Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

高维 BBM-Burgers 方程解的衰减估计

徐红梅, 朱丽丽
(河海大学理学院, 江苏 南京 211100)

摘 要: 本文研究了多维空间的 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程. 在解整体存在的前提下, 利用能量积分、时频分解等方法, 得到此方程柯西问题解的衰减估计, 并且此方程的衰减速率与热传导方程的相同.

关键词: BBM-Burgers 方程; 时频分解; 衰减估计
MR(2010) **主题分类号**: 35M11 **中图分类号**: O175.28
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)06-1049-05

1 引言

本文研究了多维空间 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t+\sum\limits_{j=1}^{n}(u^2)_{x_j}=\delta\sum\limits_{j=1}^{n}u_{x_jx_jt}+\sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{l=1}^{N}(-1)^{l+1}\gamma_l\partial_{x_j}^{2l}u),\ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0\ , \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

解的 L^2 衰减估计. 此处 n 表示空间维数, $n\geq 2$, $N\geq 2$ 正整数, $\delta,\gamma_l>0$ 常数, $u_0\in H^{1+[\frac{n}{2}]}$, $H^l(\mathbb{R}^n)$ 是一般的 Sobolev 空间.

BBM 方程是 Benjamin, Bona 和 Mahony [1] 在对流体动力学的物理研究中, 由 Kortewey-deVries (Kdv) 方程精炼而成. 在描述非线性色散系统中小振幅长波的传播时, 需要考虑耗散机制, 由此产生了 BBM-Burgers 方程 (1.1). 如文献 [1,2] 指出, 此方程中 $\gamma_1\sum\limits_{j=1}^{n}\partial_{x_jx_j}u$ 和 $\gamma_2\sum\limits_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^4u$ 有不同的物理背景, 称为粘性项和耗散项. 关于此方程解的存在性和大时间状态得到了广泛的关注, 很多数学工作者对其作出了详细研究.

当 $N=1$ 时, Schonbek [3] 讨论了方程 (1.1) 解的存在性和 $u(x,t;\delta_1,\gamma_1)$ 当 $\delta\to 0,\gamma_1\to 0$ 时的收敛性. 在文献 [4] 中, 赵等人得到了 $N=2$ 时方程 (1.1) 解的存在性和收敛性. 在文献 [5] 中, 王和张得到了 $N=2$, 空间维数 $2\leq n\leq 6$ 时解的整体存在性和衰减估计. 在文献 [6,7] 中, Kondo 和 Webler 分别给出了一维和多维空间情况下 (1.1) 解的存在性和收敛性. 本文中, 延续文 [7] 的结论, 在解整体存在的前提下, 研究解的衰减估计.

本文中, C 表示一般常数, L_p 为 Lebesgue 可测空间. $F(f)$ 或 $\widehat{f}$ 代表函数 $f(x)$ 的傅里叶变换, 且 $F(f)=\displaystyle\int e^{-ix\xi}f(x)\,dx$. $F^{-1}(\widehat{f})$ 或 f 表示函数 $\widehat{f}$ 的逆傅里叶变换.

*收稿日期: 2017-09-18 接收日期: 2017-11-29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571092).
作者简介: 徐红梅 (1973–), 女, 湖北英山, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程理论及其应用.

本文安排如下, 在第二节中给出一些准备工作, 如方程 (1.1) 的解的存在性结论, 解的表达式等. 第三节, 用能量估计、时频分解等工具给出解的衰减估计.

2 准备工作

本文是在解的整体存在前提下做出的, 为了读者方便, 先列出文献 [7] 的结论.

定理 2.1 若 $u_0 \in H^{1+[\frac{n}{2}]}$, 则 (1.1) 式存在整体解 $u \in C((0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n)), s \geq 1 + [\frac{n}{2}]$.

对方程 (1.1) 的变量 x 作傅里叶变换, 得到

$$\widehat{u}_t + \delta|\xi|^2\widehat{u}_t - \sum_{j=1}^{n}(\sum_{l=1}^{N}(-1)^{l+1}\gamma_l \cdot (-1)^l \xi_j^{2l})\widehat{u} = -\sum_{j=1}^{n} i\xi_j F(u^2).$$

若令

$$\widehat{G} = e^{-\frac{\sum\limits_{l=1}^{N}\gamma_l \sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j^{2l}}{1+\delta|\xi|^2}t}\ ,\ \widehat{H} = \frac{1}{1+\delta|\xi|^2}\widehat{G}\ , \tag{2.1}$$

则

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{G}\widehat{u_0} - \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \widehat{H}(t-s)\cdot i\xi_j F(u^2)(s)\,ds. \tag{2.2}$$

下面分析 G 的衰减.

定理 2.2 存在常数 C, 有 $\|\partial_x^\alpha G\|_{L_2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}$, $\|\partial_x^\alpha H\|_{L_2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}$.

证 由 (2.1) 式和 Parseval 等式, 得

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^\alpha G\|_{L_2} &= \|\xi^\alpha \widehat{G}\|_{L_2} \\
&\leq (\int_{|\xi|^2\leq\frac{1}{\delta}} |\xi|^{2|\alpha|} e^{-\frac{2\gamma_1\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j^2}{2}t}\,d\xi)^{\frac{1}{2}} + (\int_{|\xi|^2\geq\frac{1}{\delta}} |\xi|^{2|\alpha|} e^{-\frac{2\sum\limits_{l=1}^{2}\gamma_l\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j^{2l}}{2\delta|\xi|^2}t}\,d\xi)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\int_{|\xi|^2\leq\frac{1}{\delta}} (|\xi|\sqrt{t})^{2|\alpha|} e^{-\gamma_1|\xi|^2 t} t^{-|\alpha|-\frac{n}{2}}\,d\xi\sqrt{t})^{\frac{1}{2}} + (\int_{|\xi|^2\geq\frac{1}{\delta}} |\xi|^{2|\alpha|} e^{-\frac{\gamma_1}{\delta}t} e^{-\frac{\gamma_2|\xi|^4}{\delta|\xi|^2}t}\,d\xi)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

由 (2.1), (2.3) 式和 Parseval 等式, 得

$$\|\partial_x^\alpha H\|_{L_2} = \|\xi^\alpha \frac{1}{1+\alpha|\xi|^2}\widehat{G}\|_{L_2} \leq \|\xi^\alpha\widehat{G}\|_{L_2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}.$$

定理得证.

3 衰减估计

由能量积分, 可得下述定理.

定理 3.1 若 $u_0 \in H^{1+[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n)$, 可得 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

证 在 (1.1) 式两边同乘以 u, 再关于变量 x 积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L_2}^2 + \frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\|u_{x_j}\|_{L_2}^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}\gamma_l\|\partial_{x_j}^l u\|_{L_2}^2 = -\int_{R^n} u\sum_{j=1}^{n}(u^2)_{x_j}\,dx = 0. \tag{3.1}$$

于是 $\|u\|_{L_2}^2+\delta\sum\limits_{j=1}^{n}\|u_{x_j}\|_{L_2}^2\leq\|u_0\|_{L_2}^2+\delta\sum\limits_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u_0\|_{L_2}^2$. 定理得证.

作光滑截断函数 $\chi_0(\eta)=\begin{cases}1, & |\eta|\leq 1\\ 0, & |\eta|>2.\end{cases}$ 并令 $\chi(t,\xi)=\chi_0((1+t)|\xi|^2)$. 定义时频算子 $\chi(t,D)$, 它的特征 $\chi(t,\xi)$. 令 $u_L(x,t)=\chi(t,D)u(x,t)$, 则对 $u_L(x,t)$ 有下述估计.

定理 3.2 当 $u_0\in L_1$, 有 $\|\partial_x^\alpha u_L(x,t)\|_{L_2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}$.

证 由 (2.2) 式和 Minkowski 不等式, 得

$$\|\partial_x^\alpha u_L(x,t)\|_{L_2}\leq\|\partial_x^\alpha G\|_{L_2}\|u_0\|_{L_1}+(\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\|\chi(t,D)\partial_x^\alpha\partial_{x_j}H(t-s)\|_{L_2}^2\|u^2\|_{L_1}^2(s)ds)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

由 $u_0\in L_1$ 和定理 2.2,

$$\|\partial_x^\alpha G\|_{L_2}\|u_0\|_{L_1}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}. \tag{3.3}$$

由定理 3.1 和 (2.1) 式, 得

$$\begin{aligned}&(\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\|\chi(t,D)\partial_x^\alpha\partial_{x_j}H(t-s)\|_{L_2}^2\|u^2\|_{L_1}^2(s)\,ds)^{\frac{1}{2}}\\ \leq\ &(\sum_{j=1}^{n}\int_0^t(\int_{|\xi|^2t\leq 2}|\xi|^{2|\alpha|+2}\,d\xi)\|u\|_{L_2}^4\,ds)^{\frac{1}{2}}\\ \leq\ &(\sum_{j=1}^{n}\int_0^t(\int_{|\xi|^2t\leq 2}(|\xi|\sqrt{t})^{2|\alpha|+2}t^{-|\alpha|-1-\frac{n}{2}}\,d\xi\sqrt{t})\|u\|_{L_2}^4\,ds)^{\frac{1}{2}}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

由 (3.2)–(3.4) 式, 定理得证.

定理 3.3 $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}$.

证 令 $\eta(t)=\sqrt{\frac{\mu}{1+t}}$, $\mu>0$ 待定. 由 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2\ &=\ \int|\xi|^2|\widehat{u}|^2\,d\xi\geq\int_{|\xi|\geq\eta(t)}|\xi|^2|\widehat{u}|^2\,d\xi\\ &\geq\ \eta^2(t)(\|u\|_{L_2}^2-\int_{|\xi|\leq\eta(t)}|\widehat{u}|^2\,d\xi)=\eta^2(t)(\|u\|_{L_2}^2-\|\chi(t,D)u\|_{L_2}^2).\end{aligned} \tag{3.5}$$

同理

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\|\partial_{x_jx_j}u\|_{L_2}^2\ &\geq\ C_1\int|\widehat{u}|^2|\xi|^4\,d\xi\\ &\geq\ C_1\eta^2(t)(\sum_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2-\sum_{j=1}^{n}\|\chi(t,D)\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2).\end{aligned} \tag{3.6}$$

由 (3.5), (3.6) 和 (3.1) 式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u\|_{L_2}^2+\delta\frac{d}{dt}(\sum_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2)+\gamma_1\eta^2(t)\|u\|_{L_2}^2+\gamma_2\eta^2(t)(\sum_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2)\\ \leq\ &\gamma_1\eta^2(t)\|\chi(x,D)u\|_{L_2}^2+\gamma_2\eta^2(t)\sum_{j=1}^{n}\|\chi(x,D)\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

令 $P=\|u\|_{L_2}^2+\delta\sum\limits_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2$, 由定理 3.2 和 (3.7) 式, 得

$$\frac{dP}{dt}+\gamma_1\frac{\mu}{1+t}\|u\|_{L_2}^2+\gamma_2\frac{\mu}{1+t}(\sum_{j=1}^{n}\|\partial_{x_j}u\|_{L_2}^2)\leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{2}},$$

$$\frac{dP}{dt}+\min(\gamma_1,\frac{\gamma_2}{\delta})\frac{\mu}{1+t}P\leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{2}}.$$

令 $a=\min(\gamma_1,\frac{\gamma_2}{\delta})\mu>0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{d(e^{\int_0^t\frac{a}{1+s}\,ds}P(t))}{dt}&=e^{\int_0^t\frac{a}{1+s}\,ds}(\frac{a}{1+t}P(t)+\frac{dP}{dt})\\ &\leq\ Ce^{\int_0^t\frac{a}{1+s}\,ds}(1+t)^{-1-\frac{n}{2}}=C(1+t)^{a-1-\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

取 $a-\frac{n}{2}>1$, 则 $P(t)\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}$, 定理得证.

再由数学归纳法可得本文结论.

定理 3.4 当 $u_0\in L_1\cap H^{1+[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\|\partial_x^\alpha u\|_{L_2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}$.

证 当 $|\alpha|=0$ 时, 由定理 3.3 可得. 由 (2.2) 式和 Minkowski 不等式, 有

$$\|\partial_x^\alpha u\|_{L_2}^2\leq\|\partial_x^\alpha G\|_{L_2}^2\|u_0\|_{L_1}^2+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\|\partial_x^\alpha\partial_{x_j}H(t-s)\|_{L_2}^2\|u^2(s)\|_{L_1}^2\,ds. \tag{3.8}$$

当 $|\alpha|=1$ 时, 由定理 2.2 和定理 3.3 得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|\partial_x^\alpha\partial_{x_j}H(t-s)\|_{L_2}^2\|u^2(s)\|_{L_1}^2\,ds\leq\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{n}{2}-1-1}\|u\|_{L_2}^4\,ds\\ \leq\ &\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{n}{2}-2}(1+s)^{-n}\,ds\leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{2}}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由 (3.3), (3.8) 和 (3.9) 式得, 当 $|\alpha|=1$ 时, 定理成立.

假设当 $|\alpha|=k$ 时, 定理成立. 则当 $|\alpha|=k+1$ 时, 不妨设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 且 $\alpha_1>1$. 令 $\beta=(\alpha_1-1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $|\beta|=k$, 且

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|\partial_x^\alpha\partial_{x_j}H(t-s)\|_{L_2}^2\|u^2(s)\|_{L_1}^2\,ds\\ =\ &\int_0^{\frac{t}{2}}\|\partial_x^\alpha\partial_{x_j}H(t-s)\|_{L_2}^2\|u^2(s)\|_{L_1}^2\,ds+\int_{\frac{t}{2}}^t\|\partial_{x_j}\partial_{x_1}H(t-s)\|_{L_2}^2\|\partial_x^\beta u^2(s)\|_{L_1}^2\,ds\\ =\ &\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-s)^{-\frac{n}{2}-|\alpha|-1}(1+s)^{-n}\,ds\\ &+\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\int_{\frac{t}{2}}^t(1+t-s)^{-\frac{n}{2}-2}\|\partial_x^{\beta_1}u(s)\|_{L_2}^2\|\partial_x^{\beta_2}u(s)\|_{L_2}^2\,ds\\ \leq\ &C(1+t)^{-\frac{n}{2}-|\alpha|}+C\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\int_{\frac{t}{2}}^t(1+t-s)^{-\frac{n}{2}-2}(1+s)^{-\frac{n}{2}-|\beta_1|}(1+s)^{-\frac{n}{2}-|\beta_2|}\,ds\\ \leq\ &C(1+t)^{-\frac{n}{2}-|\alpha|}+C(1+t)^{-n-|\alpha|+1}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}-|\alpha|}.\end{aligned}$$

由数学归纳法

$$(\int_0^t \|\partial_x^\alpha \partial_{x_j} H(t-s)\|_{L_2}^2 \|u^2(s)\|_{L_1}^2\, ds)^{\frac{1}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{|\alpha|}{2}}. \tag{3.10}$$

由 (3.3), (3.8) 和 (3.10) 式, 定理得证.

参 考 文 献

[1] Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems [J]. Phil. R. Soc. London, 1972, 272: 47–78.

[2] Guo B. The vanishing viscosity method and the viscosity of the difference schemne [M]. Beijing: Science Press, 1972.

[3] Schonbek M E. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations [J]. Comm. Partial Diff. Equ., 1982, 7(8): 959–1000.

[4] Zhao H J, Xuan B J. Existence and convergence of solutions for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equations with dissipative term [J]. Nonl. Anal.: TMA, 1997, 28(11): 1835–1849.

[5] Wang W K, Zhang D D. Large-time behavior for the solution to the generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation with large initial data in the whole-space [J]. Math. Anal. Appl., 2014, 411(1): 144–165.

[6] Kondo C I, Webler C M. Higher-order for the generalized BBM-Burgers equation: existence and convergence results [J]. Appl. Anal., 2009, 88(7): 977–995.

[7] Kondo C I, Webler C M. Higher-order for the multidimensional generalized BBM-Burgers equation: existence and convergence results [J]. Acta. Appl. Math., 2010, 111(1): 45–64.

THE DECAY ESTIMATE OF SOLUTIONS FOR BBM-BURGERS EQUATION IN MULTI DIMENSION

XU Hong-mei, ZHU Li-li

(*College of Science, Hohai University, Nanjing 211100, China*)

Abstract: In this paper, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation in multi-dimensional space is investigated. When the global solution of this equation with initial data exists, by using methods of energy estimate and time-frequency decomposition, we obtain the decay estimate of the solution, and the decay rate is the same as that of the heat conduction equation.

Keywords: BBM-Burgers equation; time-frequency decomposition; decay estimate

2010 MR Subject Classification: 35M11