

Fock 型空间上的加权复合算子

赵 健, 杨丛丽, 潘维焯

(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550001)

摘要: 本文研究了从 F_α^2 到 $F_\alpha^{2,m}$ 上的加权复合算子的一些性质. 利用一个重要的估计, 获得了有关有界性和紧性的几个等价刻画, 并且给出了该算子是 $F_\alpha^{2,m}$ 上的 Hilbert-Schmidt 类算子的一个充分必要条件.

关键词: Fock 型空间; 加权复合算子; 有界性; 紧性; Hilbert-Schmidt 类算子

MR(2010) 主题分类号: 30H20; 47B07; 47B38 中图分类号: O177.1

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2018)05-0933-10

1 引言

设 \mathbb{C} 表示复平面, $H(\mathbb{C})$ 表示在 \mathbb{C} 上的解析函数全体, dA 表示 \mathbb{C} 上的 Lebesgue 面积测度, F_α^2 是由 $L^2(\mathbb{C}, e^{-\alpha|z|^2} dA(z))$ 中的整函数所构成的空间, $0 < \alpha < \infty$, 即

$$F_\alpha^2 = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} dA(z) < \infty\}.$$

当 $\alpha = 1$ 时, F_α^2 就是经典的 Fock 空间 F^2 , F_α^2 是一个再生核 Hilbert 空间, 其上的内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} e^{-\alpha|z|^2} dA(z), \quad f, g \in F_\alpha^2,$$

其规范正交系为

$$e_n(z) = \frac{(\sqrt{\alpha}z)^n}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 多项式函数在 F_α^2 中稠密, 其再生核函数为 $K_\omega(z) = e^{\alpha z \bar{\omega}}$, $\omega, z \in \mathbb{C}$. 并且对任意的 $f \in F_\alpha^2$, $f(\omega) = \langle f, K_\omega \rangle$, $\omega, z \in \mathbb{C}$. 直接计算可知, K_ω 的范数为 $\|K_\omega\| = e^{\frac{\alpha|\omega|^2}{2}}$, $\omega \in \mathbb{C}$. 因此对每个固定的 ω , $K_\omega \in F_\alpha^2$, 设 k_ω 为 K_ω 的正规化再生核, 即 $k_\omega = \frac{K_\omega}{\|K_\omega\|}$, 则

$$k_\omega(z) = e^{\alpha z \bar{\omega} - \frac{\alpha|\omega|^2}{2}}, \quad z, \omega \in \mathbb{C}.$$

在过去的几十年中, 学者们对 Fock 空间的研究主要是针对 F_α^p 展开的, 可参见文献 [1-7] 等. 2012 年 Cho 和 Zhu^[8] 引进了 Fock-Sobolev 空间 $F^{p,m}$ 的概念, 当 $p = 2$ 时, 对任意给定的正整数 m , Fock-Sobolev 空间 $F^{2,m}$ 由 m 阶导函数属于 F^2 的整函数构成, $F^{2,m}$ 的范数为

$$\|f\|_{2,m} = |f(0)| + \dots + |f^{m-1}(0)| + \|f^{(m)}\|, \quad \forall f \in F^{2,m},$$

*收稿日期: 2017-05-05

接收日期: 2017-07-21

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11101099; 11561012).

作者简介: 赵健 (1992-), 男, 贵州贵阳, 硕士, 主要研究方向: 函数论.

通讯作者: 杨丛丽.

这里 $\|\cdot\|$ 表示 F^2 的范数.

Cho 和 Zhu^[8] 证明了 $f \in F^{2,m}$ 当且仅当 $z^m f \in F^2$. 因此, $F^{2,m}$ 的范数也可以表示为

$$\|f\|_{2,m}^2 = \frac{1}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |z^m f(z)|^2 e^{-|z|^2} dA(z), \quad \forall f \in F^{2,m},$$

这里的常数 $\frac{1}{\pi m!}$ 刚好使得积分 $\frac{1}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |z|^{2m} e^{-|z|^2} dA(z) = 1$. 稍作一般化, 对任意 $0 < \alpha < \infty$, 仍然有 $f \in F_{\alpha}^{2,m}$ 当且仅当 $z^m f(z) \in F_{\alpha}^2$. 在结果中可能会相差一个常数因子, 而在具体的证明过程中, 常数 α 并没有本质作用. 显然, $F_{\alpha}^{2,m}$ 是一个 Hilbert 空间, 并且 $F_{\alpha}^{2,m} \subset F_{\alpha}^2$.

为了使用方便, 本文将使用记号 $\|\cdot\|$ 为 F_{α}^2 的范数, 使用记号 $\|\cdot\|_{2,m}$ 为 $F_{\alpha}^{2,m}$ 的范数, 那么可定义 Fock 空间 $F_{\alpha}^{2,m}$,

$$F_{\alpha}^{2,m} = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{2,m}^2 = \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) < \infty\}.$$

同样的, 这里的常数 $\frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!}$ 刚好使得积分 $\frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |z|^{2m} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) = 1$. 类似于文献 [8], 通过计算可知, $F_{\alpha}^{2,m}$ 的规范正交系为

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{m!}{(m+n)!}} (\sqrt{\alpha}z)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

有关 Fock-Sobolev 空间的更多研究, 可参见文献 [9–14].

设 φ 是 \mathbb{C} 上解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$, 则线性算子 $C_{\varphi}^{\mu} = \mu f \circ \varphi$, $f \in H(\mathbb{C})$ 称为加权复合算子. 有关 Fock 空间上加权复合算子的更多信息可参见文献 [15–20, 23], 其中, 文献 [19] 给出了 F^2 空间上加权复合算子的有界性和紧性的完全刻画. 文献 [20] 则给出了加权复合算子是 F^2 上的 Hilbert-Schmidt 算子的一个等价刻画.

设 $T \in B(X)$, X 是 Hilbert 空间, 称 T 是 X 上的 Hilbert-Schmidt 算子, 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|_X^2 < \infty.$$

本文研究从 F_{α}^2 到 $F_{\alpha}^{2,m}$ 上加权复合算子的有界性和紧性, 并且给出了加权复合算子是 $F_{\alpha}^{2,m}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子的一个充分必要条件.

在本文中 M 表示一个正常数, 每次出现不一定相同.

2 主要结果及证明

为了证明本文的主要结果, 需要用到下面的一些辅助结论.

引理 2.1 设 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$, $0 < \alpha < \infty$, 则 $C_{\varphi}^{\mu} : F_{\alpha}^2 \rightarrow F_{\alpha}^{2,m}$ 为紧的充分必要条件为 $C_{\varphi}^{\mu} : F_{\alpha}^2 \rightarrow F_{\alpha}^{2,m}$ 有界且对 F_{α}^2 中任意有界并在 \mathbb{C} 的任意紧子集上一致收敛于 0 的序列 $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{\varphi}^{\mu} f_n\|_{2,m} = 0.$$

通过使用类似于文献 [21, 命题 3.11] 的方法, 可以证明引理 2.1.

引理 2.2 若序列 $\{f_n\}$ 在 F_α^2 中弱收敛于 0, 则 $\{f_n\}$ 一致有界且在 \mathbb{C} 的任意紧子集上一致收敛于 0.

证 由于序列 $\{f_n\}$ 在 F_α^2 中弱收敛于 0, 则对任意 $f \in F_\alpha^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, f \rangle = 0$. 于是

$$f_n(z) = \langle f_n, K_z \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

因此存在与 z 有关的常数 $M_z > 0$, 使得 $|f_n(z)| \leq M_z$, 而 \mathbb{C} 是完备的, 由一致有界原理可得序列 $\{f_n\}$ 一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $M = \sup_{n \geq 1} \|f_n\|$. 设 \mathbb{D} 是 \mathbb{C} 中的任一紧子集, K_z 为 F_α^2 的再生核, 可将 K_z 看成是 \mathbb{C} 到 F_α^2 上的一个映射, 且对任意 $z_0 \in \mathbb{D}$, 有

$$\begin{aligned} \|K_z - K_{z_0}\|^2 &= \langle K_z - K_{z_0}, K_z - K_{z_0} \rangle \\ &= \|K_z\|^2 + \|K_{z_0}\|^2 - \langle K_z, K_{z_0} \rangle - \langle K_{z_0}, K_z \rangle \\ &= e^{\alpha|z|^2} + e^{\alpha|z_0|^2} - e^{\alpha z_0 \bar{z}} - e^{\alpha z \bar{z}_0}. \end{aligned}$$

显然, 当 $z \rightarrow z_0$ 时, $\|K_z - K_{z_0}\| \rightarrow 0$, 这说明 K_z 为连续映射, 由于 \mathbb{D} 是紧的, 故 K_z 在 \mathbb{D} 上一致连续. 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $z', z'' \in \mathbb{D}$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时,

$$\|K_{z'} - K_{z''}\| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

由于 \mathbb{D} 紧, 则 \mathbb{D} 是完全有界的, 于是, 对上述的 δ , 存在 $z_1, z_2, \dots, z_q \in \mathbb{D}$, 使得 $\mathbb{D} \subset \bigcup_{i=1}^q B(z_i, \delta)$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, K_{z_i} \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

因此对上述的 ε , 存在 $N_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, q$, 当任意 $n > N_i$ 时, $|f_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而取 $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_q\}$, 对任意的 $z \in \mathbb{D}$, 一定存在 $z_j \in \mathbb{D}$, $1 \leq j \leq q$, 使得 $|z - z_j| < \delta$, 当任意的 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j)| \leq \|f_n\| \|K_z - K_{z_j}\| + |f_n(z_j)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\{f_n\}$ 在 \mathbb{C} 的任一紧子集上一致收敛于 0.

引理 2.3 设 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$, $0 < \alpha < \infty$, 则 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 为紧的充分必要条件为 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界且对 F_α^2 中任意弱收敛于 0 的序列 $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_\varphi^\mu f_n\|_{2,m} = 0.$$

证 由引理 2.1 和引理 2.2 即可得证.

引理 2.4 设 k_ω 为 F_α^2 中的正规化再生核, 则当 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, k_ω 弱收敛于 0. 即对任意的 $f \in F_\alpha^2$,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \langle f, k_\omega \rangle = 0.$$

证 设 p 为 F_α^2 中的任一多项式, 则

$$p(\omega) = \langle p, K_\omega \rangle = \|K_\omega\| \langle p, k_\omega \rangle, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

于是

$$\langle p, k_\omega \rangle = e^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}} p(\omega) \rightarrow 0, \quad |\omega| \rightarrow \infty.$$

由多项式在 F_α^2 中稠密知, 对任意 $f \in F_\alpha^2$, $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \langle f, k_\omega \rangle = 0$.

下面的引理是文献 [22, 推论 2.8] 稍作推广后的结果, 它在本文主要结果的证明中有着重要作用. 当 $\alpha = 1$ 时, 就是文献 [22] 中的结论.

引理 2.5 设 $f \in H(\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{C}, \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z))$, $0 < \alpha < \infty$, 则对任意 $p > 0$, $z \in \mathbb{C}$, 存在常数 $M > 0$, 使得

$$|f(z)|^p e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} \leq \frac{M\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |f(z)| e^{-\frac{\alpha|z|^2}{p}} |z|^{\frac{2m}{p}} |f|^p dA(z).$$

使用类似于文献 [22] 的方法可以证明引理 2.5.

下面的结论来自于文献 [23].

引理 2.6 设 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$, $0 < \alpha < \infty$, 若

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} < \infty,$$

则存在常数 $a, b \in \mathbb{C}$ 且 $|a| \leq 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$. 进一步, 若

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} = 0,$$

则 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$ 且 $|a| < 1$.

严格地说, 引理 2.6 是文献 [23] 中结论稍作推广后的结果, 当 $\alpha = 1$ 时, 引理 2.6 就是文献 [23] 中的结论. 实际上, 上述各个引理中的常数 α 在具体的证明中并没有本质作用.

接下来证明本文的主要结论.

定理 2.1 设 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$ 且 $\mu \neq 0$, $0 < \alpha < \infty$, 则下列陈述等价:

(i) $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界;

(ii)

$$\sup_{\omega \in \mathbb{C}} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2 + |\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z) < \infty; \quad (2.1)$$

(iii) $\mu \in F_\alpha^{2,m}$, 存在 $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| \leq 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$ 且

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} < \infty. \quad (2.2)$$

证 (i) \Rightarrow (ii). 设 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界, k_ω 为 F_α^2 中的正规化再生核, 显然, $k_\omega \in F_\alpha^2$, $\omega \in \mathbb{C}$, 因此

$$\begin{aligned} \|C_\varphi^\mu k_\omega\|_{2,m}^2 &= \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |C_\varphi^\mu k_\omega(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2 + |\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z) \\ &\leq \|C_\varphi^\mu\|^2 \|k_\omega\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

从而

$$\sup_{\omega \in \mathbb{C}} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2+|\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z) < \infty.$$

即 (2.1) 式成立.

(ii) \Rightarrow (iii). 若 (2.1) 式成立, 则对任意 $\omega \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2+|\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z) < \infty,$$

即

$$\frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |C_{\varphi}^{\mu} k_{\omega}(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) < \infty.$$

这说明 $C_{\varphi}^{\mu} k_{\omega} \in F_{\alpha}^{2,m}$, 由引理 2.5, 存在 $M > 0$, 使得

$$|C_{\varphi}^{\mu} k_{\omega}(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} < \frac{M\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |C_{\varphi}^{\mu} k_{\omega}(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) < \infty,$$

即

$$|\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega} - \frac{\alpha|\omega|^2}{2}}|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} < \infty, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

特别地, 取 $\omega = \varphi(z)$, 则

$$|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} = |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega} - \frac{\alpha|\omega|^2}{2}}|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} < \infty, \quad z \in \mathbb{C}.$$

从而 (2.2) 式成立, 由 (2.2) 式容易得到 $\sup_{z \in \mathbb{C}} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} < \infty$. 由引理 2.6, 存在常数 $a, b \in \mathbb{C}$, 且 $|a| \leq 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$. 在 (2.1) 式中, 令 $\omega = 0$, 即可得

$$\frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) < \infty.$$

这表明 $\mu \in F_{\alpha}^{2,m}$.

(iii) \Rightarrow (i). 若存在常数 $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| \leq 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$. 令 $\omega = \varphi(z)$, 则当 $0 < |a| \leq 1$ 时, $z = \frac{\omega}{a} - \frac{b}{a}$, $\omega \in \mathbb{C}$. 由 (2.2) 式, 存在 $M > 0$, 使得

$$M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m}.$$

于是对任意的 $f \in F_{\alpha}^2$,

$$\begin{aligned} \|C_{\varphi}^{\mu} f\|_{2,m}^2 &= \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |f(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} |f(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|\varphi(z)|^2} dA(z) \\ &\leq \frac{M\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |f(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|\varphi(z)|^2} dA(z) \\ &= \frac{M\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |f(\omega)|^2 e^{-\alpha|\omega|^2} dA\left(\frac{\omega}{a} - \frac{b}{a}\right) \\ &= \frac{M\alpha^m}{|a|^{2m}} \|f\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

这说明 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界, 并且这时有

$$\|C_\varphi^\mu\|^2 \leq \frac{M\alpha^m}{|a|^{2m}}.$$

当 $|a| = 0$ 时, $\varphi(z) = b$, 于是对任意的 $f \in F_\alpha^2$, $C_\varphi^\mu f = \mu f(b)$. 因此

$$\|C_\varphi^\mu f\|_{2,m}^2 = |f(b)|^2 \|\mu\|_{2,m}^2,$$

由 $\mu \in F_\alpha^{2,m}$ 易知 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界.

定理 2.2 设 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$ 且 $\mu \neq 0$, $0 < \alpha < \infty$, 则下列陈述等价:

- (i) $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 是紧的;
- (ii) $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界, 且

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2+|\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z) = 0; \quad (2.3)$$

- (iii) $\mu \in F_\alpha^{2,m}$, 存在常数 $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$ 且

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} = 0. \quad (2.4)$$

证 (i) \Rightarrow (ii). 设 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 是紧的, 由引理 2.3, 对于 F_α^2 中任意弱收敛于 0 的点列 $\{f_n\}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_\varphi^\mu f_n\|_{2,m} = 0.$$

设 k_ω 为 F_α^2 中的正规化再生核, $\{\omega_n\}$ 为 \mathbb{C} 中任意趋于无穷的数列, 由引理 2.4, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{k_{\omega_n}\}$ 弱收敛于 0. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_\varphi^\mu k_{\omega_n}\|_{2,m}^2 = 0,$$

从而

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2+|\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z) = 0.$$

即 (2.3) 式成立. $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界是显然的.

(ii) \Rightarrow (iii). 设 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界, 由定理 2.1 知 $\mu \in F_\alpha^{2,m}$, 且存在常数 $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| \leq 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$. 由于 $C_\varphi^\mu k_\omega \in F_\alpha^{2,m}$, 由引理 2.5, 存在 $M > 0$, 使得

$$\begin{aligned} |C_\varphi^\mu k_\omega(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} &< \frac{M\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |C_\varphi^\mu k_\omega(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= \frac{M\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega}}|^2 e^{-\alpha(|z|^2+|\omega|^2)} |z|^{2m} dA(z), \quad \omega \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

由 (2.3) 式可得

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega} - \frac{\alpha|\omega|^2}{2}}|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |C_\varphi^\mu k_\omega(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} = 0.$$

由上式,任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_\varepsilon > 0$, 当 $|\omega| > R_\varepsilon$ 时,

$$|\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega} - \frac{\alpha|\omega|^2}{2}}|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} < \varepsilon.$$

当 $0 < |a| \leq 1$ 时, 令 $\omega = \varphi(z)$, 则 $|\omega| = |\varphi(z)| \rightarrow \infty$, $|z| \rightarrow \infty$, 因此, 对上述的 R_ε , 存在 $R' > 0$, 当 $|z| > R'$ 时, 有 $|\omega| = |\varphi(z)| > R_\varepsilon$. 于是对上述的 ε , 取 $R = R'$, 当 $|z| > R$ 时, $|\omega| = |\varphi(z)| > R_\varepsilon$ 且

$$|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} = |\mu(z)|^2 |e^{\alpha\varphi(z)\bar{\omega} - \frac{\alpha|\omega|^2}{2}}|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} < \varepsilon.$$

即 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} = 0$. 因此这时 (2.4) 式成立.

当 $|a| = 0$ 时, $\varphi(z) = b$, 由上述情形易知, 这时 (2.4) 式仍然成立.

由 (2.4) 式容易得到

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} = 0.$$

再由引理 2.6 知 $|a| < 1$.

(iii) \Rightarrow (i). 设 $\{f_n\}$ 为 F_α^2 中任意有界且在 \mathbb{C} 的任一紧子集上一致收敛于 0 的序列, 则存在 $C_1 > 0$, 使得 $\|f_n\| \leq C_1$. 由于 $\mu \in F_\alpha^{2,m}$, 则存在 $C_2 > 0$, 使得 $\|\mu\|_{2,m} \leq C_2$. 若存在常数 $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, 使得 $\varphi(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$. 令 $\omega = \varphi(z)$, 当 $0 < |a| < 1$ 时,

$$z = \frac{1}{a}\omega - \frac{b}{a}, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

由 (2.4) 式, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 当 $|z| > R$ 时,

$$|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} < \frac{L}{2C_1} \varepsilon,$$

这里 $L = \frac{|a|^{2m}}{\alpha^m}$. 记 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, 则 \mathbb{D} 为 \mathbb{C} 中的紧子集, 由于 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, 则 φ 连续, 因此 $\varphi(\mathbb{D})$ 亦为 \mathbb{C} 中的紧子集. 从而, 对上述的 ε , 存在 $N_\varepsilon > 0$, 当 $n > N_\varepsilon$ 时, 对任意的 $z \in \mathbb{D}$, 有 $\varphi(z) \in \varphi(\mathbb{D})$, 进而

$$|f_n(\varphi(z))|^2 < \frac{\varepsilon}{2C_2^2},$$

那么取 $N = N_\varepsilon$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|C_\varphi^\mu f_n\|_{2,m}^2 &= \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |f_n(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{D}} |\mu(z)|^2 |f_n(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &\quad + \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} |\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m} |f_n(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|\varphi(z)|^2} dA(z) \\ &< \frac{\varepsilon}{2C_2^2} \|\mu\|_{2,m}^2 + \frac{L}{2C_1^2} \varepsilon \cdot \frac{\alpha^{m+1}}{|a|^2 \pi m!} \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} |f_n(\omega)|^2 e^{-\alpha|\omega|^2} dA(\omega) \\ &= \frac{\varepsilon}{2C_2^2} \|\mu\|_{2,m}^2 + \frac{L}{2C_1^2} \varepsilon \cdot \frac{\alpha^m}{|a|^{2m}} \|f_n\|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2C_2^2} C_2^2 + \frac{L}{2C_1^2} \varepsilon \cdot \frac{1}{L} C_1^2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_\varphi^\mu f_n\|_{2,m} = 0$.

当 $|a| = 0$ 时, $\varphi(z) = b$, 此时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_\varphi^\mu f_n\|_{2,m} = \|\mu\|_{2,m} \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(b)| = 0.$$

综上, 当 $|a| < 1$ 时, 由引理 2.1 可得, $C_\varphi^\mu : F_\alpha^2 \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 是紧的.

接下来讨论 Hilbert 空间上的一类重要算子—Hilbert-Schmidt 算子. 文献 [8] 给出了 Fock 空间 F^2 上的加权复合算子是 Hilbert-Schmidt 算子的完全刻画, 其证明过程可以平行地推广到 \mathbb{C}^n 上的 Fock 空间. 下面给出 $F_\alpha^{2,m}$ 空间上的加权复合算子 C_φ^μ 是 Hilbert-Schmidt 算子的一个充分必要条件.

定理 2.3 设 φ 是 \mathbb{C} 上的解析自映射, $\mu \in H(\mathbb{C})$, $0 < \alpha < \infty$, 若 $C_\varphi^\mu : F_\alpha^{2,m} \rightarrow F_\alpha^{2,m}$ 有界, 则 C_φ^μ 是 $F_\alpha^{2,m}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子的充分必要条件为

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m}}{|\varphi(z)|^{2m}} dA(z) < \infty. \quad (2.5)$$

证 设 (2.5) 式成立, 记 e_n 为 $F_\alpha^{2,m}$ 的规范正交系, 则

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{m!}{(m+n)!}} (\sqrt{\alpha}z)^n, \quad z \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi^\mu e_n\|_{2,m}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |e_n(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 \frac{m!}{(m+n)!} \alpha^n |\varphi(z)|^{2n} e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m}}{|\varphi(z)|^{2m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha|\varphi(z)|^2)^{m+n}}{(m+n)!} dA(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m}}{|\varphi(z)|^{2m}} dA(z) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 \frac{(\alpha|\varphi(z)|^2)^{k-m}}{k!} e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &< \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m}}{|\varphi(z)|^{2m}} dA(z) < \infty. \end{aligned}$$

因此 C_φ^μ 是 $F_\alpha^{2,m}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子.

反过来, 设 C_φ^μ 是 $F_\alpha^{2,m}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi^\mu e_n\|_{2,m}^2 < \infty.$$

由上述证明过程有

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|^2 e^{\alpha|\varphi(z)|^2 - \alpha|z|^2} |z|^{2m}}{|\varphi(z)|^{2m}} dA(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|C_{\varphi}^{\mu} e_n\|_{2,m}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 \frac{(\alpha|\varphi(z)|^2)^{k-m}}{k!} e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z). \end{aligned}$$

显然, 要得到 (2.5) 式, 只需上式等号右边第二项有界即可. 为此, 令

$$g_k(z) = \frac{(\sqrt{\alpha}z)^{k-m}}{\sqrt{k!}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

对每个 k , 由于 $z^m g_k(z) = \frac{(\sqrt{\alpha}z)^k}{\sqrt{k!}}$ 是 F_{α}^2 规范正交系的前 $m-1$ 项, 则 $z^m g_k \in F_{\alpha}^2$, 于是 $g_k \in F_{\alpha}^{2,m}$, 而 $C_{\varphi}^{\mu}: F_{\alpha}^{2,m} \rightarrow F_{\alpha}^{2,m}$ 有界, 因此, 存在 $M > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^{m+1}}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 \frac{(\alpha|\varphi(z)|^2)^{k-m}}{k!} e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= m! \cdot \frac{\alpha^{m+1}}{\pi m!} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 |g_k(\varphi(z))|^2 e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) \\ &= m! \cdot \|C_{\varphi}^{\mu} g_k\|_{2,m}^2 \leq m! \cdot M < \infty. \end{aligned}$$

进而有

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha^{m+1}}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\mu(z)|^2 \frac{(\alpha|\varphi(z)|^2)^{k-m}}{k!} e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2m} dA(z) < \infty.$$

故 (2.5) 式成立.

参 考 文 献

- [1] Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform [J]. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, 14: 187–214.
- [2] Furdui O. On a class of integral operators [J]. *Integ. Equ. Oper. The.*, 2010, 66: 469–483.
- [3] Isralowitz J, Zhu K H. Toeplitz operators on the Fock space [J]. *Integ. Equ. Oper. The.*, 2010, 66: 593–611.
- [4] Perälä A, Schuster A, Virtanen J A. Hankel operators on Fock spaces [J]. *Oper The. Adv. Appl.*, 2014, 236: 377–390.
- [5] Bauer W. Mean oscillation and Hankel operators on the Segal-Bergmann space [J]. *Integ. Equ. Oper. The.*, 2005, 52: 1–15.
- [6] Gryc W E, Kemp T. Duality in Segal-Bergmann spaces [J]. *J. Funct. Anal.*, 2011, 261: 1591–1623.
- [7] Bauer W, Isralowitz J. Compactness characterization of operators in the Toeplitz algebra of the Fock space F_{α}^p [J]. *J. Funct. Anal.*, 2012, 263: 1323–1355.
- [8] Cho H R, Zhu K. Fock-Sobolev spaces and their Carleson measures [J]. *ArXiv: 1212. 0737*, 2012.
- [9] Cho H R, Choe B R, Koo H. Fock-Sobolev spaces of fractional order [J]. *Poten. Anal.*, 2015, 43: 199–240.

- [10] Cho H R, Choe B R, Koo H. Combinations of composition operators on the Fock-Sobolev space [J]. *Poten. Anal.*, 2014, 41: 1223–1246.
- [11] Choe B R, Yang J. Commutants of Toeplitz operators with radial symbols on the Fock-Sobolev space [J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, 415: 779–790.
- [12] Mengestie T. Carleson type measures for Fock-Sobolev spaces [J]. *Compl. Anal. Oper. The.*, 2014, 8: 1225–1256.
- [13] Wang X F, Cao G F, Xia J. Toeplitz operators on Fock-Sobolev spaces with positive measure symbols [J]. *Sci. China Math.*, 2014, 57: 1443–1462.
- [14] Wang X F, Xia J, Cao G F. Bounded, compact and S_p -class operators on Fock-Sobolev spaces (in Chinese) [J]. *Sci. Sin. Math.*, 2014, 44: 263–274.
- [15] Zhao L. Invertible weighted composition operators on the Fock space of \mathbb{C}^n [J]. *J. Funct. Spaces*, 2015, ID250358.
- [16] Stevi S. Weighted composition operators between Fock-type spaces in \mathbb{C}^n [J]. *Appl. Math. Comp.*, 2009, 215: 2750–2760.
- [17] Zhao L. Unitary Weighted composition operators on Fock space of \mathbb{C}^n [J]. *Compl. Anal. Oper. The.*, 2014, 8: 581–590.
- [18] Zhao L, Pang C. A class of weighted composition operators on Fock space [J]. *J. Math. Res. Appl.*, 2015, 35(3): 303–310.
- [19] Ueki S. Weighted composition operator on the Fock space [J]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2007, 135(5): 1405–1410.
- [20] Ueki S. Hilbert-Schmidt weighted composition operator on the Fock space [J]. *Int. J. Math. Anal.*, 2007, 1: 769–774.
- [21] Cowen C C, Maccluer B D. *Composition operators on spaces of analytic functions* [M]. Stud. Adv. Math., Florida: CRC Press, 1995.
- [22] Zhu K H. *Analysis on Fock space* [M]. New York: Springer-Verlag, 2012.
- [23] Le T. Normal and isometric weighted composition operators on the Fock space [J]. *Bull. London Math. Soc.*, 2014, 46: 847–856.

WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS OF THE FOCK-TYPE SPACES

ZHAO Jian, YANG Cong-li, PAN Wei-ye

(School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract: In this paper, we research some characters of the weighted composition operator of the F_α^2 to $F_\alpha^{2,m}$. By using a significant estimate, several equivalent conditions on the bounded and compactness of the weighted composition operator are given, and we give a sufficient and necessary condition that it is Hilbert-Schmidt operator.

Keywords: Fock-type spaces; weighted composition operator; boundedness; compactness; Hilbert-Schmidt operators

2010 MR Subject Classification: 30H20; 47B07; 47B38