Vol. 38 (2018)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

置换群 S_6 上的一类 Hopf 代数结构

吴美云, 唐秋林, 罗秀花, 姜会玲
(南通大学理学院, 江苏 南通 226007)

摘 要: 本文研究了置换群 S_6 上的分次 Hopf 代数的构造问题. 利用箭向, 建立了群的带特征标的分歧系统和分次 Hopf 代数之间的联系, 获得了群 S_6 的特征标和 S_6 的自同构群 $\mathrm{Aut}(S_6)$ 之间的关系. 从而构造出了就 S_6 的某个分歧数据的不同构的所有分次 Hopf 代数.

关 键 词: Hopf 代数; 箭向; 分歧
MR(2010) **主题分类号**: 16T05; 16T15; 16W10; 16W20 **中 图 分 类 号**: O153.3
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2018)05-0921-12

1 引言

通常来讲, 要构造一个 Hopf 代数是件很不容易的事. 然而, 近年来, 很多数学家开始利用箭向来研究代数结构 [1–3], 得到很多可交换与不可交换的 Hopf 代数 [4–5]. 我们在文献 [6–7] 中也借助于箭向构造了群上的大量的 Hopf 代数.

设 G 是群, kG 是代数闭域 k 上的一个群代数, 则 Hopf 双模范畴 ${}^{kG}_{kG}\mathcal{M}^{kG}_{kG}$ 等价于直积范畴 $\sqcap_{C\in K(G)}\mathcal{M}_{kZ_{u(C)}}$, 这里 $K(G)$ 是群 G 的全体共轭类, 映射

$$u: K(G)\to G, u(C)\in K(G), Z_{u(C)}=\{g\in G|gu(C)=u(C)g\}, \forall C\in K(G). \tag{1.1}$$

$\mathcal{M}_{kZ_{u(C)}}$ 表示右 $kZ_{u(C)}$ 模 [5,8]. 2002 年, 由于数学家 Cibils 和 Rosso 引入了 Hopf 箭向和群的分歧 [8], 使得利用箭向构造 Hopf 代数成为可能 [5]. 2008 年, 张寿全教授等给出了 S_n(此时 $n\neq 6$[9]) 是完全群时的分歧系统, 由此可以构造出一批 Hopf 代数 [10]. 那么对于非完全群 S_6, 如何构造其上的 Hopf 代数呢? 本文想在这方面做些探讨.

2011 年, Andruskiewitsch, Fantino, Grana 以及 Vendramin 研究出对称群上的有限维逐点 Hopf 代数都是平凡的, 且对于对称群 S_6, 其上的一型路 Hopf 代数都是无限维的 [11]. 所以我们要构造的一型路 Hopf 代数都是无限维的.

本文约定在代数闭域 k 上讨论, 并且 k 的特征 $\mathrm{char}(k)\neq 2$. 所有代数, 余代数, Hopf 代数等都在域 k 上讨论. 与 Hopf 代数有关的概念参见文献 [12].

2 非完全群 S_6 的特征标和自同构之间的关系

由于非完全群 S_6 也是置换群, 故 S_6 中任意两个元素有相同的共轭类当且仅当它们有相同的循环结构. 从而有以下引理.

*收稿日期: 2017-04-01 接收日期: 2017-10-18
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11401323); 南通大学校级课题 (13230098).
作者简介: 吴美云 (1971–), 女, 江苏南通, 副教授, 主要研究方向: 代数学.
通讯作者: 唐秋林.

引理 2.1 [13] 设 S_6 是包含 6 个元素的集合的全体置换做成的群, $\mathrm{Aut}(S_6)$ 是 S_6 的自同构群, 则 $\mathrm{Aut}(S_6)=\mathrm{Inn}(S_6)<\delta>$, 其中 δ 为 2 阶外自同构. 因此 $\mathrm{Aut}(S_6)$ 是一个 1440 阶的群, 是 S_6 的内自同构群和一个 2 阶群的半直积.

由于群 S_6 可由 $\Omega=\{(12),(13),(14),(15),(16)\}$ 生成, 令 $\phi:S_6\to S_6$ 是一个映射, 定义

$$\begin{aligned}&\phi((12))=(12)(36)(45),\phi((13))=(16)(24)(35),\phi((14))=(13)(25)(46),\\&\phi((15))=(15)(26)(34),\phi((16))=(14)(23)(56).\end{aligned}$$

可以验证 ϕ 定义了 S_6 的一个外自同构.

令 $\sigma=(12345)$, i_σ 是由 σ 诱导的 S_6 的内自同构, 即任意 $g\in S_6$, 定义 $i_\sigma:S_6\to S_6$, $i_\sigma(g)=\sigma g\sigma^{-1}$. 令 $\delta=i_\sigma\phi$, 则 δ 是 2 阶外自同构. 由此得以下结论.

定理 2.2 任意 $h\in S_6$, 定义

$$i_g:S_6\to S_6,i_g(h)=ghg^{-1};\delta_g:S_6\to S_6,\delta_g(h)=g\delta(h)g^{-1}=i_{g\sigma}\phi(h),$$

则 $\mathrm{Aut}(S_6)=\{i_g|g\in S_6\}\cup\{\delta_g|g\in S_6\}$.

注 (i) 由于 $\Omega=\{(12),(13),(14),(15),(16)\}$ 可以生成置换群 S_6, 所以 i_g,δ_g 只需要定义在 Ω 上即可.

(ii) 经过计算, 可得

$$\begin{aligned}&\delta((12))=(23)(46)(15),\delta((13))=(26)(35)(41),\delta((14))=(24)(31)(56),\\&\delta((15))=(21)(36)(45),\delta((16))=(25)(34)(16).\end{aligned}$$

用 $C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_8,C_9,C_{10},C_{11}$ 表示 S_6 的全体共轭类, 分别用 (1), (12), (123), (1234), (12345), (123456), (12)(34), (12)(345), (12)(3456), (12)(34)(56), (123)(456) 作为这些共轭类的代表元. 考虑 S_6 的共轭类与特征标的关系, 得到如表 1 [13−14].

表 1

共轭类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
置换的奇偶性	偶	奇	偶	奇	偶	奇	偶	奇	偶	奇	偶
元素个数	1	15	40	90	144	120	45	120	90	15	40
特征标 χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
特征标 χ_2	5	3	2	1	0	-1	1	0	-1	-1	-1
特征标 χ_3	9	3	0	-1	-1	0	1	0	1	3	0
特征标 χ_4	10	2	1	0	0	1	-2	-1	0	-2	1
特征标 χ_5	5	1	-1	-1	0	0	1	1	-1	-3	2
特征标 χ_6	16	0	-2	0	1	0	0	0	0	0	-2
特征标 χ_7	5	-1	-1	1	0	0	1	-1	-1	3	2
特征标 χ_8	10	-2	1	0	0	-1	-2	1	0	2	1
特征标 χ_9	9	-3	0	1	-1	0	1	0	1	-3	0
特征标 χ_{10}	5	-3	2	-1	0	1	1	0	-1	1	-1
特征标 χ_{11}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

定理 2.3 设 S_6 是 6 个元素上的置换群, i_g,δ_g 如定理 2.2 中所述, 记 $\widehat{S_6}=\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{11}\}$, 其中 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{11}$ 如表 1 中所述. 则对于任意 $g\in S_6$, 有

$$\chi_j i_g=\chi_j, j=1,2,\cdots,11, \chi_1\delta_g=\chi_1, \chi_2\delta_g=\chi_7, \chi_4\delta_g=\chi_8,$$
$$\chi_5\delta_g=\chi_{10}, \chi_7\delta_g=\chi_2, \chi_8\delta_g=\chi_4, \chi_{10}\delta_g=\chi_5.$$

证 容易看出, 对于任意 $g\in S_6$, 有 $\chi_j i_g=\chi_j, j=1,2,\cdots,11$, $\chi_1\delta_g=\chi_1$. 下面证明后面 6 个关系式.

记 $\Omega=\{(12),(13),(14),(15),(16)\}$. 任意 $h\in\Omega$, 由于自同构保持元素的阶和共轭类的阶, 因此通过简单计算, 有 $\chi_4\delta_g(h)=\chi_4(g\delta(h)g^{-1})=\chi_4\delta(h)=-2$, $\chi_8(h)=-2$. 所以 $\chi_4\delta_g=\chi_8$. 类似的, 得到 $\chi_8\delta_g=\chi_4$; $\chi_2\delta_g=\chi_7$; $\chi_7\delta_g=\chi_2$; $\chi_5\delta_g=\chi_{10}$; $\chi_{10}\delta_g=\chi_5$.

由此, 不失一般性, 可设

$$\chi^a_{b_1,b_2,\cdots,b_{10}}=\begin{cases}\chi_{11}, & 1\le a\le b_1,\\ \chi_{10}, & b_1<a\le b_1+b_2,\\ \chi_9, & b_1+b_2<a\le b_1+b_2+b_3,\\ \chi_8, & \sum\limits_{i=1}^{3}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{4}b_i,\\ \chi_7, & \sum\limits_{i=1}^{4}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{5}b_i,\\ \chi_6, & \sum\limits_{i=1}^{5}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{6}b_i,\\ \chi_5, & \sum\limits_{i=1}^{6}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{7}b_i,\\ \chi_4, & \sum\limits_{i=1}^{7}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{8}b_i,\\ \chi_3, & \sum\limits_{i=1}^{8}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{9}b_i,\\ \chi_2, & \sum\limits_{i=1}^{9}b_i<a\le\sum\limits_{i=1}^{10}b_i,\\ \chi_1, & \sum\limits_{i=1}^{10}b_i<a,\end{cases} \tag{2.1}$$

这里 a 是一个正整数, $b_1,b_2,\cdots,b_{10}$ 是非负整数.

3 S_6 上的分次 Hopf 代数结构

设 $\mathbf{N}$ 表示自然数集合, 得到如下结论.

定理 3.1 设 $G=S_6$ 是置换群, m 是自然数, $\mathbf{N}$ 表示自然数集合, r 是 G 的关于 $r_{C_i}, i=1,2,\cdots,11$ 的分歧, $Q=(G,r)$ 是对应的 Hopf 箭向. 如果 $r_{C_1}=m>0, r_{C_i}=0, i=2,3,\cdots,11$, 那么路余代数 kQ^c 有不同构的分次 Hopf 代数结构 $kQ^c(\alpha^{\chi_s}), s\in\mathbf{N}^{10}$, 其个数与不等式 $s_1+2s_2+s_3+2s_4+2s_5+s_6+s_9\le m$ 的非负整数解的个数相同. 记 $x_i=a^{(i)}_{(1),(1)}, y_i=a^{(i)}_{(12),(12)}, z_i=a^{(i)}_{(13),(13)}, p_i=a^{(i)}_{(14),(14)}, q_i=a^{(i)}_{(15),(15)}, v_i=a^{(i)}_{(16),(16)}, i=1,2,\cdots,m$. 则在 (kQ_1,α^{χ_s}) 上的 kG - 模作用为

$$(12)\cdot x_i=y_i, (13)\cdot x_i=z_i, (14)\cdot x_i=p_i, (15)\cdot x_i=q_i, (16)\cdot x_i=v_i;$$

$$\begin{aligned}
&(12)\cdot y_i=x_i,(13)\cdot y_i=a^{(i)}_{(123),(123)},(14)\cdot y_i=a^{(i)}_{(124),(124)},\\
&(15)\cdot y_i=a^{(i)}_{(125),(125)},(16)\cdot y_i=a^{(i)}_{(126),(126)};\\
&(12)\cdot z_i=a^{(i)}_{(132),(132)},(13)\cdot z_i=x_i,(14)\cdot z_i=a^{(i)}_{(134),(134)},\\
&(15)\cdot z_i=a^{(i)}_{(135),(135)},(16)\cdot z_i=a^{(i)}_{(136),(136)};\\
&(12)\cdot p_i=a^{(i)}_{(142),(142)},(13)\cdot p_i=a^{(i)}_{(143),(143)},(14)\cdot p_i=x_i,\\
&(15)\cdot p_i=a^{(i)}_{(145),(145)},(16)\cdot p_i=a^{(i)}_{(146),(146)};\\
&(12)\cdot q_i=a^{(i)}_{(152),(152)},(13)\cdot q_i=a^{(i)}_{(153),(153)},(14)\cdot q_i=a^{(i)}_{(154),(154)},\\
&(15)\cdot q_i=x_i,(16)\cdot q_i=a^{(i)}_{(156),(156)};\\
&(12)\cdot v_i=a^{(i)}_{(162),(162)},(13)\cdot v_i=a^{(i)}_{(163),(163)},(14)\cdot v_i=a^{(i)}_{(164),(164)},\\
&(15)\cdot v_i=a^{(i)}_{(165),(165)},(16)\cdot v_i=x_i.
\end{aligned}$$

任意 $t=2,3,4,5,6$,

$$x_i\cdot(1t)=\begin{cases}
-3a^{(i)}_{(1t),(1t)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\
-2a^{(i)}_{(1t),(1t)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\
-a^{(i)}_{(1t),(1t)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\
0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\
a^{(i)}_{(1t),(1t)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\
2a^{(i)}_{(1t),(1t)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\
3a^{(i)}_{(1t),(1t)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,
\end{cases}$$

$$y_i\cdot(12)=\begin{cases}
-3a^{(i)}_{(1)(1)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\
-2a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\
-a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\
0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\
a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\
2a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\
3a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i.
\end{cases}$$

任意 $t=3,4,5,6$,

$$y_i\cdot(1t)=\begin{cases}-3a^{(i)}_{(1t2)(1t2)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a^{(i)}_{(1t2)(1t2)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -aa^{(i)}_{(1t2)(1t2)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{或}1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a^{(i)}_{(1t2)(1t2)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{ 或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a^{(i)}_{(1t2)(1t2)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a^{(i)}_{(1t2)(1t2)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,\end{cases}$$

$$z_i\cdot(13)=\begin{cases}-3a^{(i)}_{(1)(1)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{ 或 }1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{ 或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i.\end{cases}$$

任意 $t=2,4,5,6$,

$$z_i\cdot(1t)=\begin{cases}-3a^{(i)}_{(1t3)(1t3)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a^{(i)}_{(1t3)(1t3)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -aa^{(i)}_{(1t3)(1t3)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{ 或 }1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a^{(i)}_{(1t3)(1t3)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{ 或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a^{(i)}_{(1t3)(1t3)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a^{(i)}_{(1t3)(1t3)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,\end{cases}$$

$$p_i\cdot(14)=\begin{cases}-3a_{(1)(1)}^{(i)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{或}1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{ 或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i.\end{cases}$$

任意 $t=2,3,5,6$,

$$p_i\cdot(1t)\quad=\quad\begin{cases}-3a_{(1t4)(1t4)}^{(i)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a_{(1t4)(1t4)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -aa_{(1t4)(1t4)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{ 或 }1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a_{(1t4)(1t4)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{ 或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a_{(1t4)(1t4)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a_{(1t4)(1t4)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,\end{cases}$$

$$q_i\cdot(15)\quad=\quad\begin{cases}-3a_{(1)(1)}^{(i)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{ 或 }1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{ 或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a_{(1)(1)}^{(i)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i.\end{cases}$$

任意 $t=2,3,4,6$,

$$q_i\cdot(1t) = \begin{cases} -3a^{(i)}_{(1t5)(1t5)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a^{(i)}_{(1t5)(1t5)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -aa^{(i)}_{(1t5)(1t5)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a^{(i)}_{(1t5)(1t5)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a^{(i)}_{(1t5)(1t5)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a^{(i)}_{(1t5)(1t5)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i, \end{cases}$$

$$v_i\cdot(16) = \begin{cases} -3a^{(i)}_{(1)(1)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a^{(i)}_{(1)(1)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i. \end{cases}$$

任意 $t=2,3,4,5$,

$$v_i\cdot(1t) = \begin{cases} -3a^{(i)}_{(1t6)(1t6)}, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2a^{(i)}_{(1t6)(1t6)}, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -aa^{(i)}_{(1t6)(1t6)}, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ a^{(i)}_{(1t6)(1t6)}, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2a^{(i)}_{(1t6)(1t6)}, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3a^{(i)}_{(1t6)(1t6)}, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i. \end{cases}$$

证 设 r 是群 G 的满足 $r_{C_1}=m>0, r_{C_i}=0, i=2,3,\cdots,11$ 的分歧, $Q=(G,r)$ 是对应的 Hopf 箭向. 则由文献 [5] 得 ${}^x(Q_1)^x=\{a_{x,x}^{(i)}\mid i=1,2,\cdots,m\}$. 对任意 $x,y\in G$, $x\neq y$, 有 ${}^y(Q_1)^x$ 是空集. 显然 $Z_{u((1))}=G, \widehat{G}=\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{11}\}$. 任意 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_{10})\in\mathbf{N}^{10}$, 设 $\chi_{C_1}^{(i)}=\chi_{s_1s_2\cdots s_{10}}^{(i)}$. 由于 $r_{C_1}=m>0, r_{C_i}=0, i=2,3,\cdots,11$, 所以 $\chi_s=\{\chi_{C_1}^{(i)}\in\widehat{G}\mid 1\le i\le m\}$ 是关于 r 的带有特征标的全部分歧系统, 简记为RSC. 对于任意 $s,l\in\mathbf{N}^{10}$, 有 $\chi_s\cong\chi_l$ 当且仅当 $s=l$ 或 $s_1=l_2, s_2=l_7, s_3=l_3, s_4=l_8, s_5=l_{10}, s_6=l_6, s_7=l_2, s_8=l_4, s_9=l_9, s_{10}=l_5$.

事实上, 如果 $s=l$, 显然 $\chi_s=\chi_l$, 自然有 $\chi_s\cong\chi_l$. 对于其他情形, 由于

$$\begin{aligned}\chi_s &= \{\underbrace{\chi_{11},\cdots,\chi_{11}}_{s_1},\underbrace{\chi_{10},\cdots,\chi_{10}}_{s_2},\underbrace{\chi_9,\cdots,\chi_9}_{s_3},\underbrace{\chi_8,\cdots,\chi_8}_{s_4},\underbrace{\chi_7,\cdots,\chi_7}_{s_5},\underbrace{\chi_6,\cdots,\chi_6}_{s_6},\\ &\quad \underbrace{\chi_5,\cdots,\chi_5}_{s_7},\underbrace{\chi_4,\cdots,\chi_4}_{s_8},\underbrace{\chi_3,\cdots,\chi_3}_{s_9},\underbrace{\chi_2,\cdots,\chi_2}_{s_{10}},\underbrace{\chi_1,\cdots,\chi_1}_{m-\sum\limits_{i=1}^{10}s_i}\},\\ \chi_l &= \{\underbrace{\chi_{11},\cdots,\chi_{11}}_{l_1},\underbrace{\chi_{10},\cdots,\chi_{10}}_{l_2},\underbrace{\chi_9,\cdots,\chi_9}_{l_3},\underbrace{\chi_8,\cdots,\chi_8}_{l_4},\underbrace{\chi_7,\cdots,\chi_7}_{l_5},\underbrace{\chi_6,\cdots,\chi_6}_{l_6},\\ &\quad \underbrace{\chi_5,\cdots,\chi_5}_{l_7},\underbrace{\chi_4,\cdots,\chi_4}_{l_8},\underbrace{\chi_3,\cdots,\chi_3}_{l_9},\underbrace{\chi_2,\cdots,\chi_2}_{l_{10}},\underbrace{\chi_1,\cdots,\chi_1}_{m-\sum\limits_{i=1}^{10}l_i}\}.\end{aligned}$$

由定理 2.3, 任意 $g\in G, \chi_1\delta_g=\chi_1, \chi_2\delta_g=\chi_7, \chi_4\delta_g=\chi_8, \chi_5\delta_g=\chi_{10}, \chi_7\delta_g=\chi_2, \chi_8\delta_g=\chi_4, \chi_{10}\delta_g=\chi_5$, 有

(i) $\delta_g: G\to G$ 是一个群同构.

(ii) 任意 $\alpha,\beta\in G$, 显然 $\delta(\alpha\beta)=\delta(\alpha)\delta(\beta)$.

固定映射 $u: K(G)\to G$,

$$\begin{aligned}&u(C_1)=(1), u(C_2)=(12), u(C_3)=(123), u(C_4)=(1234),\\ &u(C_5)=(12345), u(C_6)=(123456), u(C_7)=(12)(34), u(C_8)=(123)(45),\\ &u(C_9)=(1234)(56), u(C_{10})=(12)(34)(56), u(C_{11})=(123)(456).\end{aligned}$$

任意 $C_i\in K(G), g\in G$, 存在元素 $h_{C_i}\in G$ 使得

$$\delta_g(h_{C_i}u(C_i)h_{C_i}^{-1})=u(\delta_g(C_i)), i=1,2,\cdots,11.$$

事实上, 有

$$\begin{aligned}&h_{C_1}=(1), h_{C_2}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(156432)\sigma), h_{C_3}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(2463)\sigma),\\ &h_{C_4}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(15462)\sigma), h_{C_5}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}\sigma), h_{C_6}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(245)(63)\sigma),\\ &h_{C_7}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(264)(35)\sigma), h_{C_8}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(26354)\sigma), h_{C_9}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(2453)\sigma),\\ &h_{C_{10}}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(13)\sigma), h_{C_{11}}=i^{-1}(\sigma^{-1}g^{-1}(26)\sigma).\end{aligned}$$

(iii) 任意 $C\in K(G)$, 存在双射 $f_{C_1}: I_{C_1}(r)\to I_{\delta_g(C_1)}(r)$ 使得

$$f_{C_1}(1,\cdots,s_1,s_1+1,\cdots,s_1+s_2,(\sum_{i=1}^{2}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{3}s_i,(\sum_{i=1}^{3}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{4}s_i,$$

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{4}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{5}s_i,(\sum_{i=1}^{5}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{6}s_i,(\sum_{i=1}^{6}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{7}s_i,(\sum_{i=1}^{7}s_i)+1,\cdots,\\
&\sum_{i=1}^{8}s_i,(\sum_{i=1}^{8}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{9}s_i,(\sum_{i=1}^{9}s_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{10}s_i,(\sum_{i=1}^{10}s_i)+1,\cdots,m)\\
=\ &(1,\cdots,l_1,(\sum_{i=1}^{6}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{7}l_i,(\sum_{i=1}^{2}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{3}l_i,(\sum_{i=1}^{7}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{8}l_i,\\
&(\sum_{i=1}^{9}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{10}l_i,(\sum_{i=1}^{5}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{6}l_i,l_1+1,\cdots,l_1+l_2,(\sum_{i=1}^{3}l_i)+1,\cdots,\\
&\sum_{i=1}^{4}l_i,(\sum_{i=1}^{8}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{9}l_i,(\sum_{i=1}^{4}l_i)+1,\cdots,\sum_{i=1}^{5}l_i,(\sum_{i=1}^{10}l_i)+1,\cdots,m),\\
&f_{C_i}:I_{C_i}(r)\to I_{\delta_g(C_i)}(r),i=2,3,\cdots,11
\end{aligned}
$$

是空映射. 由定理 2.3, 对任意 $h\in Z_{u(C_1)}$,

$$i\in I_{C_1}(r),\chi_{\delta_g(C_1)}^{f_{C_1}(i)}(\delta_g(h_{C_1}^{-1}hh_{C_1})=\chi_{\delta_g(C_1)}^{f_{C_1}(i)}\delta_g(h)=\chi_{C_1}^{i}(h).$$

故 $\chi_s\cong\chi_l$.

由此, $\{\chi_s|s\in\mathbf{N}^{10}\}$ 是关于 r 的互不同构的所有的RSC, 该集合的基数恰好等于不等式 $s_1+2s_2+s_3+2s_4+2s_5+s_6+s_9\le m$ 的非负整数解的个数. 由于域 k 的特征 $\mathrm{char}(k)\neq 2$, 所有右 kG - 模是逐点的. 由文献 [5] 的定理 2.2, 得到路余代数 kQ^c 的不同构的余路 Hopf 代数结构 $kQ^c(\alpha^{\chi_s}),s\in\mathbf{N}^{10}$. 设 $s\in\mathbf{N}^{10}$. 为简便起见, 记

$$x_i=a_{(1),(1)}^{(i)},y_i=a_{(12),(12)}^{(i)},z_i=a_{(13),(13)}^{(i)},p_i=a_{(14),(14)}^{(i)},q_i=a_{(15),(15)}^{(i)},v_i=a_{(16),(16)}^{(i)},$$

$i=1,2,\cdots,m$. 由文献 [5] 的等式 (2.2), 得到 (kQ_1,α^{χ_s}) 上的所有 kG - 模作用. 证毕.

推论 3.2 设 $kQ^c(\alpha^{\chi_s}),s\in\mathbf{N}^{10}$ 如定理 3.1 中所述, 则 $kQ^c(\alpha^{\chi_s})$ 的子 Hopf 代数 $kG[kQ_1;\alpha^{\chi_s}]$ 由 $(12),(13),(14),(15),(16),x_i,y_i,z_i,p_i,q_i,v_i,i=1,2,\cdots,m$ 生成, 生成关系为

$$
x_i\cdot(12)=\begin{cases}
-3y_i, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\
-2y_i, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\
-y_i, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\
0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\
y_i, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或 } \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\
y_i, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\
y_i, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,
\end{cases}
$$

$$x_i\cdot(13)=\begin{cases}-3z_i, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2z_i, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -z_i, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ z_i, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ z_i, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ z_i, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,\end{cases}$$

$$x_i\cdot(14)=\begin{cases}-3p_i, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2p_i, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -p_i, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i\text{或}1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ p_i, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i\text{或}\sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2p_i, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3p_i, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,\end{cases}$$

$$x_i\cdot(15)=\begin{cases}-3q_i, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2q_i, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -q_i, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ q_i, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2q_i, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3q_i, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i.\end{cases}$$

$$x_i\cdot(16)=\begin{cases}-3v_i, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2v_i, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -v_i, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或 } 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ v_i, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2v_i, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3v_i, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i,\end{cases}$$

$$x_i\cdot x_j=x_j\cdot x_i, 1\le i,j\le m.$$

$$z_i\cdot(13)=p_i\cdot(14)=q_i\cdot(15)=v_i\cdot(16)=y_i\cdot(12)$$

$$=\begin{cases}-3x_i, & s_1<i\le\sum\limits_{i=1}^{3}s_i,\\ -2x_i, & \sum\limits_{i=1}^{3}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{4}s_i,\\ -x_i, & \sum\limits_{i=1}^{4}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{5}s_i \text{ 或} 1\le i\le s_1,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{5}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{6}s_i,\\ x_i, & \sum\limits_{i=1}^{6}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{7}s_i \text{ 或} \sum\limits_{i=1}^{10}s_i<i\le m,\\ 2x_i, & \sum\limits_{i=1}^{7}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{8}s_i,\\ 3x_i, & \sum\limits_{i=1}^{8}s_i<i\le\sum\limits_{i=1}^{10}s_i.\end{cases}$$

余代数结构为 $\Delta((1t))=((1t))\otimes((1t)), \varepsilon((1t))=1, S((1t))=(1t), t=2,3,4,5,6,$ $\Delta(w)=(1)\otimes w+w\otimes(1), \varepsilon(w)=0, S(w)=-w$, 这里 $w=x_i,y_i,z_i,p_i,q_i,v_i$, 而

$$x_i=a^{(i)}_{(1),(1)}, y_i=a^{(i)}_{(12),(12)}, z_i=a^{(i)}_{(13),(13)}, p_i=a^{(i)}_{(14),(14)},$$
$$q_i=a^{(i)}_{(15),(15)}, v_i=a^{(i)}_{(16),(16)}, i=1,2,\cdots,m.$$

证 由文献 [15] 中一型路代数的乘法关系, 经过计算, 容易得出上述所有关系.

参 考 文 献

[1] Chen X W, Huang H L, Ye Y, Zhang P. Monomial Hopf algebras[J]. J. Alg., 2004, 275(1): 212–232.

[2] Cibils C, Rosso M. Algebras des chemins quantiques[J]. Adv. Math., 1997, 125(1):171–199.

[3] Oystaeyen F V, Zhang P. Quiver Hopf algebras[J]. J. Alg., 2004, 280(2): 577–589.
[4] 王艳华, 叶郁. 用 quiver 构造拟三角 Hopf 代数 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2007, 28(1): 39–48.
[5] Zhang S C, Zhang Y Z, Chen H X. Classification of PM quiver Hopf algebras[J]. J. Alg. Appl., 2007, 6(2): 919–950.
[6] 吴美云. 交换群上 Hopf 代数的结构分类 [J]. 数学物理学报 (A 辑), 2009, 29(4): 1119–1131.
[7] 吴美云, 唐秋林. 二面体群上 Hopf 路余代数的结构分类 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2007, 28(5): 709–718.
[8] Cibils C, Rosso M. Hopf quivers[J]. J. Alg., 2002, 254(2): 241–251.
[9] 徐明曜. 有限群导引 (上册)[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
[10] Zhang S C, Wu M, Wang H T. Classification of ramification system for symetric group[J]. Acta Math. Sini. B, 2008, 51(2): 253–264.
[11] Andruskiewitsch N, Fantino F, Grana M, Vendramin L. Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups ar trivial[J]. Annali di Matamatica, 2011, 190(2): 225–245.
[12] Sweedler M E. Hopf algebras[M]. New York: Benjamin Press,1969.
[13] Gerald J, Joseph R. Outer automorphisms of S_6[J]. Amer. Math. Monthly, 1982, 89(3): 407–410.
[14] Littlewood D E. The theory of group characters and matrix representations of groups[M]. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1950.
[15] Nichols W. Bialgebras of type one[J]. Commun. Alg., 1978, 6(4): 1521–1552.

A CLASS OF HOPF ALGEBRAS ON PERMUTATION GROUP S_6

WU Mei-yun, TANG Qiu-lin, LUO Xiu-hua, JIANG Hui-ling

(*School of Science, Nantong University, Nantong 226007, China*)

Abstract: In this paper, we study the construction of a class of graded Hopf algebras on S_6, where S_6 is a permutation group. With the help of quiver, we establish a correlation between the ramification system of a group with characters and graded Hopf algebras, and give the relation between the characters and automorphisms of S_6. Then we work out the structures of the non-isomorphic graded Hopf algebras when the ramification data r of S_6 is given.

Keywords: Hopf algebra; quiver; ramification

2010 MR Subject Classification: 16T05; 16T15; 16W10; 16W20