

## 竞争型反应扩散方程的正解与时间最优控制

刘远凯, 张亮

(武汉理工大学数学系, 湖北 武汉 430070)

**摘要:** 本文研究了一类竞争型反应扩散方程的时间最优控制问题的存在性问题. 利用上下解的方法, 得到了反应扩散方程正解的存在性. 利用 Kakutani 不动点定理, 证明了反应扩散方程关于正轨迹的局部精确可控性, 并据此证明了时间最优控制的存在性.

**关键词:** 正解; 可控性; 时间最优控制; 反应扩散方程

MR(2010) 主题分类号: 93B05; 93C20

中图分类号: O211.4

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)03-0405-09

### 1 引言

设  $\Omega \subset R^d$  ( $d \geq 1$ ) 为带光滑边界  $\partial\Omega$  的有界区域,  $\omega$  为  $\Omega$  的非空开子集. 记  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$ ; 并以  $|\cdot|_p$  和  $\|\cdot\|_p$  分别记函数空间  $L^p(\Omega)$  和  $L^p(Q_T)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 的范数. 对于任意的 Banach 空间  $X$ , 用  $X^2$  表示笛卡尔积  $X \times X$ . 设

$$\begin{cases} \partial_t y(x, t) = \mu_1 \Delta y(x, t) - ay(x, t)z(x, t) + g(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t z(x, t) = \mu_2 \Delta z(x, t) - by(x, t)z(x, t) + h(x, t) + 1_\omega(x)f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_n y(x, t) = 0, \quad \partial_n z(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ y(x, 0) = y_0(x), z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $y = y(x, t)$  和  $z = z(x, t)$  分别表示两种物质的密度;  $\partial_n y = \partial y / \partial n$ ,  $\partial_n z = \partial z / \partial n$ ,  $n$  表示边界  $\partial\Omega$  的外法单位向量; 给定的函数  $g = g(x, t)$  和  $h = h(x, t)$  表示物质的输入;  $\mu_1$  和  $\mu_2$  是正常数, 表示扩散系数;  $a$  和  $b$  为非负常数, 表示反应常数;  $y_0 = y_0(x)$  和  $z_0 = z_0(x)$  表示初始值;  $f = f(x, t)$  为控制函数,  $1_\omega$  为集合  $\omega$  上的特征函数,  $1_\omega f$  表示控制函数经子集  $\omega$  作用于系统. 为了简化符号, 在不发生混淆的情况下, 我们省略函数表达式中的  $x$  和  $t$ .

给定时刻  $T$ , 考虑如下形式的反应扩散系统:

$$\begin{cases} \partial_t y(x, t) = \mu_1 \Delta y(x, t) - ay(x, t)z(x, t) + g(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ \partial_t z(x, t) = \mu_2 \Delta z(x, t) - by(x, t)z(x, t) + h(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ \partial_n y(x, t) = 0, \partial_n z(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma_T, \\ y(x, 0) = y_0(x), z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

系统 (1.2) 在生物和化学方面均为非常重要的模型, 相关的工作非常丰富. 因为物质的密度为正值, 所以仅考虑系统 (1.1) 和 (1.2) 的正解. 为此, 给出如下的假设

(H1)  $g, h \in L^\infty(0, \infty, L^\infty(\Omega))$ ,  $g(x, t) \geq M_0$ ,  $h(x, t) \geq M_0$  a.e.  $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$ ;

\*收稿日期: 2017-10-08

接收日期: 2017-11-29

基金项目: 国家自然科学基金资助 (61573012).

作者简介: 刘远凯 (1992-), 男, 湖北武汉, 硕士, 主要研究方向: 运筹学与最优控制.

(H2)  $y_0, z_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^2(\Omega), y_0(x) \geq m_0, z_0(x) \geq m_0$  a.e.  $x \in \Omega$ , 其中  $M_0, m_0$  均为正常数.

本文将证明, 在假设 (H1) 和 (H2) 的条件下, 存在正常数  $M^*$ , 使得系统 (1.2) 的解  $(y^*, z^*)$  满足

$$y^*(x, t) \geq M^*, z^*(x, t) \geq M^* \text{ a.e. } (x, t) \in Q_T. \quad (1.3)$$

这样的解称之为系统 (1.2) 的正轨迹. 以此正轨迹为目标函数, 考虑系统 (1.1) 关于正轨迹  $(y^*, z^*)$  的能控性问题和时间最优控制的存在性问题. 具体地, 设  $\rho > 0$ , 记

$$\mathcal{U}_\rho = \{f \in L^\infty(\Omega \times (0, \infty)); \|f\|_{L^\infty(\Omega \times (0, \infty))} \leq \rho\}.$$

称系统 (1.1) 对于正轨迹  $(y^*, z^*)$  在时刻  $T$  是局部精确能控的, 如果对于一定范围内的初值  $(y_0, z_0)$ , 都存在控制  $f \in \mathcal{U}_\rho$  使得系统 (1.1) 相应的解满足

$$y(x, T) = y^*(x, T), \quad z(x, T) = z^*(x, T) \text{ a.e. } x \in \Omega. \quad (1.4)$$

此外, 希望系统 (1.1) 的解保持非负, 即  $y$  和  $z$  满足  $y(x, t) \geq 0, z(x, t) \geq 0$  a.e.  $(x, t) \in Q_T$ . 设

$\mathfrak{S} = \{T > 0; \text{存在控制 } f \in \mathcal{U}_\rho \text{ 使得系统 (1.1) 在时刻 } T \text{ 处精确能控到目标 } (y^*, z^*)(\cdot, T)\}$ , 并考虑如下的时间最优控制的存在性问题

$$(TP) \quad \inf \mathfrak{S}$$

亦即系统 (1.1) 精准达到目标  $(y^*, z^*)$  的最短时间是否存在的问题. 该问题可以解释为系统在控制的作用下在最短的时间内与给定的轨迹同步.

关于非线性抛物型方程解的存在性问题, 相关的研究工作比较深入, 利用多种方法和技巧可以研究解的存在性、唯一性等性质<sup>[1-2]</sup>. 由抛物型偏微分方程或方程组刻画的分布参数系统的控制问题, 尤其是能控性问题和时间最优控制问题, 近二十年以来一直受到持续关注, 目前已经有一些经典的结果, 比如文献 [3-6]. 关于抛物型方程组的能控性和时间最优控制问题, 因其特有的数学结构以及广泛的实际应用背景, 近年来愈发引起关注. 在文献 [7] 中, 作者首次研究了一类反应扩散方程的局部能控性问题, 但是由于在同一内部区域对每个物质施加控制, 因此该问题可以转化为单一的抛物型方程的能控性问题. 在文献 [8-10] 中, 作者考虑了抛物型方程组在一个控制下的能控性问题或时间最优控制问题. 目前, 关于抛物型方程组在一个控制的能控性问题仍然有一些公开的难题没有解决. 关于抛物型方程的时间最优控制问题, 最近在文献 [11-15] 中出现了一些最新的进展. 本文所研究的内容是对文献 [7] 和 [9] 的结果的改进. 首先, 本文所研究的模型与文献 [7] 和 [9] 不同, 非齐次项  $g$  与时间变量有关, 且控制施加在一个方程之上, 因此, 本文的结果是文献 [7] 和 [9] 的推广. 其次, 本文利用上下解方法得到系统 (1.1) 的严格正解, 这是本文的主要结果之一. 最后, 本文探讨了系统 (1.1) 关于正轨迹  $(y^*(x, t), z^*(x, t))$  的时间最优控制的存在性问题, 该问题可以解释为系统在控制的作用下和预定的轨迹能否在最短的时间内同步, 这是与文献 [7] 和 [9] 的不同之处.

## 2 正解的存在性

本节给出了系统 (1.2) 存在唯一正解的证明, 得到如下结果.

**定理 2.1** 假设 (H1) 和 (H2) 成立, 则系统 (1.1) 存在唯一正解

$$(y^*, z^*) \in (L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T]; L^2(\Omega)))^2$$

并且存在常数  $C, M^* > 0$ , 使得解  $(y^*, z^*)$  满足 (1.3) 式和不等式

$$\begin{aligned} & |\nabla y^*(\cdot, t)|_2^2 + |\nabla z^*(\cdot, t)|_2^2 + \int_0^t [|\Delta y^*|_2^2 + |\Delta z^*|_2^2] ds + \int_0^t [|\partial_t y^*|_2^2 + |\partial_t z^*|_2^2] ds \\ & \leq \exp\{C[\|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z_0\|_{H^2(\Omega)}^2]\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

为了证明这个结论, 给出如下引理.

**引理 2.1** 令  $0 < \alpha < 1$ . 设  $g, h \in C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q_T})$  满足  $g, h \geq M_0$ ,  $y_0, z_0 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  满足  $y_0, z_0 \geq m_0$ , 且存在一个足够小的常数  $M^*$  满足  $0 < 2M^* \leq m_0$ , 则系统 (1.2) 存在唯一解  $(y, z) \in (C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}))^2$ , 其满足  $y(x, t) \geq M^*, z(x, t) \geq M^*, (x, t) \in \overline{Q_T}$ .

**证** 令  $\underline{y} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  为方程

$$\begin{cases} \partial_t \underline{y} = \mu_1 \Delta \underline{y}, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \underline{y} = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \underline{y}(x, 0) = 2M^*, & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

的唯一解,  $\overline{y} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  为方程

$$\begin{cases} \partial_t \overline{y} = \mu_1 \Delta \overline{y} + g, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \overline{y} = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \overline{y}(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

的唯一解. 同理, 设  $\underline{z} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  为方程

$$\begin{cases} \partial_t \underline{z} = \mu_2 \Delta \underline{z}, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \underline{z} = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \underline{z}(x, 0) = 2M^*, & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

的唯一解,  $\overline{z} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  为方程

$$\begin{cases} \partial_t \overline{z} = \mu_2 \Delta \overline{z} + h, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \overline{z} = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \overline{z}(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

的唯一解. 如果用  $y - M^*$  替代方程 (2.2) 中的  $y$ , 根据比较定理<sup>[2]</sup>, 则可以得到  $\underline{y} \geq M^*$ . 同理得到  $\underline{z} \geq M^*$ . 对方程 (2.2) 和 (2.3) 再次使用比较定理, 得  $\underline{y} \leq \overline{y}$ . 同理可得  $\underline{z} \leq \overline{z}$ . 现在我们构造函数序列  $\{\underline{y}_k\}_1^\infty, \{\underline{z}_k\}_1^\infty, \{\overline{y}_k\}_1^\infty$  和  $\{\overline{z}_k\}_1^\infty$ . 令  $\underline{y}_1 = \underline{y}, \overline{y}_1 = \overline{y}, \underline{z}_1 = \underline{z}, \overline{z}_1 = \overline{z}$ , 根据递推可定义  $(\overline{y}_k, \underline{z}_k) \in (C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}))^2$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) 为下列线性方程组的唯一解

$$\begin{cases} \partial_t \overline{y}_k = \mu_1 \Delta \overline{y}_k + \lambda \overline{y}_k = -a \overline{y}_{k-1} \underline{z}_{k-1} + \lambda \overline{y}_{k-1} + g, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t \underline{z}_k = \mu_2 \Delta \underline{z}_k + \lambda \underline{z}_k = -b \overline{y}_{k-1} \underline{z}_{k-1} + \lambda \underline{z}_{k-1} + h, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \overline{y}_k = \partial_n \underline{z}_k = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \overline{y}_k(x, 0) = y_0(x), \underline{z}_k(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

亦可定义  $(\underline{y}_k, \overline{z}_k) \in (C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}))^2$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) 是下列线性方程组的唯一解

$$\begin{cases} \partial_t \underline{y}_k = \mu_1 \Delta \underline{y}_k + \lambda \underline{y}_k = -a \underline{y}_{k-1} \overline{z}_{k-1} + \lambda \underline{y}_{k-1} + g, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t \overline{z}_k = \mu_2 \Delta \overline{z}_k + \lambda \overline{z}_k = -a \underline{y}_{k-1} \overline{z}_{k-1} + \lambda \overline{z}_{k-1} + h, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \underline{y}_k = \partial_n \overline{z}_k = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \underline{y}_k(x, 0) = y_0(x), \overline{z}_k(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

这里  $\lambda$  为一足够大的常数. 根据比较定理, 得递推关系

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{y}_1 \leq \cdots \leq \underline{y}_k \leq \bar{y}_k \leq \cdots \leq \bar{y}_1 = \bar{y}; \\ \underline{z} &= \underline{z}_1 \leq \cdots \leq \underline{z}_k \leq \bar{z}_k \leq \cdots \leq \bar{z}_1 = \bar{z}, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

由此,  $(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$  和  $(\underline{y}_k, \underline{z}_k)$  在  $Q_T$  中点点收敛, 且对于任意的  $p \geq 2$ , 在  $L^p(Q_T)^2$  中分别强收敛于  $(\hat{y}, \hat{z})$  和  $(\check{y}, \check{z})$ . 因此, 利用 Schauder 估计和正则性定理可得出

$$(\hat{y}, \hat{z}), (\check{y}, \check{z}) \in (C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T))^2$$

都是系统 (1.2) 的解. 此外,  $M^* \leq \check{y} \leq \hat{y}$ ,  $M^* \leq \check{z} \leq \hat{z}$ .

利用能量估计方法, 有如下引理.

**引理 2.2** 设  $(y, z) \in (C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T))^2$  为系统 (1.2) 的一个正解, 则

$$\|(y, z)\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))^2} + \|(y, z)\|_{W^{1, 2}([0, T]; L^2(\Omega))^2} \leq \kappa e^{C\kappa},$$

其中  $\kappa = \|(g, h)\|_{L^2(Q)^2} + \|(y_0, z_0)\|_{H^1(\Omega)^2}$ ,  $C$  为正常数.

**定理 2.1 的证明** 构造光滑函数序列  $\{g_n\}_1^\infty, \{h_n\}_1^\infty, \{y_{0n}\}_1^\infty, \{z_{0n}\}_1^\infty$  使  $g_n, h_n$  在  $L^2(Q_T)$  中强收敛于  $g, h$ ,  $y_{0n}, z_{0n}$  在  $H^2(\Omega)$  中强收敛于  $y_0, z_0$ , 并且  $g_n, h_n \geq M_0$ ,  $y_{0n}, z_{0n} \geq m_0$ . 利用引理 2.1 可以得出, 对于任意的  $n$ , 系统 (1.2) 都至少存在一个解

$$(y_n, z_n) \in (C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T))^2$$

使得  $y_n, z_n \geq M^*$ . 再利用引理 2.2 可得到  $(y_n, z_n)$  的一个子列  $(y_{n_k}, z_{n_k})$  在  $L^2(Q_T)$  中强收敛于  $(y^*, z^*)$ , 这是系统 (1.2) 对应于  $g, h, y_0, z_0$  的一组弱解. 此外, 再次利用引理 2.2, 可得出  $(y^*, z^*)$  是系统 (1.2) 的唯一解. 最后, 根据能量估计可以得到解所满足的不等式 (2.1).

### 3 能控性

#### 3.1 在一个控制下线性系统的零能控性

这一节研究具有一个控制的线性系统的零能控性:

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + a_1(x, t)y + a_2(x, t)z + \phi(x, t), & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t z = \Delta z + a_3(x, t)y + a_4(x, t)z + \zeta(x, t) + 1_\omega f, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n y = 0, \partial_n z = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ y(x, 0) = y_0(x), z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $\phi, \zeta, a_i \in L^\infty(Q_T)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . 此外,  $a_2$  满足下列假设

(H3) 在  $\omega$  中存在一个非空子集  $\omega_0 \subseteq \omega$  和正常数  $\sigma$ , 使  $a_2(x, t) \geq \sigma$  或  $a_2(x, t) \leq -\sigma$  a.e.  $(x, t) \in \omega_0 \times (0, T)$ .

考虑线性系统 (3.1) 的伴随系统

$$\begin{cases} -\partial_t p = \Delta p + a_1 p + a_3 q, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ -\partial_t q = \Delta q + a_2 p + a_4 q, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n p = 0, \partial_n q = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ p(x, T) = p^T(x), q(x, T) = q^T(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $p^T, q^T \in L^2(\Omega)$ . 为了得到系统 (3.1) 的零能控性, 我们需要一个全局的 Carleman 不等式和伴随系统 (3.2) 的能观性估计. 令  $\omega' \subset\subset \omega_0$  是  $\Omega$  中的非空子集, 且有函数  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ,

在  $\partial\Omega$  上  $\psi = 0$ , 在  $\overline{\Omega - \omega'}$  上  $\psi > 0$ <sup>[5]</sup>. 对于实数  $\lambda > 0$ , 设

$$\alpha = \frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}, \varphi = \frac{e^{\lambda\psi}}{t(T-t)}.$$

此外, 对于  $z \in C^2(\overline{Q_T})$ , 引入符号

$$I(s, \lambda; z) = \iint_{Q_T} [(s\varphi)^{-1}(|\partial_t z|^2 + |\Delta z|^2) + s\varphi|\nabla z|^2 + s^3\varphi^3 z^2] e^{2s\alpha} dxdt.$$

有如下适合于线性方程组的 Carleman 不等式.

**引理 3.1**<sup>[9]</sup> 设条件 (H3) 成立. 存在仅依赖于  $\Omega, \omega', \omega_0, \|a_i\|_\infty$  的常数  $\lambda_1 > 1$ , 使得对任意的  $\lambda > \lambda_1, s > \gamma(\lambda)(T + T^2)$ , 系统 (3.2) 的解  $(p, q)$  都满足

$$I(s, \lambda; p) + I(s, \lambda; q) \leq C \iint_{\omega' \times (0, T)} q^2 e^{3s\alpha/2} dxdt, \quad (3.3)$$

其中  $\gamma(\lambda) = e^{2\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}$ ,  $C$  是依赖于  $\Omega, \omega_0, \omega'$  的常数.

根据引理 3.1, 有如下能观性估计.

**引理 3.2**<sup>[9]</sup> 设条件 (H3) 成立,  $T > 0$ . 存在常数  $\lambda > 1$  且  $\gamma(\lambda) > 4, s > 0$ , 系统 (3.2) 的解  $(p, q)$  都满足

$$|p(\cdot, 0)|_2^2 + |q(\cdot, 0)|_2^2 \leq C_T \iint_{\omega' \times (0, T)} q^2 e^{3s\alpha/2} dxdt, \quad (3.4)$$

其中常数  $C_T$  形如

$$C_T = \exp \left\{ c_0 \left[ 1 + \frac{1}{T} + T \left( 1 + \sum_{i=1}^4 \|a_i\|_\infty \right) + \left( \sum_{i=1}^4 \|a_i\|_\infty^2 \right)^{1/3} \right] \right\}, \quad (3.5)$$

这里  $c_0$  是依赖于  $\Omega, \omega_0, \omega'$  的正常数.

此外, 需要另一种能观性估计, 根据引理 3.1 和 3.2, 利用文献 [15] 中的方法可以得出

**引理 3.3** 设条件 (H3) 成立, 存在正常数  $K$  和  $s$ , 使系统 (3.2) 的任意解  $(p, q)$  都满足

$$\iint_Q e^{-\frac{K}{T-t}} (p^2 + q^2) dxdt \leq C_T \iint_{\omega_0 \times (0, T)} q^2 e^{3s\alpha/2} dxdt, \quad (3.6)$$

其中  $C_T$  是由 (3.5) 式给定,  $K = 8\gamma^2(\lambda_1)(1 + T)$ ,  $\lambda_1$  和  $\gamma(\lambda_1)$  由引理 3.1 给出.

**定理 3.1** 设条件 (H3) 成立, 如果存在正常数  $K$ , 使得非齐次项  $\phi, \zeta$  满足

$$v = \iint_Q e^{-\frac{K}{T-t}} (\phi^2 + \zeta^2) dxdt < +\infty, \quad (3.7)$$

则称系统 (3.1) 是零能控的, 即存在控制  $f \in L^\infty(Q_T)$  使得对于任意的  $(y_0, z_0) \in L^2(\Omega)^2$ , 系统 (3.1) 的解  $(y, z) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)))^2$  都满足  $y(x, T) = z(x, T) = 0$  a.e.  $x \in \Omega$ . 此外, 控制函数满足如下估计

$$\|1_{\omega_0} f\|_\infty \leq C_T \left( \|(y_0, z_0)\|_{L^2(\Omega)^2} + v^{1/2} \right), \quad (3.8)$$

其中  $C_T$  是由 (3.5) 式给定.

**证** 设  $s$  和  $\lambda$  使不等式 (3.4) 和 (3.6) 中成立. 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 考虑如下最优控制问题:

$$(P) \text{ Minimize } \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\omega_0 \times (0, T)} f^2 e^{-3s\alpha/2} dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \|(y, z)(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right\},$$

其中  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $(y, z)$  是系统 (3.1) 的解. 可以验证问题 (P) 的最优解  $(f_\varepsilon, (y_\varepsilon, z_\varepsilon))$  的存在性, 利用 Pontryagin 极大值原理<sup>[3]</sup>,  $f_\varepsilon = q_\varepsilon e^{3s\alpha/2} 1_{\omega_0}$ , 其中  $(p_\varepsilon, q_\varepsilon)$  是伴随系统 (3.2) 的解,

$$p_\varepsilon(x, T) = -\frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x, T), 1_\varepsilon(x, T) = -\frac{1}{\varepsilon} z_\varepsilon(x, T), x \in \Omega.$$

$(y_\varepsilon, z_\varepsilon)$  是系统 (3.1) 相应于  $f = f_\varepsilon$  的解. 根据线性系统 (3.1), 伴随系统 (3.2), 引理 3.2 和 3.3, 可以得出

$$\iint_{\omega_0 \times (0, T)} q_\varepsilon^2 e^{3s\alpha/2} dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \|(y_\varepsilon, z_\varepsilon)(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq C_T \left( \|(y_0, z_0)\|_{L^2(\Omega)^2} + v^{1/2} \right)^2, \quad (3.9)$$

其中  $C_T$  和  $v$  由 (3.5) 和 (3.7) 式给出. 利用 (3.9) 式和引理 3.3, 可知控制  $f_\varepsilon$  满足 (3.8) 式. 由此, 存在子列  $f_{\varepsilon_k}$ , 使得  $f_{\varepsilon_k}$  在  $L^\infty(Q_T)$  中弱 \* 收敛于  $f$ , 根据线性抛物型方程的线性性, 可以验证系统 (3.1) 的解  $(y_{\varepsilon_k}, z_{\varepsilon_k})$  对应于  $f_{\varepsilon_k}$  收敛到系统 (3.1) 的解  $(y, z)$ . 最后, 利用 (3.9) 式, 可得在  $\Omega$  中几乎处处都有  $y(x, T) = 0, z(x, T) = 0$ .

**注 3.1** 定理 3.1 的结论应用到两个特殊情形: (i)  $\phi = 0, \zeta = 0$ ; (ii) 对某些  $\varepsilon > 0$ , 在  $(x, t) \in \Omega \times (0, T - \varepsilon)$  中,  $\phi, \zeta$  满足  $\phi(x, t) = 0, \zeta(x, t) = 0$ .

### 3.2 反应扩散系统的局部精确能控性

本节运用 Kakutani 不动点定理<sup>[3]</sup> 证明非线性系统 (1.1) 的局部精确能控性.

**定理 3.2** 设  $(y^*, z^*)$  为系统 (1.2) 对应于  $(y_0^*, z_0^*)$  的一个正解, 且满足 (1.3) 式. 令  $M < M^*$ . 则存在不依赖于  $T$  的常数  $c_1$  使得对于任意的  $(y_0, z_0) \in H^2(\Omega)^2$ , 只要满足

$$0 < \|(y_0 - y_0^*, z_0 - z_0^*)\|_{H^2(\Omega)^2} \leq e^{-c_1(1+T+1/T)} \min\{\rho, M\}, \quad (3.10)$$

就有控制  $f \in \mathcal{U}_\rho$  使得系统 (3.11) 有唯一正解

$$(y, z) \in (L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T]; H^1(\Omega)))^2$$

满足于 (1.4) 式.

**证** 设  $Y = y - y^*, Z = z - z^*, Y_0 = y_0 - y_0^*, Z_0 = z_0 - z_0^*$ , 则  $(Y, Z)$  满足如下方程组

$$\begin{cases} \partial_t Y = \mu_1 \Delta Y - a(Z + z^*)Y - ay^*Z, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t Z = \mu_2 \Delta Z - bz^*Y - b(Y + y^*)Z + 1_\omega f, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n Y = 0, \partial_n Z = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ Y(x, 0) = Y_0(x), Z(x, 0) = Z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

只须证明系统 (3.11) 的局部零能控即可. 为此, 将该方程组线性化, 即得

$$\begin{cases} \partial_t Y = \mu_1 \Delta Y - a(\eta + z^*)Y - ay^*Z, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t Z = \mu_2 \Delta Z - bz^*Y - b(\xi + y^*)Z + 1_\omega f, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n Y = 0, \partial_n Z = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ Y(x, 0) = Y_0(x), Z(x, 0) = Z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.12)$$

其中  $(\xi, \eta) \in K$ . 这里  $K = \{(\xi, \eta); \|\xi\|_\infty \leq M, \|\eta\|_\infty \leq M\} \subset L^2(Q_T)^2$ ,  $M < M^*$ . 根据线性方程组 (3.12) 和定理 3.1, 可以定义多值映射  $\Phi: K \subset L^2(Q_T)^2 \rightarrow 2L^2(Q_T)^2$ ;  $(\xi, \eta) \rightarrow \Phi(\xi, \eta)$ , 其中  $(Y, Z) \in \Phi(\xi, \eta)$  表示线性系统 (3.12) 相应于控制  $f$  的解, 其满足  $Y(x, T) = 0, Z(x, T) =$

0 a.e.  $x \in \Omega$ , 且控制函数  $f \in L^\infty(Q_T)$  满足估计

$$\|1_\omega f\|_\infty \leq e^{c_0^1(1+T+\frac{1}{T})} \|(Y_0, Z_0)\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.13)$$

根据 (3.13) 式和线性抛物型方程的能量估计, 有

$$\|(Y, Z)\|_{(L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega)))^2} \leq e^{c_0^2(1+T+\frac{1}{T})} \|(Y_0, Z_0)\|_{H^2(\Omega)^2}. \quad (3.14)$$

可以验证存在常数  $c_1 \leq \min\{c_0^1, c_0^2\}$ , 使得只要初始值  $(y_0, z_0)$  满足不等式 (3.10), 则多值映射满足 Kakutani 不动点定理<sup>[3]</sup> 的条件, 从而至少存在一个不动点  $(Y, Z) \in \Phi(Y, Z)$ . 该不动点  $(Y, Z)$  为非线性系统 (3.11) 的解, 其满足  $Y(x, T) = 0, Z(x, T) = 0$  a.e.  $x \in \Omega$ . 从而,  $y(x, T) = y^*(x, T), z(x, T) = z^*(x, T)$ . 由于  $\|Y\|_\infty \leq M$ , 因此  $y(x, t) = y^*(x, t) + Y(x, t) \geq M^* - M > 0$  a.e.  $(x, t) \in Q_T$ . 同理, 有  $z(x, t) > 0$  a.e.  $(x, t) \in Q_T$ . 此外, 控制函数  $f \in L^\infty(Q_T) \cap \mathcal{U}_\rho$ .

**注 3.2** 定理 3.2 表明系统 (1.1) 可以在带有约束条件的控制作用下的局部精确能控. 事实上, 当控制没有约束时, 局部精确能控性对正轨道  $(y^*, z^*)$  也是有效的. 亦即, 对任意满足

$$0 < \|(y_0 - y_0^*, z_0 - z_0^*)\|_{H^2(\Omega)^2} \leq e^{-c_1(1+T+1/T)} M$$

的  $(y_0, z_0) \in H^2(\Omega)^2$  都存在控制  $f \in L^\infty(Q_T)$  使得在  $T$  时刻, 系统 (1.1) 的轨迹  $(y, z)$  在  $T$  时刻能达到目标轨迹  $(y^*, z^*)(\cdot, T)$ .

设  $\omega_1$  和  $\omega_2$  为  $\Omega$  中的开集, 至少有一个非空. 考虑如下控制系统

$$\begin{cases} \partial_t y = \mu_1 \Delta y - ayz + g + 1_{\omega_1} f_1, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t z = \mu_2 \Delta z - byz + h + 1_{\omega_2} f_2, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n y = 0, \partial_n z = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ y(x, 0) = y_0(x), z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.15)$$

**推论 3.1** 设  $(y^*, z^*)$  和常数  $c_1$  由定理 3.2 给出, 如果  $(y_0, z_0) \in H^2(\Omega)^2$  满足 (3.10) 式, 则存在控制  $f_1, f_2 \in \mathcal{U}_\rho$  使得系统 (3.15) 有唯一正解  $(y, z)$  并满足  $y(x, T) = y^*(x, T), z(x, T) = z^*(x, T)$  a.e.  $(x, t) \in Q_T$ .

**证** 不妨设  $\omega_2$  非空. 取  $f_1 = 0$ , 则只需根据定理 3.2 和引理 2.2 即可证明.

## 4 时间最优控制的存在性

**定理 4.1** 设  $(y^*, z^*)$  和常数  $c_1$  由定理 3.2 给出, 对于任意的  $(y_0, z_0) \in H^2(\Omega)^2$ , 若其满足

$$\|y_0 - y_0^*\|_{H^2(\Omega)} + \|z_0 - z_0^*\|_{H^2(\Omega)} \leq e^{-3c_1} \min\{\rho, M\}, \quad (4.1)$$

则时间最优控制问题 (TP) 至少存在一个时间最优控制.

**证** 如果  $y_0 = y_0^*, z_0 = z_0^*$ , 可取控制  $f = 0$ , 则当  $T = 0$  时, 系统精确能控, 从而最小时间为  $T = 0$ . 设  $c_1$  是定理 3.2 中的常数. 当  $T = 1$  时,  $e^{-c_1(1+T+1/T)}$  取得最大值  $e^{-3c_1}$ . 而根据定理 3.2, 对于满足不等式 (4.1) 的初始值  $(y_0, z_0)$ , 存在控制  $\bar{f} \in \mathcal{U}_\rho$ , 使系统 (1.1) 的相应的解  $(y_1, z_1)$  在时刻  $T = 1$  处满足  $(y_1, z_1)(\cdot, 1) = (y^*, z^*)(\cdot, 1)$ . 这表明集合  $\mathfrak{S}$  非空. 令  $T^* = \inf \mathfrak{S}$ . 我们在  $\mathfrak{S}$  中取一列不增的序列  $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ , 使其满足当  $n \rightarrow \infty$  时,  $T_n \rightarrow T^*$ . 对每个  $n$ , 根据定理 3.2, 存在控制函数  $f_n \in \mathcal{U}_\rho$ , 使系统 (1.1) 对应的解  $(y_n, z_n)$  满足

$$(y_n, z_n) \in (L^2(0, T_n; H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T_n]; L^2(\Omega)))^2, \quad y_n \geq 0, z_n \geq 0$$

和

$$(y_n, z_n)(\cdot, T_n) = (y^*, z^*)(\cdot, T_n).$$

取  $T \geq T_1$ , 作辅助函数  $\bar{y}_n$  如下:  $\bar{y}_n = y_n$ , 当  $(x, t) \in \Omega \times (0, T_n]$  时;  $\bar{y}_n = y^*$ , 当  $(x, t) \in \Omega \times (T_n, T)$  时. 类似定义  $\bar{z}_n$ . 再做辅助函数  $\bar{f}_n$  如下:  $\bar{f}_n = f_n$ , 当  $(x, t) \in \Omega \times (0, T_n]$  时;  $\bar{f}_n = 0$ , 当  $(x, t) \in \Omega \times (T_n, T)$  时. 于是  $(\bar{y}_n, \bar{z}_n) \in (L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T]; L^2(\Omega)))^2$  为下列方程组的解:

$$\begin{cases} \partial_t \bar{y}_n = \mu_1 \Delta \bar{y}_n - a \bar{y}_n \bar{z}_n + g, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_t \bar{z}_n = \mu_2 \Delta \bar{z}_n - b \bar{y}_n \bar{z}_n + h + \chi_{\omega_2} \bar{f}_n, & \text{在 } Q_T \text{ 中,} \\ \partial_n \bar{y}_n = 0, \partial_n \bar{z}_n = 0, & \text{在 } \Sigma_T \text{ 上,} \\ \bar{y}_n(x, 0) = y_0(x), \bar{z}_n(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

对于所有的  $n$ , 控制函数一致有界, 即  $\|\bar{f}_n\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \rho$ , 因此有

$$\|g\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|h\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\bar{f}_n\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \kappa,$$

其中  $\kappa$  为与时间  $T$  无关的常数. 根据定理 2.1 中的不等式, 可以得到如下估计

$$|\nabla \bar{y}_n(\cdot, t)|_2^2 + |\nabla \bar{z}_n(\cdot, t)|_2^2 + \int_0^t [|\Delta \bar{y}_n|_2^2 + |\Delta \bar{z}_n|_2^2] ds + \int_0^t [|\partial_t \bar{y}_n|_2^2 + |\partial_t \bar{z}_n|_2^2] ds \leq e^{C\kappa},$$

即表明序列  $\{\bar{y}_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{z}_n\}_{n=1}^\infty$  在  $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T]; L^2(\Omega))$  中一致有界, 从而存在子列  $\{\bar{y}_k\}_{k=1}^\infty, \{\bar{z}_k\}_{k=1}^\infty$  使得当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\bar{y}_k$  和  $\bar{z}_k$  在  $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T]; L^2(\Omega))$  中分别弱收敛于  $y^{**}$  和  $z^{**}$ , 根据 Aubin-Lions 引理和 Ascoli-Arzelà 引理<sup>[3]</sup>,  $\bar{y}_k$  和  $\bar{z}_k$  在  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  中分别强收敛于  $y^{**}$  和  $z^{**}$ . 因为  $\|\bar{f}_n\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \rho$ , 所以存在子列  $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty$  使得当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\bar{f}_k$  在  $L^\infty(Q_T)$  中弱\*收敛于  $f^{**} \in \mathcal{U}_\rho$ . 结合上面的收敛结果, 在方程 (3.12) ( $n = k$ ) 中取  $k \rightarrow \infty$  的极限, 则可以推断  $(y^{**}, z^{**})$  为方程 (1.1) 的弱解. 最后, 因为

$$\begin{aligned} |y^{**}(\cdot, T^*) - y^*(\cdot, T^*)|_2 &\leq |y^{**}(\cdot, T^*) - y^{**}(\cdot, T_n)|_2 + |y^{**}(\cdot, T_n) - y^*(\cdot, T_n)|_2 \\ &+ |y^*(\cdot, T_n) - y^*(\cdot, T^*)|_2 \leq C|T_n - T^*| + |y^{**}(\cdot, T_n) - y^*(\cdot, T_n)|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

所以  $y^{**}(\cdot, T^*) = y^*(\cdot, T^*)$ , 这表明存在控制  $f^{**} \in \mathcal{U}_\rho$ , 使得方程 (1.1) 在时刻  $T^*$  处达到目标状态  $y^*(\cdot, T^*)$ . 同理可以验证  $z^{**}(\cdot, T^*) = z^*(\cdot, T^*)$ . 因此证明了时间最优控制的存在性.

## 参 考 文 献

- [1] Pao C V, Ruan W H. Positive solutions of quasilinear parabolic systems with nonlinear boundary conditions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 333(1): 472-499.
- [2] Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [3] Barbu V. Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems[M]. Boston: Academic Press, 1993.
- [4] Fattorini H O. Infinite dimensional linear control systems: the time optimal and norm optimal problems[M]. Holland: Elsevier, 2005.
- [5] Emanuilov O Y. Boundary controllability of parabolic equations[J]. Russian Math. Surv., 1993, 48(3): 192-194.
- [6] Barbu V. Controllability of parabolic and Navier-Stokes equations[J]. Sci. Math. Japonicae, 2002, 56(1): 143-211.

- [7] Anita S, Barbu V. Local exact controllability of a reaction-diffusion system[J]. *Diff. Integ. Equ.*, 2001, 14(5): 577–587.
- [8] Khodja F A, Benabdallah A, Dupaix C. Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force[J]. *Siam J. Contr. Optim.*, 2010, 42(42): 1661–1680.
- [9] Wang Gengsheng, Zhang Liang. Exact local controllability of a one-control reaction-diffusion system[J]. *J. Optim. The. Appl.*, 2006, 131(3): 453–467.
- [10] Wang Lijuan, Wang Gengsheng. The optimal time control of a phase-field system[J]. *Siam J. Contr. Optim.*, 2006,42(4): 1483–1508.
- [11] Apraiz J, Escauriaza L, Wang Gengsheng. Observability inequalities and measurable sets[J]. *J. Euro. Math. Soc.*, 2014, 16(11): 2433–2475.
- [12] Phung K D, Wang Gengsheng. An observability estimate for parabolic equations from a measurable set in time and its applications[J]. *J. Euro. Math. Soc.*, 2013, 2(2): 681–703.
- [13] Wang Gengsheng, Zhang Can. Observability estimate from measurable sets in time for some evolution equations[J]. *Siam J. Contr. Optim.*, 2017, 53(3): 1862–1886.
- [14] Zhang Can. The time optimal control with constraints of the rectangular type for linear time-varying odes[J]. *Siam J. Contr. Optim.*, 2013, 51(51): 1528–1542.
- [15] Zhang Liang, He Lang. Null controllability of semilinear parabolic equation with nonlinear terms involving a maximal monotone graph[J]. *Adv. Math.*, 2011, 40(1): 11–22.

## POSITIVE SOLUTIONS AND TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR A COMPETITIVE REACTION-DIFFUSION EQUATION

LIU Yuan-kai, ZHANG Liang

*(Department of Mathematics, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)*

**Abstract:** This work is concerned with the time optimal control problem of a competitive reaction-diffusion. By the method of upper and lower solutions, we get the existence of positive solutions, which is set as the positive trajectory in establishing the local exact controllability by Kakutani's fixed point theorem. Upon this result, the existence of time optimal control for the reaction-diffusion is proved.

**Keywords:** positive solution; controllability; time optimal control; reaction-diffusion equation

**2010 MR Subject Classification:** 93B05; 93C20