

最大度为 6 的图 G 的邻点可区别边色数的一个上界

吴燕青

(山西师范大学数学与计算机科学学院, 山西 临汾 041000)

摘要: 本文研究了最大度为 6 的图 G 的邻点可区别边着色问题. 利用反证法, 得到了最大度为 6 的非半正则图 G 的邻点可区别边色数的一个上界.

关键词: 最大度; 邻点可区别边着色; 邻点可区别边色数

MR(2010) 主题分类号: 05C15

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)01-0042-11

1 引言

本文主要考虑不含孤立边的有限简单图. 对图 G , 用 $V(G)$, $E(G)$, $\Delta(G)$ 和 $\text{mad}(G)$ 分别表示图 G 的顶点集, 边集, 最大度和最大平均度. 在 G 中, 用 $N_G(v)$ 表示顶点 v 的邻集. 度为 k 的顶点称为 k -顶点. 度至少为 (至多为) k 的顶点称为 k^+ -顶点 (k^- -顶点). 用 $d_i(v)$ 表示与顶点 v 相邻的 i -顶点的数目. 一个图 G 称为半正则的, 如果它的每一条边至少和一个最大度顶点相关联. 否则, 称为非半正则的. 一个图 G 的正常边着色是一个映射 $\phi: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, 使得每一对相邻边 e_1 和 e_2 , 有 $\phi(e_1) \neq \phi(e_2)$. 用 $c_\phi(v)$ 表示在着色 ϕ 下与 v 相关联的边所着的颜色组成的集合. 一个图 G 的正常边着色 ϕ 称为邻点可区别边着色, 如果 G 的任何相邻顶点 u 和 v , 满足 $c_\phi(u) \neq c_\phi(v)$. G 的邻点可区别边色数 $\chi'_a(G)$ 是使得 G 有一个 k -邻点可区别边着色的最少颜色数 k .

在 2002 年, 文献 [1] 首先讨论了邻点可区别边着色问题, 并提出了以下猜想.

猜想 设图 G 为顶点数至少为 3 的连通图且 $G \neq G_5$, 则 $\chi'_a(G) \leq \Delta + 2$.

对于一般图 G , 文献 [2] 给出了若 $\Delta(G) > 10^{20}$, 则 $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 300$. 文献 [3] 给出了 $\chi'_a(G) \leq 3\Delta(G)$. 文献 [4] 给出了 $\chi'_a(G) \leq 2.5\Delta(G) + 5$. 文献 [5] 给出了若 $\Delta(G) \leq 3$, 则 $\chi'_a(G) \leq 5$. 文献 [6] 给出了若 $\Delta(G) \leq 5$ 且 $\text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$, 则 $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 1$. 文献 [7] 给出了若 $\Delta(G) \leq 4$, 则 $\chi'_a(G) \leq 8$, 和若 $\Delta(G) \leq 5$, 则 $\chi'_a(G) \leq 10$. 本文证明了若 G 是一个最大度为 6 的非半正则图, 则 $\chi'_a(G) \leq 12$.

引理 1.1 [7] 假设 G 是一个 $\Delta(G) \geq 2$ 的半正则图. 若 $\Delta(G) \equiv 0 \pmod{3}$, 则 $\chi'_a(G) \leq \frac{5}{3}\Delta(G) + 3$.

2 主要结果

定理 2.1 设 G 是一个最大度为 6 的非半正则图, 则 $\chi'_a(G) \leq 12$.

证 假设 G 是含边数最少的连通的极小反例. 由于 G 是非半正则的, 所以存在 $uv \in E(G)$, 使得 $d_G(u) \leq 5$ 且 $d_G(v) \leq 5$. 不妨设 $d_H(u) \leq d_H(v)$. 设 $H = G - uv$, 由

*收稿日期: 2017-06-26

接收日期: 2017-10-18

作者简介: 吴燕青 (1982-), 男, 山西大同, 讲师, 主要研究方向: 图论及其应用.

G 的极小性可知, H 有一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ , 它用的颜色集 $C = \{1, 2, \dots, 12\}$. 为了叙述起来方便, 称在 ϕ 下边 e 对颜色 α 是允许的, 若在 ϕ 下用颜色 α 给边 e 重新着色可得 H 的一个新的 12 - 邻点可区别边着色. 用 $L(e)$ 表示在 ϕ 下由边 e 的所有允许的颜色组成的集. 设 $xy \in E(H)$, 且 $d_G(x) = d_G(y)$. 若颜色 $\beta \in c_\phi(y) \setminus c_\phi(x)$, 且 $|c_\phi(y) \cap c_\phi(x)| = d_H(x) = d_H(y) - 1$, 则称在 ϕ 下颜色 β 为顶点 x 的不法颜色. 用 A_x 表示在 ϕ 下顶点 x 的所有不法颜色组成的集. 设 $\Omega_z(x) = \{c_\phi(y) | y \in N_H(x) \setminus \{z\}\}$ (或 $\Omega(x) = \{c_\phi(y) | y \in N_H(x)\}$). 由 uv 的选择可知 $d_H(u) + d_H(v) \leq 6$.

情形 1 假设 $d_H(u) + d_H(v) \leq 6$.

情形 1.1 假设 $d_H(u) = 0$. 由 uv 的选择和 G 的假设可知 $1 \leq d_H(v) \leq 4$. 显然, 存在 $p \in C \setminus c_\phi(v)$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 1.2 假设 $d_H(u) = 1$ 且 $u' \in N_H(u)$. 由 uv 的选择可知 $1 \leq d_H(v) \leq 4$.

假设 $d_H(v) = 1$ 且 $v' \in N_H(v)$. 若 $\phi(vv') \neq \phi(uu')$, 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $\phi(vv') = \phi(uu')$. 由于 $|L(vv')| \geq 1$, 所以存在 $q \in L(vv')$. 现用 q 给 vv' 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $\phi'(vv') \neq \phi'(uu')$, 正如前面已讨论, 矛盾.

假设 $2 \leq d_H(v) \leq 4$. 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 1.3 假设 $d_H(u) = 2$ 且 $u_j \in N_H(u)$, 其中 $j = 1, 2$. 由 uv 的选择可知 $2 \leq d_H(v) \leq 4$.

假设 $d_H(v) = 2$ 且 $v_j \in N_H(v)$, 其中 $j = 1, 2$. 若 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| \leq 1$, 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 2$. 不妨设 $\phi(vv_1) = 1$ 和 $\phi(vv_2) = 2$. 在 H 中, 若 v 的邻点有一个 5^- - 顶点, 不妨设 $d_H(v_1) \leq 5$. 由于 $|L(vv_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(vv_1)$. 现用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 1$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, v_1 和 v_2 均是 6 - 顶点. 设 $v_{1j} \in N_H(v_1)$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, 5$. 若 $2 \in c_\phi(v_1)$, 因而 $|L(vv_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(vv_1)$. 现用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 1$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, $2 \notin c_\phi(v_1)$. 不妨设 $\phi(v_1v_{1j}) = j + 2$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, 5$. 若存在 $q \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(v_1)\}$, 用 q 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 1$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_\phi(v_{11}) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $c_\phi(v_{12}) = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $c_\phi(v_{13}) = \{3, 4, 5, 6, 7, 10\}$, $c_\phi(v_{14}) = \{3, 4, 5, 6, 7, 11\}$ 和 $c_\phi(v_{15}) = \{3, 4, 5, 6, 7, 12\}$. 若存在 $r \in \{1, 2\}$, 使得 $\{r, 4, 5, 6, 7, 8\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$, 那么用 r 和 3 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 1$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{1, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{11})$. 由于 $|\Omega_{v_1}(v_{11})| = 5$, 所以存在 $s \in \{9, 10, 11, 12\}$, 使得 $\{s, 4, 5, 6, 7, 8\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$. 现用 s 和 $t \in \{9, 10, 11, 12\} \setminus \{s\}$, 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 1$, 正如前面已讨论, 矛盾.

假设 $3 \leq d_H(v) \leq 4$. 由前面的讨论可知, u_j 均是 4^+ - 顶点, 其中 $j = 1, 2$. 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 1.4 假设 $d_H(u) = 3$. 因而 $d_H(v) = 3$. 设 $v_j \in N_H(v)$, 其中 $j = 1, 2, 3$.

假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 0$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个

12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$, 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 由于 $|L(vv_1)| \geq 5$, 所以存在 $q \in L(vv_1) \setminus \{c_\phi(v_2) \cup c_\phi(v_3)\}$. 现用 q 给 vv_1 重新着色, 用 $\phi(vv_1)$ 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $1 \leq |c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| \leq 2$. 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 3$. 不妨设 $\phi(vv_j) = j$, 其中 $j = 1, 2, 3$.

在 H 中, 假设 v 的邻点中有一个 5^- - 顶点. 不妨设 $d(v_1) \leq 5$. 由情形 1.3 可知, v_2 和 v_3 均不是 3 - 顶点. 显然, $|L(vv_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(vv_1)$, 用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾.

在 H 中, 假设 v 的邻点均是 6 - 顶点. 设 $v_{1j} \in N_H(v_1)$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

假设 $|\{2, 3\} \cap c_\phi(v_1)| = 0$. 不妨设 $\phi(v_1v_{1j}) = j + 3$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, 5$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(v_1)\}$, 用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_\phi(v_{11}) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $c_\phi(v_{12}) = \{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, $c_\phi(v_{13}) = \{4, 5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c_\phi(v_{14}) = \{4, 5, 6, 7, 8, 12\}$. 若存在 $q \in \{1, 2, 3\}$, 使得 $\{q, 5, 6, 7, 8, 9\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$, 那么先用 q 给 v_1v_{11} 重新着色. 进一步, 若用 4 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_{15}) = \{q, 4, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 10 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ'' . 从而 $|c_{\phi''}(u) \cap c_{\phi''}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{11})$. 由于 $|\Omega_{v_1}(v_{11})| = 5$, 所以存在 $r \in \{10, 11, 12\}$, 使得 $\{r, 5, 6, 7, 8, 9\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$. 若用 r 和 $s \in \{10, 11, 12\} \setminus \{r\}$ 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_5) = \{r, s, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 r 和 $t \in \{10, 11, 12\} \setminus \{r, s\}$ 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ'' . 从而 $|c_{\phi''}(u) \cap c_{\phi''}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾.

假设 $|\{2, 3\} \cap c_\phi(v_1)| = 1$. 不妨设 $\phi(v_1v_{11}) = 2$, $\phi(v_1v_{1j}) = j + 2$, 其中 $j = 2, 3, 4, 5$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(v_1)\}$, 用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_\phi(v_{11}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $c_\phi(v_{12}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $c_\phi(v_{13}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 10\}$, $c_\phi(v_{14}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 11\}$ 和 $c_\phi(v_{15}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 12\}$. 若存在 $q \in \{1, 3\}$, 使得 $\{q, 2, 5, 6, 7, 9\} \notin \Omega_{v_1}(v_{12})$, 那么用 q 和 4 分别给 v_1v_{12} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{1, 2, 5, 6, 7, 9\}, \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{12})$. 由于 $|\Omega_{v_1}(v_{12})| = 5$, 所以存在 $r \in \{8, 10, 11, 12\}$, 使得 $\{r, 2, 5, 6, 7, 9\} \notin \Omega_{v_1}(v_{12})$. 现用 r 和 $s \in \{8, 10, 11, 12\} \setminus \{r\}$ 分别给 v_1v_{12} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾.

假设 $|\{2, 3\} \cap c_\phi(v_1)| = 2$. 由于 $|L(vv_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(vv_1)$. 现用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 2$, 正如前面已讨论, 矛盾.

情形 2 假设 $d_H(u) + d_H(v) = 7$. 由 uv 的选择可知 $d_H(u) = 3$ 且 $d_H(v) = 4$. 设 $u_j \in N_H(u)$, 其中 $j = 1, 2, 3$. 由情形 1 可知, u_j 均为 5^+ - 顶点, 其中 $j = 1, 2, 3$. 因此存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(u) \cup c_\phi(v)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3 假设 $d_H(u) + d_H(v) = 8$. 由 uv 的选择可知 $d_H(u) = 4$ 且 $d_H(v) = 4$. 设 $v_i \in N_H(v)$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$. 在 ϕ 下, 不妨设 $\phi(vv_i) = i$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$. 设 $u_j \in N_H(u)$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$. 由情形 1 和 2 可知, 在 H 中, 与 u 相邻的顶点和与 v 相邻的顶点均是 5^+ -顶点.

情形 3.1 假设 $d_H(u_j) = 6$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$.

情形 3.1.1 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 0$. 设 $\phi(uu_j) = j + 4$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(u) \cup c_\phi(v)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12-邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{9, 10, 11, 12\}$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 8\}$, 使得 $\{q, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$, 那么用 q 给 vv_1 重新着色, 用 1 给 uv 着色可得 G 的一个 12-邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_1) = \{\{2, 3, 4, 5, 9\}, \{2, 3, 4, 6, 9\}, \{2, 3, 4, 7, 9\}, \{2, 3, 4, 8, 9\}\}$. 现用 10 给 vv_1 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12-邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.1.2 假设 $1 \leq |c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| \leq 3$. 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(u) \cup c_\phi(v)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12-邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.1.3 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 4$.

在 H 中, 假设 $d_6(v) = 4$. 因此 $d(v_i) = 6$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$. 设 $v_{1j} \in N_H(v_1) \setminus \{v\}$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

假设 $|\{2, 3, 4\} \cap c_\phi(v_1)| = 0$. 不妨设 $\phi(v_1v_{1j}) = j + 4$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4, 5$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(v_1)\}$, 用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_\phi(v_{11}) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $c_\phi(v_{12}) = \{5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ 和 $c_\phi(v_{13}) = \{5, 6, 7, 8, 9, 12\}$. 若存在 $q \in \{1, 2, 3, 4\}$, 使得 $\{q, 6, 7, 8, 9, 10\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$, 那么先用 q 给 v_1v_{11} 重新着色. 进一步, 若用 5 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_{14}) = \{q, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 或 $c_\phi(v_{15}) = \{q, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 不妨设 $c_\phi(v_{14}) = \{q, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 若用 11 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ'' , 从而 $|c_{\phi''}(u) \cap c_{\phi''}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_{15}) = \{q, 6, 7, 8, 9, 11\}$. 现用 12 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ''' . 从而 $|c_{\phi'''}(u) \cap c_{\phi'''}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{2, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{3, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{11})$. 类似的, $\{\{1, 5, 7, 8, 9, 11\}, \{2, 5, 7, 8, 9, 11\}, \{3, 5, 7, 8, 9, 11\}, \{4, 5, 7, 8, 9, 11\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{12})$. 由于 $|\Omega_{v_1}(v_{1j})| = 5$, 其中 $j = 1, 2$, 所以存在 $r \in \{11, 12\}$, 不妨设 $r = 11$, 使得 $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$, 存在 $s \in \{10, 12\}$, 使得 $\{s, 5, 7, 8, 9, 11\} \notin \Omega_{v_1}(v_{12})$. 若用 11 和 12 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_{14}) = \{6, 7, 8, 9, 11, 12\}$, 或 $c_\phi(v_{15}) = \{6, 7, 8, 9, 11, 12\}$. 不妨设 $c_\phi(v_{14}) = \{6, 7, 8, 9, 11, 12\}$. 若用 s 和 $t \in \{10, 12\} \setminus \{s\}$ 分别给 v_1v_{12} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ'' , 从而 $|c_{\phi''}(u) \cap c_{\phi''}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_{15}) = \{5, 7, 8, 9, 10, 12\}$. 现用 11, s 和 t 分别给 v_1v_{11} , v_1v_{12} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色 ϕ''' . 从而 $|c_{\phi'''}(u) \cap c_{\phi'''}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾.

假设 $|\{2, 3, 4\} \cap c_\phi(v_1)| = 1$. 不妨设 $\phi(v_1v_{11}) = 2$ 和 $\phi(v_1v_{1j}) = j + 3$, 其中 $j = 2, 3, 4, 5$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(v_1)\}$, 用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12-邻点可区别边着色

ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_{\phi}(v_{11}) = \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $c_{\phi}(v_{12}) = \{2, 5, 6, 7, 8, 10\}$, $c_{\phi}(v_{13}) = \{2, 5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c_{\phi}(v_{14}) = \{2, 5, 6, 7, 8, 12\}$. 若存在 $q \in \{1, 3, 4\}$, 使得 $\{q, 2, 6, 7, 8, 10\} \notin \Omega_{v_1}(v_{12})$, 那么先用 q 给 v_1v_{12} 重新着色. 进一步, 若用 5 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $c_{\phi}(v_{15}) = \{q, 2, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 11 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ'' . 从而 $|c_{\phi''}(u) \cap c_{\phi''}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{1, 2, 6, 7, 8, 10\}, \{2, 3, 6, 7, 8, 10\}, \{2, 4, 6, 7, 8, 10\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{12})$. 由于 $|\Omega_{v_1}(v_{12})| = 5$, 所以存在 $r \in \{9, 11, 12\}$, 使得 $\{r, 2, 6, 7, 8, 10\} \notin \Omega_{v_1}(v_{12})$, 那么先用 r 给 v_1v_{12} 重新着色. 进一步, 若用 $s \in \{9, 11, 12\} \setminus \{r\}$ 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $c_{\phi}(v_{15}) = \{r, s, 2, 6, 7, 8\}$. 现用 $t \in \{9, 11, 12\} \setminus \{r, s\}$ 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ'' . 从而 $|c_{\phi''}(u) \cap c_{\phi''}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾.

假设 $|\{2, 3, 4\} \cap c_{\phi}(v_1)| = 2$. 不妨设 $\phi(v_1v_{11}) = 2$, $\phi(v_1v_{12}) = 3$ 和 $\phi(v_1v_{1j}) = j + 2$, 其中 $j = 3, 4, 5$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_{\phi}(v) \cup c_{\phi}(v_1)\}$, 用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_{\phi}(v_{11}) = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $c_{\phi}(v_{12}) = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $c_{\phi}(v_{13}) = \{2, 3, 5, 6, 7, 10\}$, $c_{\phi}(v_{14}) = \{2, 3, 5, 6, 7, 11\}$ 和 $c_{\phi}(v_{15}) = \{2, 3, 5, 6, 7, 12\}$. 若存在 $q \in \{1, 4\}$, 使得 $\{q, 2, 3, 6, 7, 10\} \notin \Omega_{v_1}(v_{13})$, 那么用 q 和 5 分别给 v_1v_{13} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{1, 2, 3, 6, 7, 10\}, \{2, 3, 4, 6, 7, 10\}\} \subseteq \Omega_{v_1}(v_{13})$. 由于 $|\Omega_{v_1}(v_{13})| = 5$, 所以存在 $r \in \{8, 9, 11, 12\}$, 使得 $\{r, 2, 3, 6, 7, 10\} \notin \Omega_{v_1}(v_{13})$. 现用 r 和 $s \in \{8, 9, 11, 12\} \setminus \{r\}$ 分别给 v_1v_{13} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾.

假设 $|\{2, 3, 4\} \cap c_{\phi}(v_1)| = 3$. 由于 $|L(vv_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(vv_1)$. 现用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾.

在 H 中, 假设 $d_6(v) \leq 3$. 不妨设 $d(v_1) = 5$. 若 $|\{2, 3, 4\} \cap c_{\phi}(v_1)| \geq 1$, 因而 $|L(vv_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(vv_1)$. 现用 p 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, $|\{2, 3, 4\} \cap c_{\phi}(v_1)| = 0$. 不妨设 $\phi(v_1v_{1j}) = j + 4$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$. 若存在 $q \in C \setminus \{c_{\phi}(v) \cup c_{\phi}(v_1)\}$, 用 q 给 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_{\phi}(v_{11}) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $c_{\phi}(v_{12}) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$, $c_{\phi}(v_{13}) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c_{\phi}(v_{14}) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 若存在 $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, 使得 $\{r, 6, 7, 8, 9\} \notin \Omega_{v_1}(v_{11})$, 那么用 r 和 5 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_{v_1}(v_{11}) = \{\{1, 6, 7, 8, 9\}, \{2, 6, 7, 8, 9\}, \{3, 6, 7, 8, 9\}, \{4, 6, 7, 8, 9\}\}$. 现用 10 和 11 分别给 v_1v_{11} 和 vv_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.1.2, 矛盾.

情形 3.2 假设 $d_H(u_1) = 5$, 且 $d(u_j) = 6$, 其中 $j = 2, 3, 4$.

情形 3.2.1 假设 $|c_{\phi}(u) \cap c_{\phi}(v)| = 0$.

不妨设 $\phi(uu_j) = j + 4$, $j = 1, 2, 3, 4$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_{\phi}(v) \cup c_{\phi}(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{p\} \cup c_{\phi}(v) \in \Omega(v)$, 或

$\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{9, 10, 11, 12\}$.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 4$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 8\}$, 使得 $\{q, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$, 那么先用 q 给 vv_1 重新着色. 进一步, 若用 1 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_1) = \{\{2, 3, 4, 5, 9\}, \{2, 3, 4, 6, 9\}, \{2, 3, 4, 7, 9\}, \{2, 3, 4, 8, 9\}\}$. 先用 10 给 vv_1 重新着色. 进一步, 若用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$. 现用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 3$. 因而 $|A_u \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 1$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1)$. 若用 q 给 uu_1 重新着色, 用 5 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 由于 $|\Omega_v(v_1)| = 4$, 所以存在 $r \in \{5, 6, 7, 8, 12\}$, 使得 $\{r, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$. 现用 r 给 vv_1 重新着色, 用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.2.2 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 1$. 不妨设 $\phi(uu_1) = 1$ 和 $\phi(uu_j) = j + 3$, 其中 $j = 2, 3, 4$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$ 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 12\}$, 使得 $\{q, 1, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_2)$, 那么用 q 给 vv_2 重新着色, 用 2 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_2) = \{\{1, 3, 4, 5, 9\}, \{1, 3, 4, 6, 9\}, \{1, 3, 4, 7, 9\}, \{1, 3, 4, 9, 12\}\}$. 现用 10 给 vv_2 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.2.3 假设 $2 \leq |c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| \leq 3$. 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.2.4 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 4$. 设 $\phi(uu_j) = j$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$.

假设 $|\{2, 3, 4\} \cap c_\phi(u_1)| \geq 1$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 1$, 所以存在 $p \in L(uu_1)$. 现用 p 给 uu_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.2.3, 矛盾. 假设 $|\{2, 3, 4\} \cap c_\phi(u_1)| = 0$. 设 $u_{1j} \in N_H(u_1) \setminus \{u\}$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$. 不妨设 $\phi(u_1u_{1j}) = j + 4$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$. 若存在 $q \in C \setminus \{c_\phi(u) \cup c_\phi(u_1)\}$, 用 q 给 uu_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' , 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.2.3, 矛盾. 否则, 不妨设 $c_\phi(u_{11}) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $c_\phi(u_{12}) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$, $c_\phi(u_{13}) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c_\phi(u_{14}) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 若存在 $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, 使得 $\{r, 6, 7, 8, 9\} \notin \Omega_{u_1}(u_{11})$, 那么用 r 和 5 分别给 u_1u_{11} 和 uu_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.2.3, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_{u_1}(u_{11}) = \{\{1, 6, 7, 8, 9\}, \{2, 6, 7, 8, 9\}, \{3, 6, 7, 8, 9\}, \{4, 6, 7, 8, 9\}\}$. 现用 10 和 11 分别给 u_1u_{11} 和 uu_1 重新着色可得 H 的一个 12 - 邻点可区别边着色 ϕ' . 从而 $|c_{\phi'}(u) \cap c_{\phi'}(v)| = 3$, 正如情形 3.2.3, 矛盾.

情形 3.3 假设 $d_H(u_1) = d_H(u_2) = 5$ 且 $d_H(u_3) = d_H(u_4) = 6$.

情形 3.3.1 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 0$. 不妨设 $\phi(uu_j) = j + 4$, $j = 1, 2, 3, 4$. 若存在

$p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$, 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{9, 10, 11, 12\}$.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 4$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 8\}$, 使得 $\{q, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$, 那么先用 q 给 vv_1 重新着色. 进一步, 若用 1 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 不妨设 $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 若用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 现用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_1) = \{\{2, 3, 4, 5, 9\}, \{2, 3, 4, 6, 9\}, \{2, 3, 4, 7, 9\}, \{2, 3, 4, 8, 9\}\}$. 类似的, $\Omega_v(v_2) = \{\{1, 3, 4, 5, 10\}, \{1, 3, 4, 6, 10\}, \{1, 3, 4, 7, 10\}, \{1, 3, 4, 8, 10\}\}$. 先用 10 和 11 分别给 vv_1 和 vv_2 重新着色. 进一步, 若用 2 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_1) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_2) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$. 不妨设 $c_\phi(u_1) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$. 若用 9 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. 现用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 3$. 因而 $|A_u \cap \{9, 10, 11, 12\}| \geq 1$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1)$. 若用 q 给 uu_1 重新着色, 用 5 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 若 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 显然, 存在 $r \in \{5, 6, 7, 8, 12\}$, 使得 $\{r, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$, 那么先用 r 给 vv_1 重新着色. 进一步, 若用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 现用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 若 $c_\phi(u_2) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$, 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $s \in L(uu_2) \setminus c_\phi(u_1)$. 现用 s 给 uu_2 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 2$. 因而 $|A_u \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 2$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus c_\phi(u_2)$. 现用 q 给 uu_1 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.3.2 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 1$.

不妨设 $\phi(uu_1) = 1$ 和 $\phi(uu_j) = j+3$, 其中 $j = 2, 3, 4$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$, 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

假设 $|A_v \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 4$. 因而 $|A_u \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| \geq 1$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 12\}$, 使得 $\{q, 1, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_2)$, 那么先用 q 给 vv_2 重新着色. 进一步, 若用 2 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. 现用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_2) = \{\{1, 3, 4, 5, 9\}, \{1, 3, 4, 6, 9\}, \{1, 3, 4, 7, 9\}, \{1, 3, 4, 9, 12\}\}$. 先用 10 给 vv_2 重新着色. 进一步, 若用 8 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 3$. 因而 $|A_u \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 2$. 不妨设 $c_\phi(v_1) =$

$\{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 11\}$ 和 $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 12\}$. 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_2) \setminus c_\phi(u_1)$. 现用 q 给 uu_2 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.3.3 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 2$.

不妨设 $\phi(uu_1) = 1$, $\phi(uu_2) = 2$, $\phi(uu_3) = 5$ 和 $\phi(uu_4) = 6$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$ 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 2, 5, 6, 11\}$ 和 $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus c_\phi(u_2)$. 现用 q 给 uu_1 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.3.4 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 3$. 显然, 存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.3.5 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 4$. 与情形 3.2.4 类似, 矛盾.

情形 3.4 假设 $d(u_j) = 5$, 其中 $j = 1, 2, 3$, 且 $d(u_4) = 6$.

情形 3.4.1 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 0$.

不妨设 $\phi(uu_j) = j + 4$, $j = 1, 2, 3, 4$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$ 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{9, 10, 11, 12\}$.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 4$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 8\}$, 使得 $\{q, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$, 那么先用 q 给 vv_1 重新着色. 进一步, 若用 1 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 不妨设 $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 若用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 不妨设 $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 若用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$. 现用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_1) = \{\{2, 3, 4, 5, 9\}, \{2, 3, 4, 6, 9\}, \{2, 3, 4, 7, 9\}, \{2, 3, 4, 8, 9\}\}$. 类似的, $\Omega_v(v_2) = \{\{1, 3, 4, 5, 10\}, \{1, 3, 4, 6, 10\}, \{1, 3, 4, 7, 10\}, \{1, 3, 4, 8, 10\}\}$, $\Omega_v(v_3) = \{\{1, 2, 4, 5, 11\}, \{1, 2, 4, 6, 11\}, \{1, 2, 4, 7, 11\}, \{1, 2, 4, 8, 11\}\}$ 和 $\Omega_v(v_4) = \{\{1, 2, 3, 5, 12\}, \{1, 2, 3, 6, 12\}, \{1, 2, 3, 7, 12\}, \{1, 2, 3, 8, 12\}\}$. 先用 10, 11, 12 和 9 分别给 vv_1, vv_2, vv_3 和 vv_4 重新着色. 进一步, 若用 1 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 不妨设 $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 若用 2 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$. 不妨设 $c_\phi(u_2) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$. 若用 3 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{3, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 4 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 3$. 因而 $|A_u \cap \{9, 10, 11, 12\}| \geq 1$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1)$. 若用 q 给 uu_1 重新着色, 用 5 给 uv 着色可得 G

的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 若 $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 显然, 存在 $r \in \{5, 6, 7, 8, 12\}$, 使得 $\{r, 2, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_1)$, 那么先用 r 给 vv_1 重新着色. 进一步, 若用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 不妨设 $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 若用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$. 显然存在 $s \in \{6, 7\} \setminus \{r\}$, 不妨设 $s = 7$. 由于 $|L(uu_3)| \geq 3$, 所以存在 $t \in L(uu_3) \setminus \{c_\phi(u_1) \cup c_\phi(u_2)\}$. 现用 t 给 uu_3 重新着色, 用 7 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 若 $c_\phi(u_2) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$, 不妨设 $c_\phi(u_2) = \{q, 5, 6, 7, 8\}$. 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $r \in L(uu_2) \setminus c_\phi(u_1)$. 若用 r 给 uu_2 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{r, 5, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_3)| \geq 2$, 所以存在 $s \in L(uu_3)$. 显然, $s \notin c_\phi(u_1)$, $6 \notin c_\phi(u_3)$ 和 $12 \notin c_\phi(u_2)$. 因而用 s 给 uu_3 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 2$. 因而 $|A_u \cap \{9, 10, 11, 12\}| \geq 2$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus c_\phi(u_2)$. 若用 q 给 uu_1 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{q, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $r \in L(uu_2) \setminus \{c_\phi(u_1) \cup c_\phi(u_3)\}$. 现用 r 给 uu_2 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 1$. 因而 $|A_u \cap \{9, 10, 11, 12\}| = 3$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(u_1) = \{5, 6, 7, 8, 10\}$, $c_\phi(u_2) = \{5, 6, 7, 8, 11\}$ 和 $c_\phi(u_3) = \{5, 6, 7, 8, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus \{c_\phi(u_2) \cup c_\phi(u_3)\}$. 现用 q 给 uu_1 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.4.2 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 1$.

不妨设 $\phi(uu_1) = 1$, $\phi(uu_j) = j + 3$, $j = 2, 3, 4$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$ 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

假设 $|A_v \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 4$. 因而 $|A_u \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| \geq 1$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 11\}$ 和 $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 12\}$. 若存在 $q \in \{5, 6, 7, 12\}$, 使得 $\{q, 1, 3, 4, 9\} \notin \Omega_v(v_2)$, 那么先用 q 给 vv_2 重新着色. 进一步, 若用 2 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. 不妨设 $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. 若用 8 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. 现用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\Omega_v(v_2) = \{\{1, 3, 4, 5, 9\}, \{1, 3, 4, 6, 9\}, \{1, 3, 4, 7, 9\}, \{1, 3, 4, 9, 12\}\}$. 类似的, $\Omega_v(v_3) = \{\{1, 2, 4, 5, 10\}, \{1, 2, 4, 6, 10\}, \{1, 2, 4, 7, 10\}, \{1, 2, 4, 10, 12\}\}$ 和 $\Omega_v(v_4) = \{\{1, 2, 3, 5, 11\}, \{1, 2, 3, 6, 11\}, \{1, 2, 3, 7, 11\}, \{1, 2, 3, 11, 12\}\}$. 先用 10, 11 和 9 分别给 vv_2 , vv_3 和 vv_4 重新着色. 进一步, 若用 2 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ 或 $c_\phi(u_3) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. 不妨设 $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. 若用 3 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{1, 3, 5, 6, 7\}$. 现用 4

给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 3$. 因而 $|A_u \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| \geq 2$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 11\}$ 和 $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus c_\phi(u_2)$. 若用 q 给 uu_1 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{q, 5, 6, 7, 12\}$. 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $r \in L(uu_2) \setminus \{c_\phi(u_1) \cup c_\phi(u_3)\}$. 现用 r 给 uu_2 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 2$. 因而 $|A_u \cap \{8, 9, 10, 11, 12\}| = 3$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 5, 6, 7, 10\}$, $c_\phi(u_2) = \{1, 5, 6, 7, 11\}$ 和 $c_\phi(u_3) = \{1, 5, 6, 7, 12\}$. 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_2) \setminus \{c_\phi(u_1) \cup c_\phi(u_3)\}$. 现用 q 给 uu_2 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.4.3 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 2$.

不妨设 $\phi(uu_1) = 1$, $\phi(uu_2) = 2$, $\phi(uu_3) = 5$ 和 $\phi(uu_4) = 6$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$ 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

假设 $|A_v \cap \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}| = 4$. 因而 $|A_u \cap \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}| \geq 2$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 10\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 2, 5, 6, 11\}$ 和 $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus c_\phi(u_2)$. 若用 q 给 uu_1 重新着色, 用 12 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, $c_\phi(u_3) = \{q, 2, 5, 6, 12\}$. 由于 $|L(uu_2)| \geq 3$, 所以存在 $r \in L(uu_2) \setminus \{c_\phi(u_1) \cup c_\phi(u_3)\}$. 现用 r 给 uu_2 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

假设 $|A_v \cap \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}| = 3$. 因而 $|A_u \cap \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}| = 3$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 2, 5, 6, 10\}$, $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 5, 6, 11\}$ 和 $c_\phi(u_3) = \{1, 2, 5, 6, 12\}$. 由于 $|L(uu_3)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_3) \setminus \{c_\phi(u_1) \cup c_\phi(u_2)\}$. 现用 q 给 uu_3 重新着色, 用 10 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.4.4 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 3$.

不妨设 $\phi(uu_j) = j$, 其中 $j = 1, 2, 3$. 设 $\phi(uu_4) = 5$. 若存在 $p \in C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\}$, 用 p 给 uv 着色可得 G 的一个 12 - 邻点可区别边着色, 矛盾. 否则, 在 ϕ 下, $\{\{p\} \cup c_\phi(v)\} \in \Omega(v)$ 或 $\{\{p\} \cup c_\phi(u)\} \in \Omega(u)$. 显然, $C \setminus \{c_\phi(v) \cup c_\phi(u)\} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 不妨设 $c_\phi(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $c_\phi(v_2) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $c_\phi(v_3) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $c_\phi(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $c_\phi(u_1) = \{1, 2, 3, 5, 10\}$, $c_\phi(u_2) = \{1, 2, 3, 5, 11\}$ 和 $c_\phi(u_3) = \{1, 2, 3, 5, 12\}$. 由于 $|L(uu_1)| \geq 3$, 所以存在 $q \in L(uu_1) \setminus \{c_\phi(u_2) \cup c_\phi(u_3)\}$. 现用 q 给 uu_1 重新着色, 用 11 给 uv 着色可得 G 的一个 12 邻点可区别边着色, 矛盾.

情形 3.4.5 假设 $|c_\phi(u) \cap c_\phi(v)| = 4$. 与情形 3.2.4 类似, 矛盾.

情形 3.5 假设 $d(u_j) = 5$, 其中 $j = 1, 2, 3, 4$. 由于 G 是最大度为 6 的连通图, 所以在 G 中存在一个 6 - 顶点 w , 和一条最短路 $p = w_0, w_1, \dots, w_t$, 其中 $w_0 = u$, $w_t = w$. 设 w_s 是这条路上的第一个 6 - 顶点. 根据情形 1, 2 和 3.1-3.4 可知 $d(w_k) = 5$ 且 $s \geq 3$, 其中 $k = 0, 1, \dots, s-1$. 因此找到了一个 5 - 顶点 w_{s-1} 和一个 6 - 顶点 w_s 相邻. 令 $H = G - w_{s-2}w_{s-1}$. 正如前面已讨论, 矛盾. 因此这个定理成立.

推论 2.1 设 G 是一个最大度为 6 的图, 则 $\chi'_a(G) \leq 13$.

证 由引理 1.1 和定理 2.1 可得.

参 考 文 献

- [1] Zhang Zhongfu, Liu Linzhong, Wang Jianfang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Appl. Math. Lett., 2002, 15(5): 623–626.
- [2] Hatami H. $\Delta + 300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number[J]. J. Combin. Theory Ser. B., 2006, 95(2): 246–256.
- [3] Akbari S, Bidkhori H, Nosrati N. r -Strong edge colorings of graphs[J]. Disc. Math., 2006, 306(23): 3005–3010.
- [4] Zhang Lianzhu, Wang Weifan, Lih K W. An improved upper bound on the adjacent vertex distinguishing chromatic index of a graph[J]. Disc. Appl. Math., 2014, 162(C): 348–354.
- [5] Balister P N, Gyóri J, Lehel R H, Schelp R H. Adjacent vertex distinguish edge-coloring[J]. SIAM J. Disc. Math., 2007, 21(1): 237–250.
- [6] Hocquard H, Montassier M. Adjacent vertex-distinguishing edge coloring of graphs with maximum degree Δ [J]. J. Comb. Optim., 2013, 26(1): 152–160.
- [7] Wang Yiqiao, Wang Weifan, Huo Jingjing. Some bounds on the neighbor-distinguishing index of graphs[J]. Disc. Math., 2015, 338(11): 2006–2013.

AN UPPER BOUND ON ADJACENT VERTEX-DISTINGUISHING CHROMATIC INDEX OF GRAPHS WITH MAXIMUM DEGREE SIX

WU Yan-qing

(School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen 041000, China)

Abstract: In this paper, we discuss the problem of the adjacent vertex distinguishing edge coloring on the graph with maximum degree six. By using reduction to absurdity, an upper bound on the adjacent vertex distinguishing chromatic index for the graph G which is not a semi-regular graph with maximum degree six is obtained.

Keywords: maximum degree; adjacent vertex distinguishing edge coloring; adjacent vertex distinguishing chromatic index

2010 MR Subject Classification: 05C15