 21(7): 1698–1715.
- [13] Newton R G. Inverse scattering: II. Three dimensions, continued[J]. *J. Math. Phys.*, 1981, 22(10): 2191–2200.
- [14] Newton R G. Inverse scattering by a local impurity in a periodic potential in one dimension[J]. *J. Math. Phys.*, 1983, 24(8): 2152–2162.
- [15] Colton D, Kress R. *Inverse aconstic and electromagnetic scattering theory*[M]. Berlin Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1992.
- [16] Colton D, Monk P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic aconstic waves in the resonance region[J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 1985, 45: 1039–1053.
- [17] Colton D, Monk P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic aconstic waves in the resonance region II[J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 1986, 46: 506–523.
- [18] Colton D, Coyle J, Monk P. Recent developments in inverse acoustic scattering theory[J]. 2000, 42(3): 369–414.
- [19] Bleistein N, Cohen J K, John W Stockwell Jr. *Mathematics of Multi-dimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion*[M]. New York: Springer Verlag, 1996.
- [20] Bleistein N. On the imaging of reflectors in the earth[J]. *Geophysics*, 1987, 52(7): 931–942.
- [21] Bleistein N, Cohen J K, Hagin F G. Two and one-half dimension Born inversion with an arbitrary reference[J]. *Geophysics*, 1987, 52(1): 26–36.
- [22] Bleistein N, Cohen J K, Hagin F G. Computational and asymptotic of velocity inversion[J]. *Geophysics*, 1985, 50(8): 1253–1265.
- [23] Bleistein N, Cohen J K. The velocity inversion problem-Present status, new direction[J]. *Geophysics*, 1982, 47(11): 1497–1511.
- [24] Bleistein N, Gray S H. An extension of the Born inversion method to a depth dependent reference profile[J]. *Geophysical Prospecting*, 1985, 33(8): 999–1022.
- [25] Bleistein N. Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation[J]. *Geophysical Prospecting*, 1986, 34(6): 686–703.
- [26] Bleistein N. *Mathematical methods for wave phenomena*[M]. Academic Press Inc., 1984.
- [27] Coen S. Velocity, density profiles of a layered acoustic medium from common source-point data[J]. *Geophysics*, 1982, 47(6): 898–905.
- [28] Cohen J K, Hagin F G. Velocity inversion using a stratified reference[J]. *Geophysics*, 1985, 50(11): 1689–1700.
- [29] Cohen J K, Bleistein N. Three-dimensional Born inversion with an arbitrary referece[J]. *Geophysics*, 1986, 51(8): 1552–1558.
- [30] Rose J H, Richardson T M. Time Domain Born Approximation[J]. *J. Nondestructive Evaluation*, 1982, 3: 45.
- [31] Hsu D K, Rose J H, Thompson D O. Reconstruction of inclusions in solids using ultrasonic born inversion[J]. *J. Appl. Phys.*, 1984, 55(1): 162–168.
- [32] Darmon M, Calmon P, Bele B. An integrated model to simulate the scattering of ultrasounds by inclusions in steels[J]. *Ultrasonics*, 2004, 42: 237–241.
- [33] D. Colton, R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*[J]. *Appl. Math. Sci.*, 2013, 93.

- [34] 柳建军, 贺国强, 康传刚. 求解非线性不适定问题的隐式迭代法 [J]. 应用数学和力学, 2009, 30(9): 1107–1116.
- [35] 孙婷婷. 求解非线性不适定问题的两类迭代法 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2011.
- [36] Adrian Doicu, Franz Schreier, Michael Hess. Iterative regularization methods for atmospheric remote sensing[J]. J. Quant. Spectr. Rad. Trans., 2002, 292: 1–15.
- [37] Adrian Doicu, Franz Schreier, Michael Hess. An iterative regularization method with B-spline approximation for atmospheric temperature and concentration Retrievals[J]. Envir. Model. Soft., 2005: 1101–1109.

A REGULARIZED GAUSS-NEWTON METHOD FOR SOLVING INVERSE SCATTERING PROBLEM

MIN Tao, TONG Yun-li

(*Department of Applied Mathematics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China*)

Abstract: In this paper, an important inverse problem-inverse scattering problem, is studied. It is a problem of identifying the shape of an obstacle in a scatterer from far-field scattering data. Here, we consider the problem using the Iteratively Regularized Gauss-Newton method. Through the numerical simulation, it is proved that the proposed method is feasible and effective in solving the inverse scattering problem.

Keywords: inverse scattering; noise; regularization; Gauss-Newton method; numerical solution

2010 MR Subject Classification: 97N99