

一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的奇异 Kirchhoff 型方程 正解的存在性

陈明¹, 张鹏¹, 廖家锋²

(1. 遵义师范学院数学学院, 贵州遵义 563006)

(2. 西华师范大学数学与信息学院, 四川南充 637002)

摘要: 本文研究了一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的奇异 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \frac{u^{5-2s}}{|x|^s} + \lambda u^{-\gamma}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界开区域且具有光滑边界 $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $a, b \geq 0$ 且 $a + b > 0$, $\lambda > 0, 0 < \gamma < 1, 0 \leq s < 1$. 利用变分方法, 获得了该问题的一个正局部极小解, 补充了文献 [1] 的结果.

关键词: Kirchhoff 型方程; Hardy-Sobolev 临界指数; 奇异; 变分方法

MR(2010) 主题分类号: 35A01; 35J75 中图分类号: O175.25

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2018)05-0880-07

1 引言

考虑如下带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \frac{u^{5-2s}}{|x|^s} + \lambda u^{-\gamma}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界开区域且具有光滑边界 $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $a, b \geq 0$ 且 $a + b > 0$, $\lambda > 0, 0 < \gamma < 1, 0 \leq s < 1$, $6 - 2s$ 是 Hardy-Sobolev 临界指数.

2013 年, 刘星和孙义静老师研究了如下问题

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda g(x)\frac{u^p}{|x|^s} + f(x)u^{-\gamma}, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

*收稿日期: 2017-06-02 接收日期: 2017-10-18

基金项目: 贵州省科技厅联合基金项目 (黔科合 LH 字 [2016]7033); 贵州省教育厅创新群体重大研究项目 (黔教合 KY[2016]046); 西华师范大学英才科研基金资助项目 (17YC383); 西华师范大学基本科研业务费资助项目 (16E014).

作者简介: 陈明 (1961-), 男, 福建顺昌, 教授, 主要研究方向: 数理统计与非线性分析.

通讯作者: 廖家锋.

其中 $3 < p < 5 - 2s, 0 < \gamma < 1, a, b, \lambda > 0, f, g \in C(\bar{\Omega})$ 是非平凡非负函数. 当 $\lambda > 0$ 充分小时, 结合变分方法和 Nehari 方法获得问题 (1.2) 的两个正解, 详见文献 [1]. 2015 年, 雷春雨等在文献 [2, 3] 中分别当 $s = 0, p = 5$ 和 $s = 0, p = 3$ 时研究了问题 (1.2), 并获得了两个正解的存在性. 当 $s = 0, 0 < p < 3$ 时, 我们研究了问题 (1.2), 并获得了一个正的基态解, 详见文献 [4]. 随后, 刘芮琪等在文献 [5] 将文献 [4] 的结果推广至高维空间. 与此同时刘芮琪等将文献 [2] 研究的问题推广至四维空间, 并获得了正解存在性和多解性的结果, 具体可参见文献 [6].

在前期的研究基础上, 本文将研究问题 (1.1) 正解的存在性. 定义问题 (1.1) 对应的能量泛函 I 为

$$I(u) = \frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

其中

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

为 $H_0^1(\Omega)$ 空间的标准范数. 称 $u \in H_0^1(\Omega)$ 为问题 (1.1) 的解, 如果 $u > 0$ 且满足

$$\left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi) dx - \int_{\Omega} \frac{u^{5-2s}}{|x|^s} \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u^{-\gamma} \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.3)$$

记 A_s 为 Hardy-Sobolev 常数

$$A_s := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \right)^{\frac{1}{3-s}}}. \quad (1.4)$$

特别地, 当 $s = 0, A_0 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}}}$ 是最佳 Sobolev 常数. 记 $|u|_q = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$

为 $L^q(\Omega) (1 \leq q < \infty)$ 空间的标准范数.

2 主要结论以及证明

首先, 给出如下一个重要的引理.

引理 2.1 假设 $a, b \geq 0$ 且 $a + b > 0, 0 < \gamma < 1, 0 \leq s < 1$, 则存在 $\lambda_* > 0$ 使得对任意的 $0 < \lambda < \lambda_*$, 泛函 I 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上都能达到一个负的局部极小值.

证 由 Hölder 不等式和 (1.4) 式, 可推得如下不等式成立

$$\int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx \leq |u|_6^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} \leq |\Omega|^{\frac{5+\gamma}{6}} A_0^{-\frac{1-\gamma}{2}} \|u\|^{1-\gamma}, \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \leq A_s^{-\frac{6-2s}{2}} \|u\|^{6-2s}. \quad (2.2)$$

从而根据 (2.1) 式和 (2.2) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx \\
 &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\|u\|^{6-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}} - \frac{\lambda\|u\|^{1-\gamma}}{(1-\gamma)A_0^{\frac{1-\gamma}{2}}} \\
 &\geq \|u\|^{1-\gamma} \left(\frac{a}{2}\|u\|^{1+\gamma} + \frac{b}{4}\|u\|^{3+\gamma} - \frac{\|u\|^{5+\gamma-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}} - \frac{\lambda}{(1-\gamma)A_0^{\frac{1-\gamma}{2}}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

当 $a > 0$ 时, 令

$$h(t) = \frac{a}{2}t^{1+\gamma} - \frac{t^{5+\gamma-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}},$$

则 $h'(t) = t^{\gamma} \left[\frac{a(1+\gamma)}{2} - \frac{(5+\gamma-2s)t^{4-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}} \right]$. 容易得到

$$t_{\max} = \left[\frac{a(1+\gamma)(3-s)A_s^{3-s}}{5+\gamma-2s} \right]^{\frac{1}{2(2-s)}},$$

使得

$$\max_{t \geq 0} h(t) = h(t_{\max}) = \frac{a(2-s)}{5+\gamma-2s} \left[\frac{a(1+\gamma)(3-s)A_s^{3-s}}{5+\gamma-2s} \right]^{\frac{1+\gamma}{2(2-s)}}.$$

因此, 取 $R_1 = t_{\max}$ 以及 $\lambda' = (1-\gamma)A_0^{\frac{1-\gamma}{2}}h(t_{\max})$, 依据 (2.3) 式, 则存在 $\rho > 0$ 使得对任意的 $0 < \lambda < \lambda'$ 都有

$$\begin{cases} \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 2\rho, & \forall u \in \partial \overline{B_{R_1}}, \\ I(u) \geq \rho, & \forall u \in \partial \overline{B_{R_1}}, \\ \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 0, & \forall u \in \overline{B_{R_1}}, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $\overline{B_{R_1}} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| \leq R_1\}$. 若 $b > 0$ 时, 令

$$\psi(t) = \frac{b}{4}t^{3+\gamma} - \frac{t^{5+\gamma-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}},$$

则

$$\psi'(t) = t^{2+\gamma} \left[\frac{b(3+\gamma)}{4} - \frac{(5+\gamma-2s)t^{2-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}} \right].$$

容易得到

$$\tilde{t}_{\max} = \left[\frac{b(3+\gamma)(3-s)A_s^{3-s}}{2(5+\gamma-2s)} \right]^{\frac{1}{2(1-s)}},$$

使得

$$\max_{t \geq 0} \psi(t) = \psi(\tilde{t}_{\max}) = \frac{b(1-s)}{2(5+\gamma-2s)} \left[\frac{b(3+\gamma)(3-s)A_s^{3-s}}{2(5+\gamma-2s)} \right]^{\frac{2+\gamma}{2(1-s)}}.$$

因此, 取 $R_2 = \tilde{t}_{\max}$ 以及 $\lambda'' = (1 + q)A_0^{\frac{1-\gamma}{2}}\psi(\tilde{t}_{\max})$, 依据 (2.3) 式, 则存在 $\rho > 0$ 使得对任意的 $0 < \lambda < \lambda''$ 都有

$$\begin{cases} \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 2\rho, & \forall u \in \partial\overline{B_{R_2}}, \\ I(u) \geq \rho, & \forall u \in \partial\overline{B_{R_2}}, \\ \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 0, & \forall u \in \overline{B_{R_2}}, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $\overline{B_{R_2}} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| \leq R_2\}$.

因此, 对任意的 $a, b \geq 0$ 且 $a + b > 0$, 综合 (2.4) 式和 (2.5) 式, 则存在 $\lambda_* > 0$ 和 $R, \rho > 0$ 使得对任意的 $\lambda \in (0, \lambda_*)$ 使得

$$\begin{cases} \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 2\rho, & \forall u \in \partial\overline{B_R}, \\ I(u) \geq \rho, & \forall u \in \partial\overline{B_R}, \\ \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 0, & \forall u \in \overline{B_R}, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 $\overline{B_R} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| \leq R\}$. 固定 $\lambda \in (0, \lambda_*)$, 则 $m = \inf_{u \in \overline{B_R}} I(u)$ 都有定义. 进一步可得, 对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $u \neq 0$, 可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(tu)}{t^{1-\gamma}} = -\frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx < 0.$$

故当 $\|u\|$ 充分小时, 有 $m < 0$. 因此, 泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 有一个负的局部极小值.

接下来, 证明 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 能到达 m , 即证存在一个 $u_\lambda \in \overline{B_R}$ 使得 $I(u_\lambda) = m$. 根据下确界的定义, 则存在一个极小化序列 $\{u_n\} \subset \overline{B_R}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = m < 0$. 由于 $I(|u_n|) = I(u_n)$, 故不妨假设 $u_n(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in \Omega$ 都成立. 从而, 对 $\{u_n\}$ 的一个子列, 为了方便仍记为 $\{u_n\}$, 存在一个 $u_\lambda \geq 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 使得

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\lambda, & H_0^1(\Omega), \\ u_n \rightarrow u_\lambda, & L^s(\Omega), 1 \leq s < 2^*, \\ u_n(x) \rightarrow u_\lambda(x) & \text{a.e. } \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

由于 $\overline{B_R}$ 是闭凸集, 从而 $\overline{B_R}$ 是弱闭的, 因此 $u_\lambda \in \overline{B_R}$. 下面只需证明 $I(u_\lambda) = m$. 不妨设 $w_n = u_n - u_\lambda$. 由于 $0 < \gamma < 1$, 可得如下不等式 $|x^{1-\gamma} - y^{1-\gamma}| \leq |x - y|^{1-\gamma}, \forall x, y \geq 0$. 从而, 结合 Hölder 不等式, 有

$$\left| \int_{\Omega} |u_n|^{1-\gamma} dx - \int_{\Omega} |u_\lambda|^{1-\gamma} dx \right| \leq \int_{\Omega} |u_n - u_\lambda|^{1-\gamma} dx \leq |w_n|_2^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

进一步, 由 (2.7) 式可推得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{1-\gamma} dx = \int_{\Omega} |u_\lambda|^{1-\gamma} dx. \quad (2.8)$$

由 (2.7) 式, 同时也可推得

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u_\lambda\|^2 + o(1), \quad (2.9)$$

$$\|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + \|u_\lambda\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2 + o(1). \quad (2.10)$$

再根据文献 [8], 可得

$$\int_{\Omega} \frac{|u_n|^{6-2s}}{|x|^s} dx = \int_{\Omega} \frac{|w_n|^{6-2s}}{|x|^s} dx + \int_{\Omega} \frac{|u_\lambda|^{6-2s}}{|x|^s} dx + o(1). \quad (2.11)$$

若 $u_\lambda = 0$, 可得 $w_n = u_n$, 这就意味着 $w_n \in B_R$. 若 $u_\lambda \neq 0$, 由 (2.9) 式, 可得当 n 充分大时有 $w_n \in B_R$. 从而, 由 (2.6) 式, 可推得

$$\frac{a}{2}\|w_n\|^2 + \frac{b}{4}\|w_n\|^4 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|w_n|^{6-2s}}{|x|^s} dx \geq 0. \quad (2.12)$$

故由 (2.8)–(2.12) 式, 有

$$\begin{aligned} m &= I(u_n) + o(1) \\ &= I(u_\lambda) + \frac{a}{2}\|w_n\|^2 + \frac{b}{4}\|w_n\|^4 + \frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2 - \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{|w_n|^{6-2s}}{|x|^s} dx + o(1) \\ &\geq I(u_\lambda) + \frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2 + o(1) \\ &\geq I(u_\lambda) + o(1) \\ &\geq m + o(1). \end{aligned}$$

这就意味着 $I(u_\lambda) = m < 0$ 且 $u_\lambda \neq 0$, 即 u_λ 能量泛函 I 的一个非零非负局部极小值点. 引理 2.1 证毕.

下面给出本文的主要结果及其证明.

定理 2.1 假设 $a, b \geq 0$ 且 $a + b > 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 \leq s < 1$, 则对一切的 $0 < \lambda < \lambda_*$ (λ_* 为引理 2.1 中所定义) 问题 (1.1) 都存在一个正局部极小解.

证 根据引理 2.1, 可知在 Ω 上 $u_\lambda \geq 0$ 且 $u_\lambda \neq 0$. 只需证明 u_λ 是问题 (1.1) 的解. 令 $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$, 由于 $u_\lambda \in \overline{B_R}$, 则存在 $\xi > 0$ 当 $|t| < \xi$ 时使得 $u_* + t\phi \in \overline{B_R}$. 因为 u_* 是泛函 I 在 $\overline{B_R}$ 的局部极小值点, 从而可推得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(u_\lambda + t\phi) - I(u_\lambda)}{t} \\ &= a \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda, \nabla \phi) dx + b \|u_\lambda\|^2 \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda, \nabla \phi) dx \\ &\quad - \frac{1}{6-2s} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{(u_\lambda + t\phi)^{6-2s} - u_\lambda^{6-2s}}{t|x|^s} dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{1-\gamma} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{(u_\lambda + t\phi)^{1-\gamma} - u_\lambda^{1-\gamma}}{t} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{6-2s} \int_{\Omega} \frac{(u_\lambda + t\phi)^{6-2s} - u_\lambda^{6-2s}}{t|x|^s} dx = \int_{\Omega} \frac{u_\lambda^{5-2s} \phi}{|x|^s} dx. \quad (2.14)$$

对任意的 $x \in \Omega$, 令

$$\eta(t) = \frac{(u_\lambda + t\phi)^{1-\gamma} - u_\lambda^{1-\gamma}}{(1-\gamma)t}.$$

由 $s \mapsto s^{1-\gamma}$ 是一个凸函数, 则对任意的 $x \in \Omega$, 函数 η 是非增的. 故当 $t \rightarrow 0^+$ 时 η 是逐点收敛到 $u_\lambda^{-\gamma}(x)\phi(x)$. 从而根据 Beppo-Levi 定理, 可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} \frac{(u_\lambda + t\phi)^{1-\gamma} - u_\lambda^{1-\gamma}}{t} dx = \int_{\Omega} u_\lambda^{-\gamma} \phi dx. \quad (2.15)$$

因此, 结合 (2.13)–(2.15) 式, 可以推得 $u_\lambda^{-\gamma} \phi \in L^1(\Omega)$ 以及

$$(a + b\|u_\lambda\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda, \nabla \phi) dx - \int_{\Omega} \frac{u_\lambda^{5-2s} \phi}{|x|^s} dx - \lambda \int_{\Omega} u_\lambda^{-\gamma} \phi dx \geq 0, \quad (2.16)$$

其中 $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$. 记 $e \in H_0^1(\Omega)$, $e > 0$ 且 $\|e\| = 1$ 为 Δ 算子第一个特征值 λ_1 对应的特征函数. 在 (2.16) 式中取 $\phi = e$ 可得

$$\lambda \int_{\Omega} u_\lambda^{-\gamma} e dx \leq (a + b\|u_\lambda\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda, \nabla e) dx - \int_{\Omega} \frac{u_\lambda^{5-2s} e}{|x|^s} dx < +\infty,$$

这就意味着 $u_\lambda > 0$ 在 Ω 几乎处处成立.

类似于文献 [4] 中定理 1 的证明, 同样可从 (2.16) 式可以推得 $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$(a + b\|u_\lambda\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda, \nabla \phi) dx - \int_{\Omega} \frac{u_\lambda^{5-2s} \phi}{|x|^s} dx - \lambda \int_{\Omega} u_\lambda^{-\gamma} \phi dx \geq 0. \quad (2.17)$$

再依据 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 的任意性可知 u_λ 是问题 (1.1) 的一个正局部极小解. 定理 2.1 证毕.

参 考 文 献

- [1] Liu X, Sun Y J. Multiple positive solutions for Kirchhoff type problems with singularity[J]. Commun. Pure Appl. Anal., 2013, 12(2): 721–733.
- [2] Lei C Y, Liao J F, Tang C L. Multiple positive solutions for Kirchhoff type of problems with singularity and critical exponents[J]. J. Math. Anal. Appl., 2015, 421(1): 521–538.
- [3] Liao J F, Zhang P, Liu J, Tang C L. Existence and multiplicity of positive solutions for a class of Kirchhoff type problems with singularity[J]. J. Math. Anal. Appl., 430 2015, 430(2): 1124–1148.
- [4] 廖家锋, 张鹏, 陈明. 一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2016, 39(1): 103–106.
- [5] 刘芮琪, 吴行平, 唐春雷. 高维空间中一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2016, 38(4): 67–71.
- [6] Liu R Q, Tang C L, Liao J F, Wu X P. Positive solutions of Kirchhoff type problem with singular and critical nonlinearities in dimension four[J]. Commun. Pure Appl. Anal., 2016, 15(5): 1841–1856.
- [7] 廖家锋, 张鹏, 陈明. 一类奇异共振椭圆方程正解的唯一性 [J]. 数学杂志, 2017, 37(3): 513–518.
- [8] Ghoussoub N, Yuan C. Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2000, 352: 5703–5743.

EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF SINGULAR KIRCHHOFF-TYPE EQUATIONS WITH CRITICAL HARDY-SOBOLEV EXPONENT

CHEN Ming¹, ZHANG Peng¹, LIAO Jia-feng²

(1. School of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi 563006, China)

(2. School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: The following singular Kirchhoff-type equations with critical Hardy-Sobolev exponent are considered,

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \frac{u^{5-2s}}{|x|^s} + \lambda u^{-\gamma}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is an open bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $a, b \geq 0$ and $a + b > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 \leq s < 1$. By the variational methods, the existence of positive local minimal solutions is obtained, which complements the result of [1].

Keywords: Kirchhoff-type equation; critical Hardy-Sobolev exponent; singularity; variational method

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35J75