Vol. 39 (2019)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非线性 SCHRÖDINGER-MAXWELL 方程的基态解

姜影星, 黄文念

(广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林 541006)

摘 要: 本文研究了 schrödinger-Maxwell 方程基态解存在性的问题. 在 V, K, f, g 满足文中定理 1.1 的假设条件下, 利用山路定理的方法, 获得了系统 (NSM) 的基态解这一结果, 推广了文献 [1] 中 $0 < p < 1$ 和文献 [2] 中系统高能解的结果.

关键词: schrödinger-Maxwell 方程; 山路定理; 基态解; Nehari 流形

MR(2010) **主题分类号**: 35A15; 39A14 **中图分类号**: O175.25

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)03-0455-09

1 引言

考虑下面非线性的 schrödinger-Maxwell 方程

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = f(x,u) - g(x,u), & x \in R^3, \\ -\triangle\phi = K(x)u^2. & x \in R^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$, $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$, 此系统又称为 schrödinger-Poisson 系统, 它是物理学家们在求解非线性 schrödinger 方程和一未知电场相互作用的解时得到的. 关于 (1.1) 式的具体推导过程及更详尽的物理意义, 文献 [3, 4] 有较详细的论述.

自从系统 (1.1) 在文献 [3] 中提出以后, 很多学者对系统解的问题产生了兴趣并进行了研究. 在文献 [1] 中, Sun 用变化的喷泉定理得出了一类次线性项 schrödinger-Maxwell 方程的无限多个解. 在文献 [2] 中, Li, Su, Wei 用变化的喷泉定理得出了非线性 schrödinger-Maxwell 方程的无穷多个高能解的存在性. 受文献 [2] 的启发, 本文在文献 [2] 的非线性项 $f(x,u)$ (见本文定理 1.1 的 (f1)–(f4) 条件) 的基础上, 添加了一个次线性项 $g(x,u)$ (见定理 1.1 的 (g) 条件), 将文献 [1] 中的次线性项 $0 < p < 1$, 推广到本文的 $q \in (2,3)$, 运用山路定理, 证出了系统 (1.1) 的基态解. 在文献 [5] 中, Liu, Guo, Zhang 用变分法得出了系统的基态解的存在性. 在文献 [6] 中, Sun, Ma 用新方法证得了系统的基态解. 在文献 [7] 中, 方立婉, 黄文念, 谢苏静运用山路定理得出了一类非线性 schrödinger-Maxwell 方程在 R^3 的基态解, 关于系统 (1.1) 的更多的结论见文献 [8–12].

定理 1.1 假设 V, K 和非线性项 f, g 满足如下条件:

(V) $V \in C(R^3, R)$ 且 $\inf\limits_{x\in R^3} V(x) > 0$. 进一步地, $\forall\ M > 0$, 有 $\mathrm{meas}\{x \in R^3 : V(x) \le M\} < \infty$.

*收稿日期: 2017-10-25 接收日期: 2018-06-13

基金项目: 广西自然科学基金 (2015GXNSFBA139018); 广西师范大学科学研究基金 (2014ZD001); 广西研究生教育创新计划项目 (XYCSZ2018060).

作者简介: 姜影星 (1991–), 女, 河南商丘, 硕士, 主要研究方向: 非线性偏微分方程.

(K) $K \in L^{\infty}(R^3, R)$, 且 $K(x) \geq 0, \forall x \in R^3$.

(f1) $f \in C(R^3 \times R, R)$ 且存在 $a > 0$, $p \in (2,6)$, 使得 $|f(x,u)| \leq a(1+|u|^{p-1})$, $\forall\ (x,u) \in R^3 \times R$.

(f2) $\lim\limits_{|u|\to 0} \frac{F(x,u)}{|u|^2} = 0$ 对于所有 $x \in R^3$ 一致成立.

(f3) $\lim\limits_{|u|\to\infty} \frac{F(x,u)}{|u|^4} = +\infty$ 对于所有 $x \in R^3$ 一致成立.

(f4) $\forall\ (x,u) \in R^3 \times R$, $0 < F(x,u) \leq \frac{1}{4} f(x,u)u$.

(g) $G(x,u) = \frac{1}{4-q} b(x)|u|^{4-q}$, $q \in (2,3)$, $b(x) \geq 0$, $\forall\ x \in R^3$, $b(x) \in L^{\frac{4}{q}}(R^3, R)$.

则系统 (1.1) 存在一个解 $u \in E$ 使得 $\Phi(u) = \inf\limits_{\mathcal{N}} \Phi(u) > 0$. $\mathcal{N}$ 定义见式 (2.9).

2 相关记号和准备工作

对于任意的 $1 \leq r < \infty$, $L^r(R^3)$ 表示通常意义下的 Lebesgue 空间, 其范数为

$$\|u\|_r = \left(\int_{R^3} |u|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

$H^1(R^3)$ 则表示通常意义下的 Sobolev 空间, 其范数取为

$$\|u\|_{H^1} = \left\{ \int_{R^3} \left[|\nabla u|^2 + |u|^2 \right] \mathrm{d}x \right\}^{1/2}.$$

定义如下空间

$$\mathcal{D}^{1,2} = \{ u \in L^{2^*}(R^3) \mid \nabla u \in L^2(R^3) \},$$

其范数取为

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} = \left(\int_{R^3} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$2^* = 6$ 为三维空间的临界 Sobolev 嵌入指数, 则 $\mathcal{D}^{1,2}(R^3) \hookrightarrow L^{2^*}(R^3)$, C_1 是最佳嵌入正的常数, 即

$$\|u\|_6 \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}. \tag{2.1}$$

由 Lax-Milgram 定理 (见文献 [13]), $\forall\ u \in\ H^1(R^3)$, $\exists$ 唯一的 $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(R^3)$ 使得

$$-\triangle \phi_u = K(x)u^2. \tag{2.2}$$

进一步地有

$$\phi_u = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{K(y)u^2(y)}{|x-y|} dy.$$

从而 $\phi_u \geq 0$. $\forall u \in H^1(R^3)$, 由式 (2.1), (2.2) 和 Hölder 不等式知

$$\|\phi_u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}} = \int_{R^3} K(x)\phi_u u^2 dx \leq \|K\|_\infty \|\phi_u\|_6 \|u\|^2_{\frac{12}{5}} \leq C_1 \|K\|_\infty \|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \|u\|^2_{\frac{12}{5}}.$$

从而

$$\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \leq C_1 \|K\|_\infty \|u\|^2_{\frac{12}{5}}, \tag{2.3}$$

且令 $C_2 = C_1^2\|K\|_\infty^2$

$$\int_{R^3} K(x)\phi_u u^2 dx \le C_2\|u\|_{\frac{12}{5}}^4. \tag{2.4}$$

令

$$E = \left\{u \in H^1(R^3) : \int_{R^3} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 \mathrm{d}x < +\infty\right\} \tag{2.5}$$

和

$$\|u\| = \left\{\int_{R^3} \left[|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\right] \mathrm{d}x\right\}^{1/2}, \quad \forall\ u \in E.$$

(V) 条件显示 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{H^1}$ 在 E 上是两个等价范数, 由 Sobolev 嵌入定理, $\exists C_3 > 0$, 使得

$$\|u\|_r \le C_3\|u\|,\ \forall\ u \in E,\ \ 2 \le r \le 2^*. \tag{2.6}$$

在空间 $E \times \mathcal{D}^{1,2}$ 中定义一个泛函 I,

$$\begin{aligned} I(u,\phi) \quad = \quad & \frac{1}{2}\int_{R^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \frac{1}{4}\int_{R^3} |\nabla\phi|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{R^3} K(x)\phi u^2 dx \\ & -\int_{R^3} F(x,u)dx + \int_{R^3} G(x,u)dx, \end{aligned} \tag{2.7}$$

则 I 是有意义的, 且 $I \in C^1(E \times \mathcal{D}^{1,2})$, 同时, I 的每个临界点就是系统 (1.1) 的一个解 (这里是指弱解). 由式 (2.2) 得出

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{R^3} K(x)\phi_u u^2 dx - \int_{R^3} F(x,u)dx + \int_{R^3} G(x,u)dx. \tag{2.8}$$

易知 $\Phi \in C^1(E,R)$ 且

$$\langle\Phi'(u),v\rangle = \int_{R^3} (\nabla u\nabla v + V(x)uv)dx + \int_{R^3} K(x)\phi_u uvdx - \int_{R^3} f(x,u)vdx + \int_{R^3} g(x,u)vdx.$$

由临界点理论及变分法知: 当 $u \in E$ 为泛函 Φ 的一个临界点, 则 (u,ϕ_u) 为系统 (1.1) 的一组解. 对应的 Nehari 流形为

$$\mathcal{N} = \{u \in E\backslash\{0\} : \langle\Phi'(u),u\rangle = 0\}. \tag{2.9}$$

定义 2.1 (见文 [14]) 设 E 是 Banach 空间, $\Phi \in C^1(E,R)$, $c \in R$. 泛函 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件是指: $\forall\ \{u_n\} \subset E$ 使得

$$\Phi(u_n) \to c, \quad \Phi'(u_n) \to 0$$

有一个收敛的子列.

定理 2.2 (见文 [15]) 设 E 是 Banach 空间, E^* 为其对偶空间, 若 $\Phi \in C^1(E,R)$ 且满足

$$\Phi(v) < \Phi(0) = 0 < \rho \le \inf_{\|u\|=r} \Phi(u),$$

其中 $\rho > 0, r > 0$, 以及 $v \in E$ 且 $\|v\| > r$. 令 $c \geq \rho$ 且 $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{s\in[0,1]}\Phi(\gamma(s))$, 是从 0 到 v 的连续曲线. 其中 $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$, 则存在 $\{u_n\} \subset E$, 使得 $\Phi(u_n) \to c > 0$ 且 $\Phi'(u_n) \to 0$, 若 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件, 则 $c \geq \rho$ 是 Φ 的临界值.

3 定理 1.1 的证明

引理 3.1 在定理 1.1 的假设条件下, 则

(i) $\exists\, r > 0, \rho > 0$, 使得 $\rho \leq \inf\limits_{\|u\|=r}\Phi(u)$;

(ii) $\exists\, v \in E$, 满足 $\|v\| > r$, 使得 $\Phi(v) < 0$.

证 (i) 由 (f2) 条件知 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$, 使得 $\forall\, x \in R^3$, $0 \leq |u| \leq \alpha$, 有 $\frac{|F(x,u)|}{|u|^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 所以

$$|F(x,u)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2. \tag{3.1}$$

进一步得出

$$|f(x,u)| \leq \varepsilon|u|. \tag{3.2}$$

由 (f1) 条件知 $\forall\, x \in R^3$, $|u| \geq \alpha$, 这里 $C = a((\frac{1}{\alpha})^{p-1} + 1)$,

$$\begin{aligned} &|f(x,u)| \leq a + a|u|^{p-1} \leq a((\frac{1}{\alpha})^{p-1} + 1)|u|^{p-1} \leq C|u|^{p-1}, \\ &|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此

$$|F(x,u)| \leq \frac{C}{p}|u|^p. \tag{3.4}$$

结合式 (3.2), (3.3), $\forall\, x \in R^3$, $u \in R$, 有

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + \varepsilon|u|. \tag{3.5}$$

结合式 (3.1), (3.4), $\forall\, x \in R^3$, $u \in R$, 有

$$|F(x,u)| \leq \frac{C}{p}|u|^p + \frac{\varepsilon}{2}|u|^2. \tag{3.6}$$

结合 (g) 条件和式 (2.6), 有

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{R^3} K(x)\phi_u u^2 dx - \int_{R^3} F(x,u)dx + \int_{R^3} \frac{1}{4-q} b(x)|u|^{4-q} dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 - \frac{C}{p}\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_3^2\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{CC_3^p}{p}\|u\|^p. \end{aligned}$$

取 ε 充分小, 因此 $\exists\, r > 0$, $\rho > 0$, 使得 $\rho \leq \inf\limits_{\|u\|=r}\Phi(u)$.

(ii) 由 (f3) 条件知 $\forall\, M > 0$, $\exists\, \delta > 0$, 使得 $|u| \geq \delta$ 时,

$$F(x,u) \geq M|u|^4. \tag{3.7}$$

由 (f2) 条件知 $\forall\, x\in R^3,\ 0\leq |u|\leq\alpha$, 有

$$\frac{|F(x,u)|}{|u|^2}\leq\frac{1}{2}, \tag{3.8}$$

从而

$$F(x,u)\geq -\frac{1}{2}|u|^2. \tag{3.9}$$

由 (f1) 条件知 $\exists\, M_1>0$, 使得 $\forall\, x\in R^3,\ \ \alpha\leq|u|\leq\delta$, 有

$$|\frac{f(x,u)u}{u^2}|\leq\frac{|a(1+|u|^{p-1})u|}{|u|^2}\leq M_1, \tag{3.10}$$

从而

$$F(x,u)\geq -\frac{M_1}{2}|u|^2. \tag{3.11}$$

结合式 (3.7), (3.9), (3.11), $\forall\, M>0,\ \exists\, M_1>0$ 使得 $\forall\, x\in R^3,\ u\in R$, 取 $\tilde{M}=\frac{M_1+1}{2}+M|u|^4$, 有

$$F(x,u)\geq -\tilde{M}|u|^2+M|u|^4. \tag{3.12}$$

由式 (2.4), (2.6), $2<q<3$, 知

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}\int_{R^3}K(x)\phi_u u^2dx-\int_{R^3}F(x,u)dx+\int_{R^3}\frac{1}{4-q}b(x)|u|^{4-q}dx\\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}C_2C_3^4\|u\|^4+\tilde{M}C_3^2\|u\|^2-M\|u\|_4^4+\frac{1}{4-q}\|b\|_{\frac{4}{q}}C_3^{4-q}\|u\|^{4-q},\\ \Phi(te) &\leq \frac{1}{2}t^2\|e\|^2+\frac{1}{4}C_2C_3^4t^4\|e\|^4+\tilde{M}C_3^2t^2\|e\|^2-Mt^4\|e\|_4^4+\frac{1}{4-q}\|b\|_{\frac{4}{q}}t^{4-q}C_3^{4-q}\|e\|^{4-q}.\end{aligned}$$

取 M 充分大, 则 $\Phi(te)\leq 0$, 取 $v=te$, 当 t 充分大时, $\|v\|>r$, 使得 $\Phi(v)\leq 0$.

引理 3.2 在定理 1.1 的条件下, Φ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列有界.

证 因为 $\Phi(u_n)\to c$, 所以 $\exists\, M_2>0$, 使得 $\Phi(u_n)\leq M_2$. 又因 $\Phi'(u_n)\to 0$, 所以 $\forall\,\delta>0$, $\|\Phi'(u_n)\|\leq\delta$,

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\int_{R^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\int_{R^3}F(x,u_n)dx+\int_{R^3}\frac{1}{4-q}b(x)|u_n|^{4-q}dx,\\ \|u_n\|^2 &= 2\Phi(u_n)-\frac{1}{2}\int_{R^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx+2\int_{R^3}F(x,u_n)dx-2\int_{R^3}\frac{1}{4-q}b(x)|u_n|^{4-q}dx\\ &\leq 2M_2-\frac{1}{2}\int_{R^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx+2\int_{R^3}F(x,u_n)dx-2\int_{R^3}\frac{1}{4-q}b(x)|u_n|^{4-q}dx.\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式

$$|\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle|=|\|u_n\|^2+\int_{R^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\int_{R^3}f(x,u_n)u_ndx+\int_{R^3}b(x)|u_n|^{4-q}dx|\leq\delta\|u_n\|,$$

所以

$$\|u_n\|^2+\int_{R^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\int_{R^3}f(x,u_n)u_ndx+\int_{R^3}b(x)|u_n|^{4-q}dx\geq-\delta\|u_n\|,$$

即

$$\int_{R^3} f(x,u_n)u_n dx - \int_{R^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{R^3} b(x)|u_n|^{4-q} dx \le \|u_n\|^2 + \delta\|u_n\|.$$

由 (f4) 条件知 $2F(x,u_n) \le \frac{1}{2} f(x,u_n)u_n$, 因为 $2<q<3$, 所以 $1<\frac{2}{4-q}<2$. 因此

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2 &\le 2M_2 + \frac{1}{2}(\int_{R^3} f(x,u_n)u_n dx - \int_{R^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{R^3} b(x)|u_n|^{4-q} dx) \\ &\le 2M_2 + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{\delta}{2}\|u_n\|,\end{aligned}$$

即 $\{u_n\}$ 有界.

引理 3.3 在定理 1.1 的条件下, Φ 的有界 $(\mathrm{PS})_c$ 序列收敛, 即 $\Phi(u_n)\to c, \Phi'(u_n)\to 0$, 则 $\{u_n\}$ 存在一个收敛的子列.

证 因为 $\{u_n\}\subset E$ 有界, 所以 $\exists\, u\in E$, 使得 $u_n \rightharpoonup u$, 由 (V) 条件知, 在 $L^t(R^3), t\in[2,6)$ 中, 有

$$u_n \to u. \tag{3.13}$$

因为

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^2 = \langle \Phi'(u_n)-\Phi'(u), u_n-u\rangle + \int_{R^3}(f(x,u_n) \\ -(f(x,u))(u_n-u)dx - \int_{R^3}(g(x,u_n)-(g(x,u))(u_n-u)dx \\ - \int_{R^3} K(x)(\phi_{u_n}u_n - \phi_u u)(u_n-u)dx,\end{aligned}$$

显然, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\langle \Phi'(u_n)-\Phi'(u), u_n-u\rangle \to 0. \tag{3.14}$$

由式 (3.5) 可知

$$\begin{aligned}&\int_{R^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)dx \\ \le& \int_{R^3} \varepsilon(|u_n|+|u|) + C(|u_n|^{p-1}+|u|^{p-1})(u_n-u))dx \\ \le& \varepsilon(\|u_n\|_2+\|u\|_2)\|u_n-u\|_2 + C(|u_n|_p^{p-1}+|u|_p^{p-1})\|u_n-u\|_p.\end{aligned}$$

因为在 $L^s(R^3),\ \ 2\le s<6$ 中, 有 $u_n\to u$, 所以 $\int_{R^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)dx \to 0$. 由 Hölder 不等式和 (g) 条件知

$$\begin{aligned}&\int_{R^3}(g(x,u_n)-g(x,u))(u_n-u)dx \\ \le& \int_{R^3}(b(x)(|u_n|^{3-q}+|u|^{3-q})|u_n-u|)dx \\ \le& (\int_{R^3}|b(x)|^{\frac{4}{3}}|u_n|^{\frac{4(3-q)}{3}}dx)^{\frac{3}{4}} + (\int_{R^3}|b(x)|^{\frac{4}{3}}|u|^{\frac{4(3-q)}{3}}dx)^{\frac{3}{4}})\|u_n-u\|_4 \\ \le& \|b\|_{\frac{4}{q}}(\|u_n\|_4^{3-q}+\|u\|_4^{3-q})\|u_n-u\|_4.\end{aligned}$$

因为在 $L^s(R^3)$, $2 \le s < 6$ 中, 有 $u_n \to u$, 所以 $\int_{R^3}(g(x,u_n)-g(x,u))(u_n-u)dx \to 0$. 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\int_{R^3} K(x)\phi_{u_n}u_n(u_n-u)dx &\le \|K\|_\infty\|\phi_{u_n}u_n\|_2\|u_n-u\|_2\\ &\le \|K\|_\infty\|\phi_{u_n}\|_6\|u_n\|_3\|u_n-u\|_2\\ &\le C_1\|K\|_\infty\|\phi_{u_n}\|_{\mathcal{D}^{1,2}}\|u_n\|_3\|u_n-u\|_2\\ &\le C_1^2\|K\|_\infty^2\|u_n\|_{\frac{12}{5}}^2\|u_n\|_3\|u_n-u\|_2.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{R^3} K(x)\phi_{u_n}u_n(u_n-u)dx \to 0. \tag{3.15}$$

类似的

$$\int_{R^3} K(x)\phi_u u(u_n-u)dx \to 0. \tag{3.16}$$

因此

$$\|u_n-u\| \to 0. \tag{3.17}$$

则已证 $\forall\ c$, Φ 的 $(PS)_c$ 条件成立. 因此至少存在一个非零解 $u \in E$, $\Phi(u)=c$, $\Phi'(u)=0$. 由式 (2.9) 知, 显然 $\mathcal{N}$ 非空, $\forall\ u \in \mathcal{N}$, 有

$$\begin{aligned}0=\langle\Phi'(u),u\rangle &= \|u\|^2+K(x)\int_{R^3}\phi_u u^2dx-\int_{R^3}f(x,u)udx+\int_{R^3}b(x)|u|^{4-q}dx\\ &\ge \|u\|^2-\varepsilon C_3^2\|u\|^2-CC_3^p\|u\|^p.\end{aligned} \tag{3.18}$$

由 $\mathcal{N}$ 的定义, 显然 $u \not\equiv 0$, 取 ε 充分小, 则

$$\|u\| \ge \sqrt[p-2]{\frac{1-\varepsilon C_3^2}{CC_3^p}},$$

又因为 $2<q<3$, 所以 $\frac{1}{2}<\frac{1}{4-q}<1$.

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \Phi(u)-\frac{1}{4}\langle\Phi'(u),u\rangle\\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2+\int_{R^3}(\frac{1}{4}f(x,u)u-F(x,u))dx+\int_{R^3}(G(x,u)-\frac{1}{4}g(x,u)u)dx\\ &\ge \frac{1}{4}\|u\|^2+(\frac{1}{4-q}-\frac{1}{4})\int_{R^3}b(x)|u|^{4-q}dx\\ &\ge \frac{1}{4}\|u\|^2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

所以 Φ 在 $\mathcal{N}$ 上是下有界的, 且 Φ 具有强制性, 即 $(\|u\| \to \infty,\ \ \Phi(u) \to \infty)$ 因此定义

$$m=\inf_{\mathcal{N}}\Phi>0.$$

引理 3.4 (见文 [14]) 设 $r>0$, 如果 $\{u_n\}\subset H^1(R^3)$ 有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in R^3}\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx=0,$$

则 $\forall\ s\in(2,6)$, 在 $L^s(R^3)$ 中有 $u_n\to 0$.

定理 1.1 的证明 设 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}$ 是 Φ 的一个极小化序列, 则 $\{u_n\}$ 有界, 而且通过一个恰当的 Z^3 变换, $\exists\ u\in\mathcal{N}$, 使得 $u_n\rightharpoonup u$ 和 $\Phi(u)=s=\inf\limits_{\mathcal{N}}\Phi$.

证 由 Φ 具有强制性, 显然, $\{u_n\}$ 有界. 在子列意义条件下, 有 $u_n\rightharpoonup u$. 假设引理 3.4 成立, 结合式 (3.5), 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\int_{R^3}f(x,u_n)u_n=o(\|u_n\|)$. 从而有

$$\begin{aligned}o(\|u_n\|)=\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle&=\|u_n\|^2+\int_{R^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\int_{R^3}f(x,u_n)u_ndx+\int_{R^3}b(x)|u_n|^{4-q}dx\\&\geq\|u_n\|^2-o(\|u_n\|).\end{aligned}$$

所以 $\|u_n\|\to 0$, 这与式 (3.18) 相矛盾, 因此 $\exists\ r>0,\{y_n\}\subset Z^3$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in R^3}\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx>0.$$

因此 $u_n\rightharpoonup u\neq 0$, 则 $\Phi'(u)=0$. 因此 $u\in\mathcal{N}$. 显然 $\Phi(u)\geq s$. 由 (f4) 条件, Fatou's 引理, $\|\cdot\|$ 的弱连续和 $\{u_n\}$ 有界得

$$\begin{aligned}s+o(1)&=\Phi(u_n)-\frac{1}{4}\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle\\&=\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\int_{R^3}(\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)dx+\int_{R^3}(G(x,u_n)-\frac{1}{4}g(x,u_n)u_n)dx\\&\geq\frac{1}{4}\|u\|^2+\int_{R^3}(\frac{1}{4}f(x,u)u-F(x,u)dx+\int_{R^3}(G(x,u)-\frac{1}{4}g(x,u)u)dx+o(1)\\&=\Phi(u)-\frac{1}{4}\langle\Phi'(u),u\rangle+o(1)=\Phi(u)+o(1).\end{aligned}$$

所以 $\Phi(u)\leq s$, 从而 $\Phi(u)=s=\inf\limits_{\mathcal{N}}\Phi>0$.

参 考 文 献

[1] Sun Juntao. Infinitely many solutions for a class of sublinear Schrödinger-Maxwell equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 390(2): 514–522.

[2] Li Qingdong, Su Han, Wei Zhongli. Existence of infinitely many large solutions for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations[J]. Nonl. Anal., 2010, 72(11): 4264–4270.

[3] Benci V, Fortunato D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations[J]. Topol. Meth. Nonl. Anal., 1998, 11(2): 283–293.

[4] D'Aprile T, Mugnai D. Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations[J]. Proc. Royal Soc. Edinb., 2004, 134(5): 893–906.

[5] Liu Zhisu, Guo Shangjiang, Zhang Ziheng. Existence of ground state solutions for the Schrödinger-Poisson systems[J]. Appl. Math. Comput., 2014, 244(7): 312–323.

[6] Sun Jijiang, Ma Shiwang. Ground state solutions for some Schrödinger-Poisson system with periodic potentials[J]. J. Diff. Equ., 2016, 260(1): 2119–2149.

[7] 方立婉, 黄文念, 谢苏静. 一类非线性 schrödinger-Maxwell 方程在 R^3 的基态解 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(18): 268–273.

[8] Huang Wennian, Tang Xianhua. Ground-state solutions for asymptotically cubic Schrödinger-Maxwell equations[J]. Mediterranean J. Math., 2016, 13(2): 3469–3481.

[9] Tang Xianhua. Non-Nehari manifold method for asymptotically linear Schrödinger equation[J]. J. Austr. Math. Soc., 2015, 98(1): 104–116.

[10] Yang Minghai, Han Zhiqing. Existence and multiple results for the nonlinear Schrödinger-Poisson system[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2012, 13(3): 1093–1101.

[11] Li Fuyi, Zhang Qi. Existence of positive solutions to the Schrödinger-Poisson systems without compactness conditions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2013, 401(2): 754–762.

[12] Zou Wenming. Variant fountain theorems and their applications[J]. Manuscr. Math., 2001, 104(3): 343–358.

[13] Yosida K. Functional analysis (6th ed.)[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[14] Willem M. Minimax theorems[M]. Boston: Birkhäser, 1996.

[15] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[J]. Amer. J. Math., 1986, 65: 100.

GROUND STATE SOLUTION FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER-MAXWELL EQUATIONS

JIANG Ying-xing, HUANG Wen-nian

(*School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 541006, China*)

Abstract: In this paper, we study the existence of ground state solution for the Schrödinger-Maxwell equations. Under some assumptions of Theorem 1.1 about V, K and f, g, by using mountain pass theorem, we get the ground state solution for (NSM), we promote the conclusion of the first reference with $0 < p < 1$ and the second reference about high energy solution.

Keywords: Schrödinger-Maxwell equations; mountain pass theorem; ground state solution; Nehari manifold

2010 MR Subject Classification: 35A15; 39A14