Vol. 28 (2018)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有年龄结构随机种群系统数值解的渐近有界性

辛志贤 [1], 张启敏 [1,2], 李 强 [1], 哈金才 [1]

(1. 北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川 750021)

(2. 宁夏大学数学统计学院, 宁夏 银川 750021)

摘 要: 本文研究了一类具有年龄结构的随机种群系统的数值解问题. 在线性增长条件下, 利用 Euler-Maruyama (EM) 方法讨论了具有年龄结构的随机种群系统的数值解的 p 阶矩渐近有界性, 并获得了渐近有界性准则. 最后, 通过数值算例对所得的结论进行了验证.

关 键 词: 随机种群系统; 线性增长条件; Euler-Maruyama 方法; p 阶矩渐近有界性

MR(2010) **主题分类号**: 60H15; 35R60 **中图分类号**: O193

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)01-0147-08

1 引言

随机微分方程被广泛应用于工程、生物、金融等领域 [1−6], 随机种群系统也引起了许多学者关注. 本文研究如下具有年龄结构的随机种群系统模型 [7]

$$\begin{cases} d_tP = -\dfrac{\partial P}{\partial a}dt - \mu(t,a)Pdt + f(t,P)dt + g(t,P)dB(t), & (t,a)\in Q, \\ P(0,a) = P_0(a), & a\in[0,A], \\ P(t,0) = \displaystyle\int_0^A \beta(t,a)P(t,a)da, & t\in[0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $Q=(0,T)\times(0,A)$, A 是种群所能达到的最大年龄, $0<T<\infty$, $d_tP=\dfrac{\partial P}{\partial t}dt$, $P(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的种群密度; $\beta(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的种群的出生率; $\mu(t,a)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的种群的死亡率; $f(t,P)$ 是外界环境的干扰, 如迁移、地震、海啸等突发性灾害对种群的影响; $g(t,P)dB(t)$ 表示随机外界环境对系统的干扰; $B(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ 上的 Brown 运动.

模型 (1.1) 考虑了随机环境对系统的扰动影响, 更符合种群模型的实际意义. 由于随机种群模型的解析解很难给出, 因此数值解的计算显得尤为重要, 并且在近几年, 随机种群模型数值解的研究取得了很多成果. 文献 [8] 研究了带跳的具有年龄结构的随机种群系统数值解的稳定性, 讨论了带有 Markovian 转换的与年龄相关的随机种群系统的渐近稳定性 [9]; 文献 [10] 针对与年龄相关的随机种群扩散系统, 讨论了其数值解的指数稳定性 . 然而上述文献中, 均是对随机种群模型数值解的稳定性进行了研究, 但数值解的另一个性质渐近有界性同样具有重要的研究价值 [11]. 本文利用 EM 方法研究具有年龄结构的随机种群系统的渐近有界性,

*收稿日期: 2016-01-11 接收日期: 2016-11-02
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461053; 11261043); 宁夏高等学校基金资助 (NGY20140152).
作者简介: 辛志贤 (1991–), 女, 山西朔州, 硕士, 主要研究方向: 随机过程.

在线性增长条件下, 建立 p 阶矩渐近有界性准则. 最后, 通过数值算例对所得的结论进行了验证.

2 预备知识

令 $V=H^1([0,A])\equiv\left\{\varphi|\varphi\in L^2([0,A]),\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\in L^2([0,A])\right\}$, 其中 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$ 是广义函数意义下的偏导数; V 是 Sobolev 空间; $H=L^2([0,A])$, 满足 $V\hookrightarrow H\equiv H'\hookrightarrow V'$. $V'=H^{-1}([0,A])$ 是 V 的对偶空间; $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为 V, V' 的范数; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 与 V' 空间的内积 [10].

定义 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0},\mathbb{P})$ 是带流的单调递增完备的概率空间, $\mathcal{F}_0$ 包含所有的 $\mathbb{P}$ 零子集, $B(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_t\,P)$ 上的 Brown 运动. $a\vee b$ 表示 a 和 b 的最大值, $a\wedge b$ 表示 a 和 b 的最小值.

定义 2.1 在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一个带流 $\mathcal{F}$ 的随机过程 P_t 被称为方程 (1.1) 的解, 如果满足下列条件

(1) $P_t\in I^2(0,T;V)\bigcap L^2(\Omega;(0,T;H))$, 其中 $I^2(0,T;V)$ 为所有均方可测的 $(P_t)_{t\in[0,T]}$ 组成的空间, 满足

$$E\int_0^T\|P_t\|^2dt\leq\infty;$$

(2) 对于任意的 $t\in[0,T]$, 在概率空间 V' 上下列方程几乎处处成立,

$$\begin{cases}P(t,a)=P_0-\displaystyle\int_0^t\frac{\partial P(s,a)}{\partial a}ds-\int_0^t\mu(s,a)P(s,a)ds\\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_0^t f(s,P(s,a))ds+\int_0^t g(s,P(s,a))dB(s), & (0,T)\times(0,A),\\ P(0,a)=P_0(a), & a\in[0,A],\\ P(t,0)=\displaystyle\int_0^A\beta(t,a)P(t,a)da, & t\in[0,T].\end{cases}$$

为了证明文中的结论, 给出以下假设条件

(A1) 方程 (1.1) 中 $f(t,P)$, $g(t,P)$, $\dfrac{\partial P}{\partial a}$ 满足线性增长条件, 即

$$|f(t,P)|^2\vee\|g(t,P)\|^2\vee\left|\frac{\partial P}{\partial a}\right|^2\leq K|P|^2+\alpha,\tag{2.1}$$

其中 K 和 α 均为正常数.

(A2) $\mu(t,a)$, $\beta(t,a)$ 在 Q 上是连续的且存在正常数 $\mu_0,\bar\mu,\bar\beta$, 满足

$$0\leq\mu_0\leq\mu(t,a)\leq\bar\mu<\infty,\quad 0\leq\beta(t,a)\leq\bar\beta<\infty,\quad A\bar\beta^2-2\mu_0\geq0.\tag{2.2}$$

(A3) 存在正常数 D, 使得对于任意 $P\in V$,

$$\frac{2\langle P,f(t,P)\rangle+\|g(t,P)\|^2}{2(D+|P|^2)}-\frac{\langle P,g(t,P)\rangle^2}{(D+|P|^2)^2}\leq-\lambda+\frac{Q_1(|P|)}{D+|P|^2}+\frac{Q_3(|P|)}{(D+|P|^2)^2},\tag{2.3}$$

其中 λ 是正常数, $Q_i(|P|)$ 是 $|P|$ 的 i 次多项式.

3 EM 方法

本节将利用 EM 方法研究具有年龄结构的随机种群系统的渐近有界性, 并建立 p 阶矩渐近有界性准则.

首先使用 EM 差分方法对方程 (1.1) 进行离散, 可得

$$\begin{aligned}P_{k+1}=P_k-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t\\ +g(t_k,P_k)\triangle B_k,\forall a\in(0,A),\ P(0,a)\in V.\end{aligned}\tag{3.1}$$

下面给出本文的主要定理.

定理 3.1 如果条件 (A1)–(A3) 成立, 那么对于任意的 $\varepsilon\in(0,\lambda)$, 都存在常数 $p^*\in(0,1)$ 和 $\triangle t^*\in(0,1)$ 使得 $\forall p\in(0,p^*)$ 和 $\forall\triangle t\in(0,\triangle t^*)$, 方程 (3.1) 的 EM 解满足

$$\limsup_{k\to\infty}\mathbb{E}(|P_k|^p)\le\frac{C_2{}''}{p(\lambda-\varepsilon)},\qquad\forall P_0\in V,\tag{3.2}$$

其中 $C_2{}''$ 是与 K、α、D 和 p 有关, 与 P_0 无关的常正数.

证 由 EM 差分格式 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}|P_{k+1}|^2=&|P_k|^2+2\langle P_k,-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\rangle\\&+\left|-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\right|^2,\end{aligned}\tag{3.3}$$

则对于常数 D, 有

$$\begin{aligned}D+|P_{k+1}|^2=&D+|P_k|^2+2\langle P_k,-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\rangle\\&+\left|-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\right|^2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

令

$$\begin{aligned}\xi_k=&\frac{1}{D+|P_k|^2}\bigg(2\langle P_k,-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\rangle\\&+\left|-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\right|^2\bigg),\end{aligned}\tag{3.5}$$

那么对于任意的 $p\in(0,1)$, 满足

$$\left|D+|P_{k+1}|^2\right|^{p/2}=\left|D+|P_k|^2\right|^{p/2}\Big(1+\xi_k\Big)^{p/2}.\tag{3.6}$$

由基本不等式

$$\Big(1+u\Big)^{p/2}\le1+\frac{p}{2}u+\frac{p(p-2)}{8}u^2+\frac{p(p-2)(p-4)}{2^3\times3!}u^3,\quad u>-1.$$

显然, $\xi_k > -1$, 由基本不等式可得

$$\left|D+|P_{k+1}|^2\right|^{p/2} \leq \left|D+|P_k|^2\right|^{p/2}\left(1+\frac{p}{2}\xi_k+\frac{p(p-2)}{8}\xi_k^2+\frac{p(p-2)(p-4)}{2^3\times 3!}\xi_k^3\right). \tag{3.7}$$

对 (3.7) 式两边同时取条件期望, 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\left|D+|P_{k+1}|^2\right|^{p/2}\middle|\mathcal{F}_{k\triangle t}\right)\\ \leq&\left|D+|P_k|^2\right|^{p/2}\mathbb{E}\left(1+\frac{p}{2}\xi_k+\frac{p(p-2)}{8}\xi_k^2+\frac{p(p-2)(p-4)}{2^3\times 3!}\xi_k^3\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

因为 $\triangle B_k$ 与 $\mathcal{F}_{k\triangle t}$ 独立, 所以 $\mathbb{E}(\triangle B_k|\mathcal{F}_{k\triangle t}) = \mathbb{E}(\triangle B_k) = 0$, $\mathbb{E}((\triangle B_k)^2|\mathcal{F}_{k\triangle t}) = \mathbb{E}((\triangle B_k)^2) = \triangle t$, 因此

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\xi_k|\mathcal{F}_{k\triangle t})\\ =&\mathbb{E}\Bigg(\frac{1}{D+|P_k|^2}\Bigg(2\langle P_k,-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_k\rangle\\ &+\left|-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t+g(t_k,P_k)\triangle B_i\right|^2\Bigg)\Bigg|\mathcal{F}_{k\triangle t}\Bigg)\\ \leq&\frac{2}{D+|P_k|^2}\langle P_k,-\frac{\partial P_k}{\partial a}\triangle t-\mu(t_k,a)P_k\triangle t+f(t_k,P_k)\triangle t\rangle\\ &+\frac{1}{D+|P_k|^2}\left[\left(\frac{\partial P_k\triangle t}{\partial a}\right)^2+(\mu(t_k,a)P_k\triangle t)^2+(f(t_k,P_k)\triangle t)^2+\|g(t_k,P_k)\|^2\triangle t\right]\\ \leq&\frac{1}{D+|P_k|^2}\left(A\bar{\beta}^2P_k^2-2\mu_0|P_k|^2+2\langle P_k,f(t_k,P_k)\rangle+\|g(t_k,P_k)\|^2\right)\triangle t\\ &+\frac{1}{D+|P_k|^2}\left(\left(\frac{\partial P_k}{\partial a}\right)^2+\mu^2(t_k,a)|P_k|^2+|f(t_k,P_k)|^2\right)\triangle t^2\\ \leq&\frac{1}{D+|P_k|^2}\left(A\bar{\beta}^2|P_k|^2-2\mu_0|P_k|^2+2\langle P_k,f(t_k,P_k)\rangle+\|g(t_k,P_k)\|^2\right)\triangle t\\ &+C_{11}\triangle t^2+\frac{C_{12}}{D+|P_k|^2}\triangle t^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

类似的, 可得

$$\mathbb{E}(\xi_k^2|\mathcal{F}_{k\triangle t}) \geq \frac{4}{(D+|P_k|^2)^2}\langle P_k,g(t_k,P_k)\rangle^2\triangle t-C_{21}\triangle t^2-\frac{C_{22}}{D+|P_k|^2}\triangle t^2, \tag{3.10}$$

$$\mathbb{E}(\xi_k^3|\mathcal{F}_{k\triangle t}) \geq C_{31}\triangle t^2-\frac{C_{32}}{D+|P_k|^2}\triangle t^2, \tag{3.11}$$

其中 $C_{11},C_{21},C_{31},C_{12},C_{22},C_{32}$, 均为正常数; C_{11},C_{21},C_{31} 与 K 有关; C_{12},C_{22},C_{32} 与 α 有关. 现在考虑下面两个分数

$$\frac{(D+|P_k|^2)^{p/2}Q_1(|P_k|)}{D+|P_k|^2},\quad \frac{(D+|P_k|^2)^{p/2}Q_3(|P_k|)}{(D+|P_k|^2)^2}. \tag{3.12}$$

当 $0 < p < 1$ 时, 两个分数的分子中 $|P_k|$ 的次数分别为 $p+1$ 次和 $p+3$ 次, 均小于对应分数分母中 $|P_k|$ 的次数. 所以对于任意的 $|P_k| \in \mathbb{R}$, 两个分数都存在上界. 同时, 当 $i,j=1,2,3$ 时, 显然 $\dfrac{C_{j2}}{(D+|P_{k+1}|^2)^{i-p/2}}$ 也有界. 把 (3.9)–(3.11) 式代入 (3.8) 式, 并且根据假设 (A1)–(A3) 和 (3.12) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}((D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}|\mathcal{F}_{k\triangle t})\\
\le{}& (D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}\Bigg(1+\frac{p}{2(D+|P_k|^2)}\bigg(A\bar\beta^2|P_k|^2-2\mu_0|P_k|^2\\
&+2\langle P_k, f(t_k,P_k)\rangle+\|g(t_k,P_k)\|^2\bigg)\triangle t\\
&+\frac{p(p-2)}{2(D+|P_k|^2)^2}\langle P_k, g(t_k,P_k)\rangle^2\triangle t+{C_1}'\triangle t^2\Bigg)+{C_2}'\triangle t\\
={}& (D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}\Bigg[1+p\triangle t\bigg(\frac{(A\bar\beta^2-2\mu_0)|P_k|^2+2\langle P_k, f(t_k,P_k)\rangle}{2(D+|P_k|^2)}\\
&+\frac{\|g(t_k,P_k)\|^2}{2(D+|P_k|^2)}-\frac{\langle P_k, g(t_k,P_k)\rangle^2}{(D+|P_k|^2)^2}\bigg)+\frac{p^2\triangle t\langle P_k, g(t_k,P_k)\rangle^2}{2(D+|P_k|^2)^2}+{C_1}'\triangle t^2\Bigg]\\
&+{C_2}'\triangle t\\
\le{}& (D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}\Bigg[1+p\triangle t\bigg(\frac{2\langle P_k, f(t_k,P_k)\rangle+\|g(t_k,P_k)\|^2}{2(D+|P_k|^2)}-\frac{\langle P_k, g(t_k,P_k)\rangle^2}{(D+|P_k|^2)^2}\bigg)\\
&+\frac{p^2\triangle t\langle P_k, g(t_k,P_k)\rangle^2}{2(D+|P_k|^2)^2}+{C_1}'\triangle t^2\Bigg]+{C_2}'\triangle t\\
\le{}& (D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}\bigg(1-p\lambda\triangle t+\frac{p^2\triangle tK}{2}+{C_1}''\triangle t^2\bigg)+{C_2}''\triangle t,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 ${C_1}'$, ${C_1}''$ 是与 K 和 p 有关的正常数, ${C_2}'$, ${C_2}''$ 是与 K, α, D 和 p 有关的正常数. 对于任意给定的 $\varepsilon \in (0,\lambda)$, 取充分小的 $p^* \in (0,1)$ 使得 $p^*K < \varepsilon$, 同时取充分小的 $\triangle t^* \in (0,1)$ 使得 $p^*\lambda\triangle t^* \le 1$, ${C_1}''\triangle t^* \le \dfrac{1}{2}p\varepsilon$. 则对于任意的 $p \in (0,p^*)$ 和 $\triangle t \in (0,\triangle t^*)$, 有

$$\mathbb{E}((D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}|\mathcal{F}_{k\triangle t}) \le (D+|P_k|^2)^{p/2}(1-p(\lambda-\varepsilon)\triangle t)+{C_2}''\triangle t. \tag{3.14}$$

两边同时取期望, 可得

$$\mathbb{E}((D+|P_{k+1}|^2)^{p/2} \le \mathbb{E}((D+|P_k|^2)^{p/2})(1-p(\lambda-\varepsilon)\triangle t)+{C_2}''\triangle t. \tag{3.15}$$

通过迭代, 易知

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}((D+|P_{k+1}|^2)^{p/2}\\
&\le \mathbb{E}((D+|P_0|^2)^{p/2})(1-p(\lambda-\varepsilon)\triangle t)^k+\frac{1-(1-p(\lambda-\varepsilon)\triangle t)^{k-1}}{p(\lambda-\varepsilon)}{C_2}''.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

又因为 $\mathbb{E}(|P_k|^p) \le \mathbb{E}((D+|P_k|^2)^{p/2})$, 所以

$$\mathbb{E}(|P_k|^p) \le \mathbb{E}((D+|P_0|^2)^{p/2})(1-p(\lambda-\varepsilon)\triangle t)^k+\frac{1-(1-p(\lambda-\varepsilon)\triangle t)^{k-1}}{p(\lambda-\varepsilon)}{C_2}''. \tag{3.17}$$

令 $k\to\infty$, 则

$$\limsup_{k\to\infty}\mathbb{E}(|P_k|^p)\le\frac{{C_2}''}{p(\lambda-\varepsilon)},\qquad\forall P_0\in V.\tag{3.18}$$

定理得证.

4 数值算例

本节通过以下例子对定理进行验证

$$\begin{cases}d_tP=\left[-\dfrac{\partial P}{\partial a}-\dfrac{1}{4(1-a)^2}Pdt+1.5-4P\right]dt\\ \qquad\qquad+(0.125+0.25P)dB(t), & (t,a)\in Q,\\ P(0,a)=e^{\frac{1}{1-a}}, & a\in[0,0.8],\\ P(t,0)=\displaystyle\int_0^A\frac{1}{(1-a)^2}P(t,a)da, & t\in[0,T],\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $Q=[0,T]\times[0,0.8]$, $A=0.8$, $\mu(t,a)=\dfrac{1}{4(1-a)^2}$, $\beta(t,a)=\dfrac{1}{(1-a)^2}$, $f(t,P)=1.5-4P$, $B(t)$ 是标准布朗运动, $g(t,P)=0.125+0.25P$. 显然 $f(t,P)$, $g(t,P)$ 均满足线性增长条件, 同时,

$$\begin{aligned}&0\le 0.25=\mu_0\le\mu(t,a)\le\bar\alpha=6.25<\infty,\\ &0\le\beta(t,a)\le\bar\beta=1<\infty,\ \ A\bar\beta^2-2\mu_0>0,\end{aligned}$$

所以假设条件 (A2) 也成立.

下面证明假设条件 (A3) 中 D 的存在性并给出 D 的选取过程.

记 $f(t_k,P_k)=\theta_1+\theta_2P_k$, $g(t_k,P_k)=\sigma_1+\sigma_2P_k$, 则对于假设条件 (A3) 有

$$\frac{2\langle P_k,f(t_k,P_k)\rangle+\|g(t_k,P_k)\|^2}{2(D+|P_k|^2)}=\frac{P_k^2(2\theta_2+\sigma_2^2)}{2(D+|P_k|^2)}+\frac{\sigma_1^2+(2\theta_1+2\sigma_1\sigma_2)P_k}{2(D+|P_k|^2)},\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\langle P_k,g(t_k,P_k)\rangle^2=(\sigma_1P_k+\sigma_2P_k^2)^2&=\sigma_1^2P_k^2+\sigma_2^2P_k^4+2\sigma_1\sigma_2P_k^3\\&=\sigma_2^2\left(P_k^2+\frac{\sigma_1^2}{2\sigma_2^2}\right)^2-\frac{\sigma_1^4}{4\sigma_2^2}+2\sigma_1\sigma_2P_k^3.\end{aligned}\tag{4.3}$$

取 $D=\dfrac{\sigma_1^2}{2\sigma_2^2}$, 则有

$$\begin{aligned}&\frac{2\langle P_k,f(t_k,P_k)\rangle+\|g(t_k,P_k)\|^2}{2(D+|P_k|^2)}-\frac{\langle P_k,g(t_k,P_k)\rangle^2}{(D+|P_k|^2)^2}\\&\le\left(\theta_2-\frac12\sigma_2^2\right)+\frac{\sigma_1^2+(2\theta_1+2\sigma_1\sigma_2)P_k}{2(D+|P_k|^2)}+\frac{1}{(D+|P_k|^2)^2}\left(\frac{\sigma_1^4}{4\sigma_2^2}-2\sigma_1\sigma_2P_k^3\right),\end{aligned}\tag{4.4}$$

因此取

$$\begin{aligned}&-\lambda=\theta_2-\frac12\sigma_2^2=-4.03125,\\ &Q_1(|P_k|)=\sigma_1^2+(2\theta_1+2\sigma_1\sigma_2)P_k=0.015125+3.0625P_k,\\ &Q_3(|P_k|)=\frac{\sigma_1^4}{4\sigma_2^2}-2\sigma_1\sigma_2P_k^3=\frac{(0.0125)^4}{0.25}-0.00625P_k^3.\end{aligned}$$

所以假设条件 (A3) 成立, 即常数 D 存在并且 $D = \dfrac{\sigma_1^2}{2\sigma_2^2} = 0.121$.

最后根据定理 1 的证明过程 (3.4)–(3.18) 式得到 $P(t,a)$ 渐近有界.

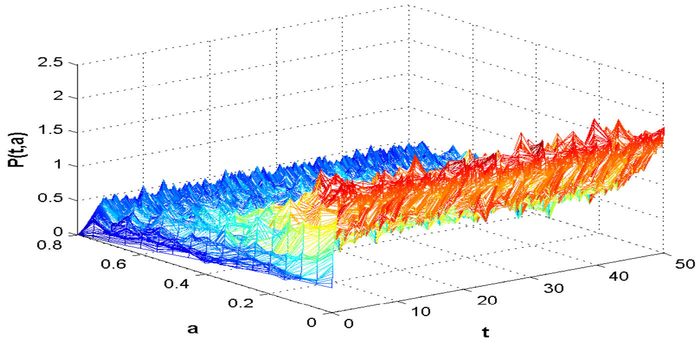

图 1: $P(t,a)$ 数值解的三维轨迹

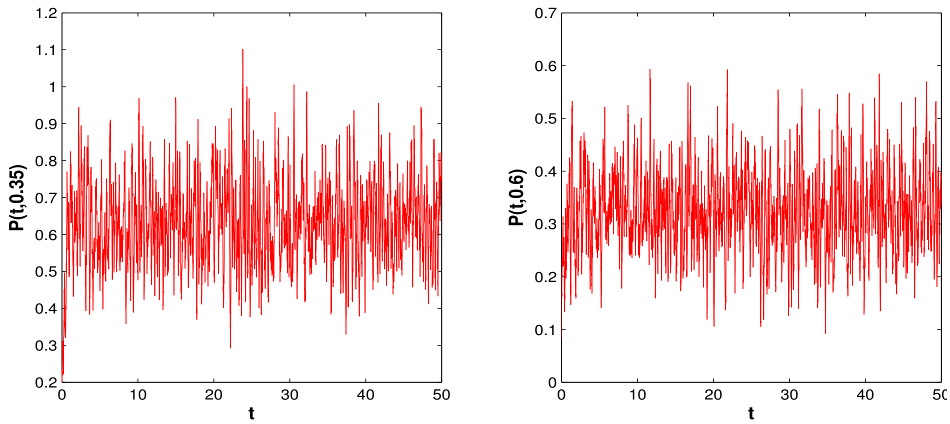

图 2: $P(t,a)$ 数值解的二维轨迹

取时间步长 $\Delta t = 0.01$, 空间步长 $h = 0.05$, 采用 EM 方法对方程进行差分离散, 分别作出该算例数值解的二维图 (图 1) 和三维图 (图 2). 由图可知当时间趋于无穷时, 该种群系统的种群密度上下波动, 并存在一个上界, 显然, 此种群系统渐近有界.

5 结论

本文基于 EM 方法研究了一类具有年龄结构的随机种群系统的数值解的 p 阶矩渐近有界性. 在线性增长条件下, 利用基本不等式建立了渐近有界性准则. 所得结论为种群的最优控制提供了有效的工具.

参 考 文 献

[1] Jean J, Albert N, Shiriaev. Limit theorems for stochastic process[M]. New York: Springer Verlag, 2002.

[2] Luo Hui, Ma Xuemin, Ma Zhiwei, Zhou Xuan. The statistics analysis of randomly trimmed means and their bootstrap[J]. J. Math., 2014, 34(1): 1–15.

[3] 杨洪福, 张启敏. 与年龄相关的随机时分数阶种群系统温和解的存在性、唯一性 [J]. 数学杂志, 2016, 36(5): 1083–1090.

[4] 李荣华, 戴永红, 孟红兵. 与年龄相关的随机时滞种群方程的指数稳定性 [J]. 数学年刊, 2006, 27A(1): 39–52.

[5] Mao Xuerong. Stochastic differential equations and applcations[M]. Chichester: Horwood Pulishing, 2007.

[6] Mao Xuerong, Yuan Chenggui. Stochastic differential equations with Markovian switching[M]. London: Imperial College Press, 2006.

[7] Zhang Qimin, Liu Wenan, Nie Zankan. Existence, uniqueness and exponential stability for stochastic age-dependent population[J]. Appl. Math. Comp., 2004, 154: 183–201.

[8] Mao Wei. Exponential stability of numerical solutions to stochastic age-dependent population equations with Poisson jumps[J]. Engin. Tech., 2011, 55: 1103–1108.

[9] Ma Weijun, Zhang Qimin, Wang Zhanping. Asymptotic stability of stochastic age-dependent population equations with Markovian switching[J]. Appl. Math. Comp., 2014, 227: 309–319.

[10] Zhang Qimin. Expontial stability of numerical solutions to a stochastic age-structured population system with diffusion[J]. J. Comp. Appl. Math., 2008, 220(1-2): 22–33.

[11] Luo Qi, Mao Xuerong, Shen Yi. Generalised theory on asymptotic stability and boundedness of stochastic functional differential equations[J]. Automatica, 2011, 47(9): 2075–2081.

ASYMPTOTIC BOUNDEDNESS OF THE NUMERICAL SOLUTIONS OF STOCHASTIC AGE-DEPENDENT POPULATION SYSTEM

XIN Zhi-xian[1], ZHANG Qi-min[1,2], LI Qiang[1], HA Jin-cai[1]

(*1.School of Mathematics and Information Science, Beifang University for Nationalities, Yinchuan 750021, China*)

(*2.College of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchan 750021, China*)

Abstract: A class of stochastic age-dependent population system is studied in this paper. Under linear growth condition, we discuss the p-th asymptotic boundedness of the numerical solutions for stochastic age-dependent population system and establish a criterion for the asymptotical boundedness by using Euler-Maruyama (EM) method. Finally, numerical example is presented to demonstrate the accuracy of the conclusion.

Keywords: stochastic population system; linear growth condition; Euler-Maruyama method; p-th asymptotic boundedness

2010 MR Subject Classification: 60H15; 35R60