

具有弱正规性的有限群

薛海波¹, 张 钰², 吕 恒²

(1. 重庆人文科技学院机电与信息工程学院, 重庆 合川 401524)

(2. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要: 本文研究了一类有限可解 MC -群 G . 若群 G 的任意非正规循环子群 H , 都存在一个素数 p 使得 $|G : H^G| \mid p$, 则群 G 被称为 MC -群. 利用该群的可解性, 获得了非幂零可解 MC -群的详细分类.

关键词: 有限 p -群; MC -群; 可解群

MR(2010) 主题分类号: 20D10; 20D15

中图分类号: O152.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2018)06-1091-06

1 引言

设 G 为群, H 是 G 的子群. 则 H 在 G 中的正规闭包 H^G 定义为 G 中包含 H 的最小正规子群. 于是 H 是 G 的正规子群的充要条件就是 $|H^G : H| = 1$. 因此从某种意义上来说, $|H^G : H|$ 可以反映出子群 H 的正规性. $|H^G : H|$ 越接近 1, 那么 H 的正规性越强. 众所周知所有子群都是正规子群的群是 Dedekind 群. 如果一个群 G 的任意非正规子群 H 的闭包满足 $|H^G : H| = p$, 其中 p 是一个素数, 那么这类群就与 Dedekind 群越接近. 文献 [1-3] 分别对这类有限 p -群或有限可解群进行了详细的研究, 证明了这类群的换位子群的阶存在一个上界.

一个群 G 的任意非正规子群 H 的闭包满足 $|G : H^G| = 1$ 或者素数 p , 则可以看作是子群的正规性比较弱的情况. 显然所有单群就满足这样性质. 除单群外, 让人感兴趣的是满足这类条件的幂零群与可解群. 对于幂零群, Janko 首先在文献 [4] 中研究了有限 p -群 G , 其任意非正规子群 H 的正规闭包 H^G 满足 $|G : H^G| = p$, 得到了

定理 1.1 对于一个非 Dedekindian p -群 G , 如果 G 的任意非正规循环子群 H , 都有 $|G : H^G| = p$, 那么 G 为下列群之一

(a) $|G| = p^3$.

(b) $G = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^{p^2} = 1, a^b = a^{1+p} \rangle$ 是唯一阶为 p^4 非交换亚循环群且 $\exp(G) = p^2$.

(c) G 是极大类 2-群.

(d) $G = \langle h, z \mid h^4 = z^{2^n} = 1, n > 2, z^h = z^{-1+\epsilon 2^{n-1}}, \epsilon = 0, 1 \rangle$.

作为 Janko 研究工作的继续, 本文将研究满足下面性质的有限可解群 G : 对任意的 $x \in G$, 若 $\langle x \rangle$ 不是 G 的正规子群, 则都存在一个素数 p 使得 $|G : \langle x \rangle^G| \mid p$. 为了叙述方便, 下

*收稿日期: 2017-11-29

接收日期: 2018-03-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471266); 中央高校基本科研业务专项基金资助项目 (XDJK2015B033).

作者简介: 薛海波 (1980-), 女, 山西运城, 副教授, 讲师, 主要从事群论研究.

通讯作者: 吕恒.

文称满足这个条件的群为 MC -群. 由引理 2.2, 若 MC -群为幂零群时, 则一定为 p -群. 鉴于 Janko 已经完成了这类群的分类, 本文将研究可解但非幂零的 MC -群, 主要得到如下的结果.

定理 1.2 设群 G 是有限可解群. 如果 G 是非幂零的 MC -群, 那么 G/G' 是阶为 p_1^m 的循环群与阶为 p_2^n 的循环群的直积, 其中 p_1, p_2 分别是素数, $m \geq 1, n = 0$ 或 1 . 更进一步,

(1) 若 $n = 0$, 则 $G = A \rtimes \langle y \rangle$, 其中 $y^{p_1^m} = 1, A = G'$ 是 Hall p_1' -群, 且有下列 (1.1)–(1.3) 结论成立.

(1.1) 若 $m = 1$ 且 G' 交换, 则 G' 是初等交换 p_3 -群; 或 $G' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, 其中 $o(a_1) = p_3^n, o(a_2) = p_3, n \geq 2$; 或 G' 是所有子群均正规于 G 的 p_1' -群.

(1.2) 若 $m = 1$ 且 G' 非交换, 则 G' 是特殊 p_3 -群, 即 $G'' = Z(G)$. 故 G' 的幂零类为 2. 特别地, 若 $p_3 \geq 3$, 则 $\exp(G') = p_3$; 若 $p_3 = 2$, 则 $\exp(G') \leq 2^2$.

(1.3) 若 $m \geq 2$, 则 G' 是所有子群均正规于 G 的 p_1' -群.

(2) 若 $n = 1$, 则 G/G' 是两个不同素数方幂阶的循环群的直积, $|G/G'| = p_1^m p_2$. 此时 G' 中每个子群均正规于 G , 且有下列 (2.1)–(2.3) 结论成立.

(2.1) 若 $p_1 = p_2$, 则 $G = G_{p_1} \times G_{p_1'}$, 其中 G_{p_1} 为 G 的 Sylow p_1 -子群, $G_{p_1'}$ 为 G 的 Hall p_1' -子群, 且 $G_{p_1'} \leq G'$, 而且 $G_{p_1} = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$, $o(x_1) = p_1^m, o(x_2) = p_1$ 或 G_{p_1} 同构于定理 1.1 Janko 所分类的亚循环群.

(2.2) 若 $m = 1$ 且 $p_1 \neq p_2$, 则 $G = (\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle) \times G'$, 其中 $o(x_1) = p_1, o(x_2) = p_2$.

(2.3) 若 $m \geq 2$ 且 $p_1 \neq p_2$, 则 $G = (G_{p_1} \times G') \times \langle x_2 \rangle$, 其中 G_{p_1} 是 p_1^m 阶循环群, G' 是一个 p_1' -子群, $o(x_2) = p_2$.

2 主要结论及证明

引理 2.1 [6] 设 π' -群 H 作用在交换 π -群 G 上, 则 $G = C_G(H) \times [G, H]$.

引理 2.2 设 G 是 MC -群, 则 G 是幂零群当且仅当 G 是 p -群.

证 仅需证明必要性. 因为群 G 是幂零群, 所以 $G = S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}$, 其中 $S_{p_i} \in \text{Syl}_{p_i}(G), i = 1, \dots, k$ 是 Sylow p_i -子群. 不妨设 $x \in S_{p_1}$ 且 $\langle x \rangle$ 不是 G 的正规子群. 显然 $\langle x \rangle^G < S_{p_1}$. 即 $|S_{p_1} \langle x \rangle^G| = |G : \langle x \rangle^G| = p_1$, 故 $|G : S_{p_1}| = 1$. 因此 G 是 p -群.

引理 2.3 设 G 是交换 p -群. 若 $a \in G \setminus G^p$ 且 a 是 aG^p 中阶最小的元, 则存在子群 G_0 使得 $G = \langle a \rangle \times G_0$, 其中 $G^p = \langle g^p | g \in G \rangle$.

引理 2.4 设有限群 G 是 MC -群. 若 $|G| = p^m q^n, p > q$ 都是素数, 且 $G/G' \cong C_p \times C_q$, 则 $|G| = p^2 q$ 或者 $|G| = pq$.

证 显然 G' 中所有子群都是正规子群. 令 $G' = M \times N$, 其中 M, N 分别是 G' 的 Sylow p -子群和 Sylow q -子群. 考虑商群 $\bar{G} = G/M$, 易得 \bar{G} 的 Sylow q -子群与 G 的 Sylow q -子群同构且 $\bar{G}/\bar{G}' \cong G/G'$. 因此不妨假设 G 的 Sylow p -子群是 p 阶循环群. 此时 G 的 Sylow q -子群是正规子群.

下面证明 G 的 Sylow q -子群 Q 是阶小于或者等于 q^2 的初等交换群.

先假设 Q 是交换群. 证明 Q 是阶小于或者等于 q^2 的初等交换群. 由引理 2.1 可知 $Q = C_Q(\langle x \rangle) \times [\langle x \rangle, Q]$, 且 $[\langle x \rangle, Q] = G'$. 因为 G' 是 Q 的真子群, 所以 $C_Q(\langle x \rangle) = \langle a \rangle$ 是 q 阶循环群. 此时显然 $G' \cap C_Q(\langle x \rangle) = 1$. 若 $G' = 1$, 则 Q 是 q 阶循环群, 结论显然成立. 假设 $|G'| > 1$. 任意取 q 阶元 $b \in G'$, 则 $\langle b \rangle \trianglelefteq G$. 于是 $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \trianglelefteq G$. 由于 $[a, x] = 1, [b, x] \neq 1$, 故

$(ab)^x = ab^k$, 其中 $(k, q) = 1$. 此时易得 $\langle ab \rangle$ 不是群 G 的正规子群. 从而说明 $\langle ab \rangle^G = Q$ 是阶为 q^2 的初等交换子群.

下面证明 Q 一定是交换群. 假设 Q 是非交换 q -群. 因为 G' 的所有子群均正规于 G , 所以对任意的 $g \in G'$ 都有 $\langle g \rangle \trianglelefteq G$. 又由 $G/C_G(\langle g \rangle) \cong \text{Aut}(\langle g \rangle)$, 即 $G/C_G(\langle g \rangle)$ 是交换群. 于是 $G' \leq C_G(\langle g \rangle)$ 且 $g \in Z(G')$, 故 G' 是交换群. 设 $z \in Q \setminus G'$. 若 $\langle z \rangle$ 是 G 的正规子群, 类似可得 $G' \leq C_G(\langle z \rangle)$. 而 $Q = \langle z, G' \rangle$, 于是得 Q 是交换群, 与假设相矛盾. 故 $\langle z \rangle$ 不是 G 的正规子群. 因此有 $Q = \langle z \rangle^G$. 考虑商群 $\bar{G} = G/Q'$. 显然 $\bar{G} = \langle \bar{x}, \bar{Q} \rangle$ 也是 MC -群. 由前面 Q 是交换的情况的讨论可知 $|\bar{Q}| = q^2$, 故 $Q = \langle z, z^x \rangle$.

若 $q \geq 3$, 由于 $|Q : G'| = q$ 且 G' 中所有子群均正规于 G , 则 G' 是交换群且存在 $x_0 \in Q \setminus G'$ 使得 $Q = G' \cdot \langle x_0 \rangle$. 任取 $g \in G'$ 都有 $\langle g \rangle \trianglelefteq Q$, $[x_0^q, g] = 1$, 因此 $[x_0, g] \in Z(Q)$ 是 q 阶元. 故 $Q' \leq Z(Q)$. 于是 $cl(Q) = 2$, 从而得到 Q 是正则 q -群.

显然 $\langle z^q \rangle \leq G'$ 是正规子群. 因此 $\langle z \rangle \cap \langle z^x \rangle = \langle z^q \rangle$. 假设 $o(z) \geq q^2$, 利用 Q 的正则性, 存在 q 阶元 $z_1 \in Q$ 使得 $Q = \langle z, z^x \rangle = \langle z, z_1 \rangle$. 此时 $\Omega_1(Q) = \langle g | g^q = 1, g \in Q \rangle$ 是 Q 的方次数为 q 的真子群. 于是得到 $\Omega_1(Q)$ 中所有子群正规, 即 $\langle z_1 \rangle \leq Z(Q)$. 从而得到 Q 是交换群, 矛盾.

下设 $o(z) = q$, 则 $\exp(Q) = q$ 且 $|Q| = q^3$. 因此 $G' \leq Q$ 为 q^2 阶的初等交换 q -群. 又因为 Q 是非交换群, 所以存在 $z_3 \in G'$ 使得 $\langle z_3 \rangle$ 不是 Q 的正规子群. 这与 G' 的每个子群均正规于 G 矛盾. 故 Q 是交换群.

若 $q = 2$, 由于 $|Q/Q'| = 4$ 以及文献 [7, 命题 1.6] 可知, Q 是极大类 2-群. 当 $|Q| = 2^3$ 时, 则 $Q \cong D_8$ 或 $Q \cong Q_8$. 若 $Q \cong D_8$, 则 $\text{Aut}(Q) \cong \text{Aut}(D_8) \cong D_8$. 由于 $p \neq q$, 因此 $[\langle x \rangle, Q] = 1$, 即表明 G 是幂零群. 若 $Q \cong Q_8$, 由 $\text{Aut}(Q) \cong \text{Aut}(Q_8) \cong S_4$ 可知 $p = 3$, 此时可得 $G' = Q$, 矛盾.

当 $|Q| \geq 2^4$ 时, 则存在子群 $N \leq G' \leq Q$ 使得 Q/N 是阶为 2^3 的非交换 2-群, 此时 $Q/N \cong D_8$, 从而 $\bar{G} = G/N = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{Q} \rangle$, 其中 $\bar{x} = xN$, $\bar{Q} = Q/N$, 这与 $\bar{Q} = \langle \bar{y} \rangle^{\bar{G}} = \langle \bar{y}, \bar{y}^{\bar{x}} \rangle$ 相矛盾.

综上所述, Q 是交换群. 即 Q 是阶小于或者等于 q^2 的初等交换 q -群. 类似考虑商群 $\bar{G} = G/N$, 易得 \bar{G} 的 Sylow p -子群与 G 的 Sylow p -子群同构且 $\bar{G}/\bar{G}' \cong G/G'$. 因此不妨假设 G 的 Sylow p -子群是 p 阶循环群的情况下可得 G 的 Sylow p -子群是阶小于或者等于 p^2 的初等交换 p -群.

最后证明 $|Q| = q$. 假设 $|Q| = q^2$. 同样在商群 $\bar{G} = G/N$ 中, 则 \bar{G} 的 Sylow q -子群 \bar{Q} 阶为 q^2 的正规初等交换 q -子群. 而 $|\text{Aut}(\bar{Q})| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$ 且 $p > q$. 由 $\bar{Q} \cap \bar{G}' \neq 1$ 可得 $p = 3, q = 2$. 易得此时 $\bar{G}' = \bar{Q}$, 即 $\bar{G}/\bar{G}' \cong C_p$, 矛盾. 故 $|Q| = q$.

定理 1.2 的证明 由于 G/G' 是交换群, 故存在 $x_1, x_2, \dots, x_r \in G$ 使得

$$G/G' = \langle \bar{x}_1 \rangle \times \langle \bar{x}_2 \rangle \times \cdots \times \langle \bar{x}_j \rangle,$$

其中 j 是使得直积个数最多的整数值.

若 $j \geq 3$, 则对任意 $x \in G'$ 都有 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. 令 $H_i = \langle x_i, G' \rangle$, 同样可得 $\langle x_i \rangle \trianglelefteq G$. 而 $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_j, G' \rangle$, 进而得到 G 是 Dedekind 群, 与 G 是 MC -群相矛盾. 因此 $j \leq 2$, 即 $|G/G'| = p_1^m p_2^n$, 其中 p_1, p_2 是素数, $m \geq 1, n = 0$ 或 1 .

情形 (1) $n = 0$ 且 G/G' 是阶为 p_1^m 的循环群, 即 $|G/G'| = p_1^m$. 分以下三种情况讨论.

(1.1) $m = 1$ 且 G' 是交换群.

假设存在 $x \in G'$ 使得 $\langle x \rangle$ 不是 G 的正规子群, 则易得 $G' = \langle x \rangle^G$ 且 G' 是交换 p_3 -群, 其中 p_3 是素数. 因为 G 不是幂零群, 所以素数 $p_3 \neq p_1$. 于是存在 $y \in G$ 使得 $G = \langle y \rangle \rtimes G'$, 其中 $o(y) = p_1$. 又由 $G' = \langle x \rangle^G$ 可知 x 是 G' 中最高阶元素, 于是 $\langle x^{p_3} \rangle \trianglelefteq G$, 则 $\langle (x^y)^{p_3} \rangle \cap \langle x \rangle = \langle x^{p_3} \rangle$, 故

$$\langle x^y, x \rangle = \langle x \rangle \times \langle x_1 \rangle,$$

其中 $o(x_1) = p_3$, 且 $\langle x_1 \rangle \trianglelefteq G$. 若 $o(x) = p_3$, 则 $|\langle x \rangle^G| \leq p_3^{p_1}$ 且 $\exp(\langle x \rangle^G) = p_3$, 即 $G' = \langle x \rangle^G$ 是初等交换 p_3 -群.

若 $o(x) = p_3^n > p_3$, 则 $\langle x_1 \rangle \trianglelefteq G$. 令子群 $H = \langle x^y, x \rangle = \langle x \rangle \times \langle x_1 \rangle$, 因为

$$H^y = \langle x^y, x \rangle^y = (\langle x \rangle \times \langle x_1 \rangle)^y = \langle x \rangle^y \times \langle x_1 \rangle \in \langle x, x^y \rangle,$$

所以 $H \trianglelefteq G$. 故 $G' = \langle x \rangle^G = \langle x \rangle \times \langle x_1 \rangle$, 其中 $o(x) = p_3^n$, $o(x_1) = p_3$.

假设 G' 中所有子群都正规, 仅需证明 G' 是群 G 的 Hall p_2' -群. 设 N 是 G' 的 Hall p_2' -子群, 则 G/N 是 p_2 -群, 且 $G/N/(G/N)' \cong G/G'$ 是循环群. 故 G/N 是循环群. 因此 $G' = N$ 是 G 的 Hall p_2' -群.

(1.2) $m = 1$ 且 G' 是非交换群.

假设对任意 $x \in G'$ 均有 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, 则可知 $G/C_G(\langle x \rangle)$ 是交换群. 于是 $G' \leq C_G(\langle x \rangle)$, 从而得到 G' 是交换群, 矛盾. 因此一定存在 $x \in G'$ 使得 $\langle x \rangle$ 不是 G 的正规子群, 故 $G' = \langle x \rangle^G$. 因为 G 是可解群, 所以 G' 的所有子群均正规于 G . 于是对任意的 $a \in G'$ 都有 $G/C_G(\langle a \rangle)$ 是交换群, 故 G' 是交换群且 $G' \leq Z(G')$. 因此 G' 是幂零群且 $cl(G') \leq 2$. 由于 G 不是幂零群, 易得 G' 是群 G 的一个 Sylow p_3 -群, 进而存在 $y \in G$ 使得 $G = \langle y \rangle \rtimes G'$, 其中 $o(y) = p_1$, $|G'| = p_3^k$, $k \geq 1$.

当 $p_3 \geq 3$ 时, 因为 $cl(G') \leq 2$, 所以 G' 是正则 p_3 -群. 假设 $o(x) > p_3$. 则由 $G' = \langle x \rangle^G$ 可知, 一定存在 $g \in G$ 使得 $[x, x^g] \neq 1$. 令 $H = \langle x, x^g \rangle$. 因为 $x^{p_3} \in \Phi(G')$, 所以 $\langle x^{p_3} \rangle \trianglelefteq G$. 于是 $\langle (x^g)^{p_3} \rangle = \langle x^{p_3} \rangle$. 故有正整数 k 使得

$$(x^{p_3})^k = (x^g)^{p_3}, \quad (x^k)^{p_3} = (x^g)^{p_3}.$$

又因 H 正则, 所以 $(x^{-k}x^g)^{p_3} = 1$, 于是有 $H = \langle x, x^{-k}x^g \rangle$. 记 $a = x^{-k}x^g$, 则 $\langle a \rangle^G \leq \Omega_1(G') < G'$, 其中 $\Omega_1(G') = \langle g | g^{p_3} = 1, g \in G' \rangle$. 由此表明 $\langle a \rangle \trianglelefteq G$. 类似前面证明可知 $a \in Z(G')$, 故 H 是交换群, 与 $[x, x^g] \neq 1$ 相矛盾. 因此 $o(x) = p_3$, $\exp(G') = p_3$.

当 $p_3 = 2$ 时, 假设 $o(x) = 2^t \geq 2^3$. 对任意 $g \in G$ 令 $H = \langle x, x^g \rangle$, 其中 $[x, x^g] \neq 1$. 因为 $c(H) \leq 2$, 所以 $H' = \langle [x, x^g] \rangle$. 又由 $x^2 \in \Phi(G')$, 则 $\langle x^2 \rangle \trianglelefteq G$, $\langle (x^g)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$. 于是 $x^2 \in Z(G')$. 故由 G' 的幂零类是 2 可得 $[x, x^g]^2 = [x^2, x^g] = 1$, 因此 H' 是 2 阶子群. 且 $x^2 = (x^g)^2$. 由 Hall-Petrescu 恒等式 (见文献 [7]) 可知

$$(x^{-1}x^g)^4 = x^{-4}(x^g)^4 c_2^{\binom{4}{2}} = x^{-4}(x^g)^4 = 1,$$

其中 $c_2 \in \langle x, x^g \rangle'$. 令 $b = x^{-1}x^g$, 则 $H = \langle x, x^{-1}x^g \rangle = \langle x, b \rangle$. 若 $\langle b \rangle$ 不是 G 的正规子群, 则 $G' = \langle b \rangle^G$. 因此对任意的 $z \in G'$, 有 $z = b^{l_1}(b^{g_1})^{l_2} \cdots (b^{g_n})^{l_n}$, 其中 $g_i \in G$, l_i 是整数, $1 \leq i \leq n$. 又由 Hall-Petrescu 恒等式, 对 n 归纳可知, $o(z) \leq 4$, 故 $\exp(G') \leq 4$, 矛盾. 因此

$\langle b \rangle \trianglelefteq G$, 所以类似可得 $G' \leq C_G(\langle b \rangle)$, 故 H 是交换群, 与 $[x, x^g] \neq 1$ 相矛盾. 因此 $o(x) \leq 2^2$, $\exp(G') \leq 2^2$.

假设 G'' 是 $Z(G')$ 的真子群. 由文献 [6, 定理 2.2] 存在正规子群 N 使得 $G'' \leq N$ 且 $G'/G'' = Z(G')/G'' \times N/G''$. 由 G' 非交换, 可得 $|N/G''| \geq p_3^2$ 且 N 是非交换 p -群, 又 N 是 G' 的真子群, 因此 N 的每个子群都正规于 G . 类似可得 N 中每个循环子群包含在 $Z(G')$ 中, 于是 N 是交换群, 矛盾. 故 $Z(G') = G''$, 从而得到 G' 是特殊 p_3 -群.

(1.3) $m \geq 2$. 显然 G' 的每一个子群均正规于 G . 此时断言 $(|G'|, p_1) = 1$. 否则不妨设 $|G'| = p_1^n r$, 令 $G' = Q \times R$, 其中 $|Q| = p_1^n$, $(|R|, p_1) = 1$. 记 $\bar{G} = G/R$, 则 \bar{G} 是 p_2 -群且 $\bar{G}/\bar{G}' \cong G/G'$. 而 G/G' 是循环群, 于是 \bar{G}/\bar{G}' 是循环群. 由此表明 \bar{G} 是循环群, 故 G/R 是交换群. 进而有 $G' \leq R$, 与 $G' = Q \times R$ 相矛盾. 所以存在 $y \in G$ 使得 $G = \langle y \rangle \times G'$, 其中 $o(y) = p_2^m$, $m \geq 2$, 且 G' 是所有子群均正规于 G 的 p_2' -群.

情形 (2) G/G' 是阶为 p_1^m 的循环群与阶为 p_2 的循环群. 依然分以下三种情况讨论.

(2.1) 若 $p_1 = p_2$, 则 $G = G_{p_1} \times G_{p_1'}$, 其中 Hall p_1' -子群 $G_{p_1'} \leq G'$. 此时 G' 的每个子群均正规于 G . 若 Sylow p_1 -子群 G_{p_1} 的每个子群均正规于 G , 则 G 是 Dedekind 群, 与题设条件相矛盾. 若 G_{p_1} 交换, 则 $G/G_{p_1'}$ 交换, 于是 $G' = G_{p_1'}$. 从而存在 x_1, x_2 使得 $G_{p_1} = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$, 其中 $o(x_1) = p_1^m$, $o(x_2) = p_1$. 若 $m \geq 2$, 则 $\langle x_2 \rangle \trianglelefteq G$, 于是 $x_2 \in Z(G)$, 从而有 $G = (\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle) \times G_{p_1'} = (\langle x_1 \rangle \times G_{p_1'}) \times \langle x_2 \rangle$. 若 $m = 1$. 因为 G' 中所有子群都正规, 所以不妨设 G' 是素数阶循环群. 则 $|G : C_G(G')| = p_1$. 因此也可以设 $x_2 \in Z(G)$. 如果 G' 是不是素数方幂循环群, 那么存在正规子群 N 使得 G'/N 是素数方幂循环群. 在商群 G/N 中类似可得 $x_2 N \in Z(G/N)$. 于是由 $\langle x_2, N \rangle \trianglelefteq G$ 可得 $x_2 \in Z(G)$, 从而得到 $G = (\langle x_1 \rangle \times G_{p_1'}) \times \langle x_2 \rangle$.

若 G_{p_1} 非交换, 类似前面设 $G_{p_1'}$ 是素数阶循环群, 则易得 $G/C_G(G_{p_1'})$ 是循环群, 且 $C_G(G_{p_1'}) = G_{p_1'} \times S_1 \trianglelefteq G$, 其中 $S_1 \leq G_{p_1}$. 显然 S_1 中所有子群都正规于 G , 又 $G/G_{p_1'} \cong G_{p_1}$ 也是 MC -群. 此时 G_{p_1} 同构于定理 1.1 中 Janko 所分类的群. 如果即 G_{p_1} 不是亚循环群, 那么由定理 1.1 可得 G_{p_1} 只能是方次数为 p_1 的且阶为 p_1^3 的非交换 p_1 -群. 于是 $S_1 \cong C_{p_1} \times C_{p_1}$, 即是阶为 p_1^2 的初等交换 p_1 -群. 又 S_1 中所有子群正规, 故 $S_1 \leq Z(G)$. 从而得到 G_{p_1} 是交换 p_1 -群, 矛盾. 故 G_{p_1} 是亚循环群.

(2.2) $p_1 \neq p_2$ 且 $m = 1$.

因为 G' 中所有子群均正规于 G , 所以 G' 是交换群. 故 $G' = H \times K$, 其中 K 是 G' 的 Hall $\{p_1, p_2\}'$ -子群. 不妨设 $p_1 > p_2$. 由引理 2.4 可得 $|G/K| = p_1^2 p_2$ 或 $p_1 p_2$, 且当 $|G/K| = p_1^2 p_2$ 时, 由引理 2.4 的证明可得 G 的 Sylow p_1 -子群是阶为 p_1^2 的初等交换子群. 此时可得 $G' = K \times C_{p_1}$. 故可得 $G = (\langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle) \times G'$, 其中 $o(x_1) = p_1$, $o(x_2) = p_2$.

(2.3) $p_1 \neq p_2$ 且 $m \geq 2$. 由于 $\langle x_2, G' \rangle$ 中每个子群均正规于 G , 则 $G_{p_1'} = \langle x_2, G' \rangle$, $G_{p_1'} \trianglelefteq G$, 故 $G = G_{p_1} \times G_{p_1'}$. 又因为 $(G/G_{p_1'})/(G/G_{p_1'})' \cong G_{p_1}/G_{p_1}'$ 是 p_1^m 阶循环群. 所以 G_{p_1} 是 p_1^m 阶循环群.

令 K 是群 G 的 Hall $\{p_1, p_2\}'$ -子群, 则 $\langle x_2, G' \rangle = G_{p_2} \times K$ 每一个子群正规于 G , 其中 G_{p_2} 是 G 的 Sylow p_2 -群. 又设 x_2 是 G 中阶最小的元素使得 $x_2 G'$ 是商群 G/G' 中的 p_2 阶元. 显然 $o(x_2) = p_2^n$.

下面证明 $n = 1$. 显然 $x_2 \notin (G_{p_2})^{p_2}$. 由引理 2.3 可知, 存在子群 G_1 使得 $G_{p_2} = \langle x_2 \rangle \times G_1$, $G_1 \trianglelefteq G$.

令 $\bar{G} = G/G_1 \cong \langle \bar{x}_1 \rangle \times \langle \bar{x}_2 \rangle$, 其中 $o(\bar{x}_2) = p_2^n$. 又 $G_1 \leq G'$, 则 $\bar{G}' = \langle \bar{x}_2^{p_2} \rangle \leq \langle \bar{x}_2 \rangle$. 若 $n > 1$, 则由引理 2.1 可得矛盾. 故 $o(\bar{x}_2) = p_2$ 且 $o(x_2) = p_2$. 又因为 $\langle x_2, G' \rangle$ 中每个子群均正规于 G , 所以 $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \cong G/G'$ 交换. 由此可知 $[x_1, x_2] = 1$, 而 $[x_2, G'] = 1$, 故 $x_2 \in Z(G)$. 因此 $G = (\langle x_1 \rangle \times G') \times \langle x_2 \rangle$, 其中 $\langle x_1 \rangle = G_{p_1}$.

由上述定理 1.1, 可得下面推论.

推论 2.5 如果有限可解群 G 是 MC -群, 那么 G 的导长至多是 3.

显然, 定理 1.2 中 (1.2) 就存在导长是 3 的例子: $G = Q_8 \times C_3$, 即四元数群 Q_8 与 3 阶循环群的半直积.

参 考 文 献

- [1] Lü Heng, Zhou Wei, Guo Xiuyun. Finite groups with small normal closure of cyclic subgroups[J]. Commun. Alg., 2014, 42: 4984–4996.
- [2] Lü Heng, Zhou Wei, Yu Dapeng. Some finite p -groups with bounded index of every cyclic subgroup in its normal closure[J]. J. Alg., 2011, 338: 169–179.
- [3] Lü Heng, Zhou Wei, Guo Xiuyun. Finite 2-groups with index of every cyclic subgroup in its normal closure no greater than 4[J]. J. Alg., 2011, 342: 256–264.
- [4] Janko Z. Some peculiar minimal situations by finite p -groups[J]. Glas. Mat. Ser. III, 2008, 43(63): 111–120.
- [5] 张钰, 吕恒. 有限交换群的直积分解 [J]. 西南大学学报 (自然科学版) 2014, 12: 61–64.
- [6] 徐明曜, 黄健华, 李惠陵, 李世荣. 有限群导引 (下册)[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [7] Berkovich Y. Groups of prime power order[M]. Vol. 1, Berlin: Walter de Gruyter, 2008.

FINITE GROUPS WITH WEAK NORMALITY

XUE Hai-bo¹, ZHANG Yu², LÜ Heng²

(1. College of Electromechanical and Information Engineering,

Chongqing College of Humanities, Science and Technology, Hechuan 401524, China)

(2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In the paper, we study the finite soluble MC -groups. The group G is called an MC -group if there exists a prime p such that $|G : H^G| \mid p$ for each non-normal cyclic subgroup H of G . By using the solvability of G , we give the classification of the finite soluble non-nilpotent MC -groups.

Keywords: finite p -group; MC -group; soluble group

2010 MR Subject Classification: 20D10; 20D15