Vol. 28 (2018)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

三角代数上理想包含图的自同构

陈 莉

(中国矿业大学数学系, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 设 F_q 为有限域, $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 为一正整数序列, $\mathbb{B}(q,r)$ 为由 F_q 上对角块为 $n_i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 阶方阵的分块上三角阵构成的代数. 理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 是一个有向图, 它以 $\mathbb{B}(q,r)$ 为顶点集, 从 A 到 B 有一条有向边当且仅当 $I_A \subsetneqq I_B$, 其中 I_A 表示 A 生成的双边理想. 本文研究了理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 上自同构的刻画问题. 通过研究 $\mathbb{B}(q,r)$ 中理想的形式, 在此基础上对给定的自同构构造一些标准自同构, 使得复合后的自同构固定所有的顶点, 从而给出了任意自同构的具体描述, 推广了文献 [13] 的结果.

关键词: 理想包含图; 图的自同构; 分块上三角矩阵; 理想

MR(2010) **主题分类号:** 05C20; 05C25; 05C60; 15A33 **中图分类号:** O157.5

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2018)01-0131-09

1 引言

近几十年来, 为了利用图的组合结构来研究环的代数结构, 人们利用环上的两种代数运算定义了多种图, 如环的零因子图、交换图、全图等, 这些图的定义以及部分研究结果可以参考文献 [1–9] 等. 众所周知环的许多性质与它的理想有着密切的关系. 自然地, 利用环的理想构造一些图, 通过研究这些图的组合性质来刻画环的理想性质有着重要的意义. 文献中相关的图有互极大图、理想交图、理想包含图等, 这些图的研究可以参考文献 [10–13] 等.

在研究与环相关的图时, 许多工作致力于研究图的一些参数, 比如围长、直径、团数、色数等. 这些参数可以揭示图的结构性质, 环的性质以及它们之间的相互关系. 另外, 图的自同构是代数图论中一个重要的概念, 它可以揭示图的顶点之间的关系以及图的对称性. 但是正如文献 [14] 中所说, 确定一个图的非平凡自同构不是一件容易的事. 通过查阅文献, 我们发现对于环上这些图, 有关自同构的结果很少. 我们只找到有关环上零因子图自同构的几个结果. 对于环 R, 零因子图记为 $\Gamma(R)$, $\mathrm{Aut}(\Gamma(R))$ 表示其上的自同构群. Anderson 与 Livinston [1] 证明了对于非素整数 $n \geq 4$, $\mathrm{Aut}(\Gamma(Z_n))$ 是对称群的直积. 对于素数 p 和非交换环 $R = Mat_2(Z_p)$, Han [15] 证明了 $\mathrm{Aut}(\Gamma(R)) \simeq S_{p+1}$. Park 与 Han [16] 证明了对于有限域 F_q 上的二阶矩阵环 $R = Mat_2(F_q)$, $\mathrm{Aut}(\Gamma(R)) \simeq S_{q+1}$. 但是最近文献 [17] 得出了下面的结论: $\mathrm{Aut}(\Gamma(\mathrm{M}_2(F_q)))$ 的大小是 $((q-1)!)^{(q+1)^2}(q+1)!$, 并指出上面两篇文章中的结论是不对的. 文献 [18] 与 [20] 进一步给出有限域上上三角矩阵环的零因子图的自同构刻画.

在文献 [12] 中, 环 R 上的理想包含图 $\mathrm{In}(R)$ 定义为以 R 的非平凡左理想为顶点集, 两个不同左理想 I 与 J 有一条边相连当且仅当 $I \subsetneqq J$ 或 $J \subsetneqq I$; 文献 [12] 中研究了图 $\mathrm{In}(R)$ 的连通性以及图的参数. 设 F_q 为有限域, F_q 上 $n \times n$ 阶上三角矩阵环记为 R. 文献 [13] 研究了

*收稿日期: 2016-06-04 接收日期: 2016-09-13
基金项目: 国家自然基金资助 (11571360).
作者简介: 陈莉 (1980–), 女, 江苏宿迁, 讲师, 主要研究方向: 代数图论.

环 R 上的理想关系图 $\Gamma_i(R)$, 以 R 为顶点集, 从 A 到 B 有一条有向边当且仅当 $I_A \subsetneqq I_B$, 其中 I_A 表示由 A 生成的双边理想, 并确定了它的自同构. 文献 [12] 与 [13] 中的图是有差别的, 但都是利用理想的包含关系定义的图, 所以可以统称为理想包含图. 本文将文献 [13] 中的结果推广到上三角代数上, 研究了有限域上分块上三角矩阵环上的理想包含图并给出了其上的自同构的描述.

设 F_q 为有限域, A 为分块上三角矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & \cdots & A^{1r} \\ 0 & A^{22} & \cdots & A^{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A^{rr} \end{pmatrix},$$

其中 $A^{ij}(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r)$ 为 F_q 上 $n_i \times n_j$ 矩阵. 对于固定的正整数序列 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$, 形如 A 的所有分块上三角矩阵记为 $\mathbb{B}(q, (n_1, n_2, \cdots, n_r))$, 简记为 $\mathbb{B}(q, r)$. 我们称 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 为 $\mathbb{B}(q, r)$ 的分块模式. 在矩阵的常用运算下, $\mathbb{B}(q, r)$ 是一个代数, 称之上三角代数.

理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$ 是一个有向图, 以 $\mathbb{B}(q, r)$ 为顶点集, 从 A 到 B 有一条有向边, 记为 $A \to B$, 当且仅当 $I_A \subsetneqq I_B$, 其中 I_A 表示由 A 生成的双边理想. 本文研究了 $\mathbb{B}(q, r)$ 中的理想, 证明了 $\mathbb{B}(q, r)$ 为主理想环, 并且给出了 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$ 上自同构的描述. 有限域 F_q 上的上三角矩阵是分块模式为 $(1, 1, \cdots, 1)$ 的分块上三角矩阵, 因此文献 [13] 中的理想关系图是本文研究对象的一个特例.

本文的第二节、第三节分别给出 $\mathbb{B}(q, r)$ 中理想的刻画与理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$ 上自同构的刻画.

2 上三角代数中的理想

令 $S = \{(i, j) | 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r\}$. 文献 [13] 在 S 上定义了二元关系 $\preccurlyeq$: $(i_1, j_1) \preccurlyeq (i_2, j_2)$ 当且仅当 $i_2 \leqslant i_1$ 且 $j_1 \leqslant j_2$. 若 $(i_1, j_1) \preccurlyeq (i_2, j_2)$ 且 $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, 则记为 $(i_1, j_1) \precneqq (i_2, j_2)$. 子矩阵 A^{ij} 所在的行集与列集分别记为 N_i 与 N_j, 且记 $(N_i, N_j) = \{(s, t) | s \in N_i, t \in N_j\}$.

定义 2.1 若 A 的子矩阵 A^{ij} 满足: $A^{ij} \neq 0$, 且对于任意的 $(s, t) \precneqq (i, j)$ 有 $A^{st} = 0$, 则称 A^{ij} 为 A 的承块. 记 A 的所有承块全体为 $\mathrm{supp}(A)$. 相应地, 称 (N_i, N_j) 为 A 的承块区, 记 A 的承块区全体为 $\mathrm{supp}^b(A)$. 记 $\overline{\mathrm{supp}}(A) = \{A^{kl} | (i, j) \preccurlyeq (k, l), A^{ij} \in \mathrm{supp}(A)\}$ 以及 $\overline{\mathrm{supp}^b}(A) = \{(N_k, N_l) | A^{kl} \in \overline{\mathrm{supp}}(A)\}$.

例 2.2 A 是 $\mathbb{Z}_5$ 上模式为 $(2, 1, 2, 1)$ 的分块上三角阵,

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{14} \\ 0 & A^{22} & A^{23} & A^{24} \\ 0 & 0 & A^{33} & A^{34} \\ 0 & 0 & 0 & A^{44} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

易见 $\mathrm{supp}(A) = \{A^{11}, A^{23}, A^{34}\}$, $\overline{\mathrm{supp}}(A) = \{A^{11}, A^{12}, A^{13}, A^{14}, A^{23}, A^{24}, A^{34}\}$. 承块 A^{11} 所在的区域为 $(N_1, N_1) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

显然, 若 $(s,t)\in(N_{i_1},N_{j_1})$, $(s',t')\in(N_{i_2},N_{j_2})$ 且 $(i_1,j_1)\preccurlyeq(i_2,j_2)$, 则有 $s'\leqslant s$ 且 $t\leqslant t'$; 若 $A^{i_1j_1}$ 与 $A^{i_2j_2}$ 均是 A 的承块, 则有 $i_1\neq i_2, j_1\neq j_2$.

引理 2.3 设 $A\in\mathbb{B}(q,r)$ 且 $\mathrm{supp}^b(A)=\{(N_{i_1},N_{j_1}),(N_{i_2},N_{j_2}),\cdots,(N_{i_m},N_{j_m})\}$.

(i) 若 $A^{kl}\notin\overline{\mathrm{supp}}(A)$, 则 $A^{kl}=0$; 若 $(i,j)\preccurlyeq(k,l)$, $A^{kl}\notin\overline{\mathrm{supp}}(A)$, 则 $A^{ij}=0$;

(ii) 若 $i_1<i_2<\cdots<i_m$, 则 $j_1<j_2<\cdots<j_m$.

证 (i) 的证明. 若 $A^{kl}\neq0$, 则存在序对 (i,j) 满足 $(i,j)\preccurlyeq(k,l)$ 且 $A^{ij}\in\mathrm{supp}(A)$, 从而 $A^{kl}\in\overline{\mathrm{supp}}(A)$, 矛盾. 结论的后半部分显然成立.

(ii) 的证明. 若存在序对 (s,t) 使得 $i_s<i_t$ 且 $j_s>j_t$, 则 $(i_t,j_t)\precneqq(i_s,j_s)$. 由 $A^{i_sj_s}$ 为承块得 $A^{i_tj_t}=0$, 这与 $A^{i_tj_t}$ 也是承块相矛盾. 因此结论成立.

引理 2.3 对刻画 $\mathbb{B}(q,r)$ 的理想和主理想有重要的作用.

定义 2.4 若 $i_k\leqslant j_k(1\leqslant k\leqslant m)$, $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant r$ 且 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant r$, 则称 $\{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots,(i_m,j_m)\}$ 为 $[1,r]\times[1,r]$ 上的一个上三角阶梯. 记 $[1,r]\times[1,r]$ 所有上三角阶梯的集合为 $uts(r)$.

由引理 2.3 知 $\mathbb{B}(q,r)$ 中任意非零元的承块区的指标集是一个上三角阶梯. 记 $\mathbb{B}(q,r)$ 的双边理想全体为 $I(\mathbb{B}(q,r))$. 对于 $A\in\mathbb{B}(q,r)$, I_A 表示由 A 生成的主理想. A 在 s 行、t 列处的元素用 A_{st} 来表示. 另外, 用 E_{st} 表示在 s 行、t 列处的元素为 1 且其余元素均为 0 的矩阵.

引理 2.5 设 I 为 $\mathbb{B}(q,r)$ 的一个理想. 若 $E_{st}\in I$ 且 $(s,t)\in(N_i,N_j)$, 则对于任意的 (i',j') 满足 $(i,j)\preccurlyeq(i',j')$ 以及任意的 $(s',t')\in(N_{i'},N_{j'})$ 有 $E_{s't'}\in I$.

证 由 $(i,j)\preccurlyeq(i',j')$, $(s,t)\in(N_i,N_j)$ 以及 $(s',t')\in(N_{i'},N_{j'})$, 得到 $s'\leqslant s$ 和 $t\leqslant t'$. 因此 $E_{s's},E_{tt'}\in\mathbb{B}(q,r)$ 且 $E_{s's}E_{st}E_{tt'}=E_{s't'}$, 从而有 $E_{s't'}\in I$.

命题 2.6 对于任意的 $A\neq0\in\mathbb{B}(q,r)$, $I_A=\mathcal{A}$, 其中

$$\mathcal{A}=\sum_{(N_i,N_j)\in\overline{\mathrm{supp}^b}(A)}\ \sum_{(s,t)\in(N_i,N_j)}F_qE_{st}.$$

证 首先证明对于任意的 $P,Q\in\mathbb{B}(q,r)$ 有 $PAQ\in\mathcal{A}$, 从而有 $I_A\subseteqq\mathcal{A}$. 由分块阵的乘法知, $PAQ\in\mathbb{B}(q,r)$. 而且对于 $1\leqslant k\leqslant l\leqslant r$,

$$(PAQ)^{kl}=\sum_{s=k}^{l}\sum_{t=s}^{l}P^{ks}A^{st}Q^{tl}.$$

设 $(N_k,N_l)\notin\overline{\mathrm{supp}^b}(A)$, 也就是 $A^{kl}\notin\overline{\mathrm{supp}}(A)$. 考察 PAQ 在分块区 (N_k,N_l) 处的子矩阵. 当 $k\leqslant s\leqslant t\leqslant l$ 时, $(s,t)\preccurlyeq(k,l)$. 由引理 2.3, $A^{st}=0$, 因此有 $(PAQ)^{kl}=0$. 由 (N_k,N_l) 的任意性, 有 $PAQ\in\mathcal{A}$.

下面证明对于任意的 $(N_{i'},N_{j'})\in\overline{\mathrm{supp}^b}(A)$ 以及 $(s',t')\in(N_{i'},N_{j'})$, 有 $E_{s't'}\in I_A$, 进而有 $\mathcal{A}\subseteqq I_A$. 由于 $(N_{i'},N_{j'})\in\overline{\mathrm{supp}^b}(A)$, 所以存在 $(i,j)\leqslant(i',j')$ 使得 $(N_i,N_j)\in\mathrm{supp}^b(A)$. 由 $(N_i,N_j)\in\mathrm{supp}^b(A)$ 知存在 $(s,t)\in(N_i,N_j)$ 满足 $a_{st}\neq0$, 从而有 $E_{st}=a_{st}^{-1}E_{ss}AE_{tt}\in I_A$. 由引理 2.5 可得对于任意 $(s',t')\in(N_{i'},N_{j'})$, $E_{s't'}\in I_A$. 综上可得 $\mathcal{A}=I_A$.

推论 2.7 存在 $\mathbb{B}(q,r)$ 的非零主理想与上三角阶梯 $uts(r)$ 之间的一一对应.

证 由引理 2.3 知 $\mathbb{B}(q,r)$ 中任意非零元素承块区的指标集是一个上三角阶梯. 同时显然对于每一个上三角阶梯, 存在 $\mathbb{B}(q,r)$ 中非零元素使其以该上三角阶梯为承块区的指标集. 另

外由命题 2.6 知对于任意的 $A,B\in\mathbb{B}(q,r)$, $I_A=I_B$ 当且仅当 $\mathrm{supp}^b(A)=\mathrm{supp}^b(B)$. 因此结论成立.

设 I 为 $\mathbb{B}(q,r)$ 的一个理想. 若存在 $(s,t)\in(N_i,N_j)$ 使得 $E_{st}\in I$, 则由引理 2.5 知对于任意的 $(s',t')\in(N_i,N_j)$ 有 $E_{s't'}\in I$.

定义 2.8 设 I 为 $\mathbb{B}(q,r)$ 的一个理想. 若存在 $(s,t)\in(N_i,N_j)$ 使得 $E_{st}\in I$, 则称分块区 (N_i,N_j) 为 I 的内块区. I 的所有内块区的集合记为 I^{in}, 它在全集 $\{(N_i,N_j)|1\leqslant i\leqslant j\leqslant r\}$ 下的补记为 I^{out}. 若 $(N_i,N_j)\in I^{in}$ 且对于任意的 $(i',j')\gneqq(i,j)$ 有 $(N_{i'},N_{j'})\in I^{out}$, 则称 (N_i,N_j) 为 I 的边界区. I 的所有边界区的集合记为 I^b.

若 $(N_i,N_j)\in I^{in}$ 且 $(i,j)\preccurlyeq(i',j')$, 由引理 2.5 知 $(N_{i'},N_{j'})\in I^{in}$. 对于子集 N_i, 令 $N_i^m=\min\{s|s\in N_i\}, N_i^M\doteq\max\{s|s\in N_i\}$. 若 $(N_i,N_j)\in I^{in}$, 则 $E_{N_i^MN_j^m}\in I$. 为了方便, $E_{N_i^MN_j^m}$ 也简记为 $E_{N_iN_j}$.

命题 2.9 $\mathbb{B}(q,r)$ 为主理想环.

证 零理想是由零生成的. 对于任意的非零理想 $I\in I(\mathbb{B}(q,r))$, 由上面的讨论知

$$I=\Sigma_{(N_i,N_j)\in I^{in}}\Sigma_{(s,t)\in(N_i,N_j)}F_qE_{st}.$$

令 $A=\Sigma_{(N_i,N_j)\in I^b}E_{N_iN_j}$. 由边界区的定义和性质知 I^b 恰是 A 的承块区 $\mathrm{supp}^b(A)$, 且容易看出 $\overline{\mathrm{supp}^b}(A)=I^{in}$, 从而由命题 2.6 得

$$I=I_A=\Sigma_{(N_i,N_j)\in\overline{\mathrm{supp}^b}(A)}\Sigma_{(s,t)\in(N_i,N_j)}F_qE_{st}.$$

推论 2.10 存在 $I(\mathbb{B}(q,r))/\{0\}$ 与 $uts(r)$ 之间的一一对应.

证 由推论 2.7 以及命题 2.9 可得.

3 $\mathbb{B}(q,r)$ 上的理想包含图及其上的自同构

理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 是一有向图, 以 $\mathbb{B}(q,r)$ 为顶点集且从 A 到 B 有一条有向边 $A\to B$ 当且仅当 $I_A\subsetneqq I_B$. 这里的理想包含图与文献 [12] 中的有些差别. 在文献 [12] 中, 环 R 上的理想包含图 $\mathrm{In}(R)$, 以 R 的所有非平凡的左理想为顶点, 左理想 I_1 和 I_2 之间有一条边相连当且仅当 $I_1\subsetneqq I_2$ 或 $I_2\subsetneqq I_1$. 因此文献 [12] 中理想包含图是无向的且顶点集是非平凡的左理想. 我们所讨论的理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 是有向图且顶点集是 $\mathbb{B}(q,r)$ 中的所有元素. 图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 的自同构群记为 $\mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$.

在图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 中, 顶点 A 的左、右邻点集分别记为 $N_l(A)=\{B|B\to A\}$ 与 $N_r(A)=\{B|A\to B\}$. 记 $d_i(A)=|N_l(A)|$ 以及 $d_o(A)=|N_r(A)|$, 它们分别称为 A 的入度和出度. 如果 A 与 B 在 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 中具有相同的左、右邻点, 则称 A 与 B 为孪生点, 记为 $A\sim B$. 若在图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 中, 两个顶点生成相同的主理想, 则它们显然是孪生点. 容易验证孪生关系 $\sim$ 是 $\mathbb{B}(q,r)$ 上的一个等价关系, 记 A 所在的孪生等价类为 $[A]$. 我们知道图的自同构保持顶点的度以及等价类的大小不变, 也就是, 对于任意的 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$ 和 $A\in\mathbb{B}(q,r)$, 有 $d_i(\sigma(A))=d_i(A)$, $d_o(\sigma(A))=d_o(A)$ 且 $|[\sigma(A)]|=|[A]|$.

引理 3.1 在理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 中, 下面的结论成立

(i) 从 A 到 B 有有向边 ($A\to B$) 当且仅当 $\overline{\mathrm{supp}^b}(A)\subsetneqq\overline{\mathrm{supp}^b}(B)$;

(ii) 设 $r\geqslant3$. 对于任意的 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant r$, $(s,t)\in(N_i,N_j)$ 以及 $(s',t')\in(N_{i'},N_{j'})$, $[E_{st}]=[E_{s't'}]$ 当且仅当 $(i,j)=(i',j')$;

(iii) 设 $r \geqslant 3$ 且 $(s,t) \in (N_i, N_j)$. $X \sim E_{st}$ 当且仅当 $\mathrm{supp}^b(X) = \{(N_i, N_j)\}$.

证 从命题 2.6 可以直接得到 (i).

(ii) 的证明. 若 $(i,j) = (i',j')$, 由推论 2.7 得到 $I_{E_{st}} = I_{E_{s't'}}$, 进而有 $[E_{st}] = [E_{s't'}]$. 下面证明若 $(i,j) \neq (i',j')$, 则 $[E_{st}] \neq [E_{s't'}]$. 假定 $(i,j) \neq (i',j')$. 若 $(i,j) \gneqq (i',j')$, 则由命题 2.6 得 $I_{E_{s't'}} \subsetneqq I_{E_{st}}$, 进而有 $E_{s't'} \to E_{st}$. 但是 $E_{st} \nrightarrow E_{st}$, 因此 $[E_{st}] \neq [E_{s't'}]$. 如果 $(i',j') \gneqq (i,j)$, 可以类似的得到 $[E_{st}] \neq [E_{s't'}]$. 下面假定 $i > i'$ 且 $j > j'$. 若 $j \neq r$, 则有 $E_{N_iN_r} \to E_{st}$, 但 $E_{N_iN_r} \nrightarrow E_{s't'}$. 若 $j' \neq 1$, 则有 $E_{s't'} \to E_{N_{i'}N_{j'-1}}$, 但 $E_{st} \nrightarrow E_{N_{i'}N_{j'-1}}$. 若 $j = r$ 且 $j' = 1$, 由 $r \geqslant 3$ 知存在 $j' < k < j$. 从而 $E_{N_{i'}N_k} \to E_{s't'}$, 但是 $E_{N_{i'}N_k} \nrightarrow E_{st}$. 因此都有 $[E_{st}] \neq [E_{s't'}]$. 当 $i < i'$ 且 $j < j'$ 时, 类似可得 $[E_{st}] \neq [E_{s't'}]$.

(iii) 的证明. 若 $\mathrm{supp}^b(X) = \{(N_i, N_j)\}$, 则由命题 2.6 有 $I_X = I_{E_{st}}$, 进而有 $X \sim E_{st}$. 因此充分性成立. 下面证明必要性. 假定 $X \sim E_{st}$. 若 $|\mathrm{supp}(X)| = 1$, 假设 $\mathrm{supp}^b(X) = \{(N_{i'}, N_{j'})\}$ 并任取 $(s',t') \in (N_{i'}, N_{j'})$. 由推论 2.7 知, $I_X = I_{E_{s't'}}$. 从而 $[X] = [E_{s't'}]$, 进而有 $[E_{st}] = [E_{s't'}]$. 由结论 (ii) 知 $(i,j) = (i',j')$. 因此 $\mathrm{supp}^b(X) = (N_i, N_j)$. 下面证明 $|\mathrm{supp}(X)|$ 不可能大于 1. 若 $|\mathrm{supp}(X)| \geqslant 2$, 则对于任意的 $(N_{i'}, N_{j'}) \in \mathrm{supp}^b(X)$ 以及 $(s',t') \in (N_{i'}, N_{j'})$, 有 $E_{s't'} \to X$. 因此 $E_{s't'} \to E_{st}$, 进而有 $(i,j) \gneqq (i',j')$. 由 $(N_{i'}, N_{j'})$ 的任意性, 得到 $I_X \subsetneqq I_{E_{st}}$, 进而 $X \to E_{st}$. 但 $E_{st} \nrightarrow E_{st}$, 与假定 $X \sim E_{st}$ 相矛盾.

推论 3.2 设 $r \geqslant 3$ 以及 $1 \leqslant k \leqslant r$. 对于任意的 $(s,t) \in (N_1, N_k)$, $|[E_{st}]| = (q^{n_1 n_k} - 1)q^{n_1(\sum\limits_{l=k+1}^{r} n_l)}$; 对于任意的 $(s',t') \in (N_k, N_r)$, $|[E_{s't'}]| = (q^{n_k n_r} - 1)q^{(\sum\limits_{l=1}^{k-1} n_l)n_r}$.

证 由引理 3.1 的 (iii) 知对于任意的 $(s,t) \in (N_1, N_k)$,

$$[E_{st}] = \{ \sum_{(i,j) \in \bigcup\limits_{l=k}^{r} (N_1, N_l)} a_{ij} E_{ij} | a_{ij} \in F_q, \text{ and } \exists (i,j) \in (N_1, N_k) \text{ s.t. } a_{ij} \neq 0 \}.$$

由此易见结论的前半部分成立, 后半部分同理可得.

引理 3.3 对于理想包含图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 中顶点的度, 下面的结论成立.

(i) $d_i(0) = 0$;

(ii) 任意 $(s,t) \in (N_1, N_r)$, $d_i(E_{st}) = 1$; 任意 $A \in \mathbb{B}(q,r)$, $d_i(A) = 1$ 当且仅当 $A \sim E_{N_1 N_r}$;

(iii) 任意 $(s,t) \in (N_1, N_k)$, $d_i(E_{st}) = q^{n_1 \sum\limits_{l=k+1}^{r} n_l}$, 其中 $1 \leqslant k \leqslant r-1$; 任意 $(s,t) \in (N_k, N_r)$, $d_i(E_{st}) = q^{n_r \sum\limits_{l=1}^{k-1} n_l}$, 其中 $2 \leqslant k \leqslant r$;

(iv) 任意 $A \in \mathbb{B}(q,r)$, $d_i(A) = q^{n_1 n_r}$ 当且仅当 $A \sim E_{N_1 N_{r-1}}$ 或 $A \sim E_{N_2 N_r}$.

证 由引理 3.1 可得 $N_l(0) = \emptyset$; 任意的 $(s,t) \in (N_1, N_r)$, $N_l(E_{st}) = \{0\}$; 任意的 $1 \leqslant k \leqslant r-1$ 以及 $(s,t) \in (N_1, N_k)$, $N_l(E_{st}) = \{E_{s't'} | (s',t') \in \bigcup\limits_{m=k+1}^{r} (N_1, N_m)\}$; 任意的 $2 \leqslant k \leqslant r$ 以及 $(s,t) \in (N_k, N_r)$, $N_l(E_{st}) = \{E_{s't'} | (s',t') \in \bigcup\limits_{m=1}^{k-1} (N_m, N_r)\}$. 显然, 若 $A \neq 0$, $A \nsim E_{N_1 N_r}$, $A \nsim E_{N_1 N_{r-1}}$ 且 $A \nsim E_{N_2 N_r}$, 则有 $d_i(A) > q^{n_1 n_r}$. 因此结论成立.

若双射 $\sigma : \mathbb{B}(q,r) \to \mathbb{B}(q,r)$ 只置换孪生点, 则 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$, 这样的自同构称之为奇异自同构. 图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 上奇异自同构的全体记为 $\mathrm{Sin}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$.

定理 3.4 图 $In(\mathbb{B}(q,2))$ 上的自同构都是奇异的.

证 当 $r=2$, 上三角阶梯 $utr(2)$ 只有四种形式且对应的代表元可取

$$E_{N_1N_2}, E_{N_1N_1}, E_{N_2N_2}, E_{N_1N_1}+E_{N_2N_2},$$

同时有 $d_i(0)=0$; $d_i(E_{N_1N_2})=1$; $d_i(E_{N_1N_1})=d_i(E_{N_2N_2})=q^{n_1n_2}$; $d_i(E_{N_1N_1}+E_{N_2N_2})>q^{n_1n_2}$. 另外在 $\mathbb{B}(q,2)$ 中, $E_{N_1N_1}\sim E_{N_2N_2}$. 既然自同构保持顶点的度, 从而 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,2))$ 上的自同构都是奇异的, 即 $\mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,2)))=\mathrm{Sin}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,2)))$.

假设 $(n_1,n_2,\cdots n_r)$ 为一正整数序列满足: 对于任意的 $1\leqslant k\leqslant r$ 都有 $n_k=n_{r+1-k}$. 定义映射 $\tau_P:\mathbb{B}(q,r)\rightarrow\mathbb{B}(q,r)$, 对于任意的 $A\in\mathbb{B}(q,r)$, $\tau_P(A)=PA^TP$, 其中 $P=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}E_{i,n+1-i}$, $n=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant r}n_i$¡¡$A^T$ 表示 A 的转置. 容易验证在假定条件下 τ_P 的定义是合理的且是一个双射.

命题 3.5 τ_P 为图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 上的自同构.

证 假设从 A 到 B 有有向边, $A\rightarrow B$. 从而有 $I_A\subsetneqq I_B$, 进而 $A\in I_B$. 因此存在 $Q_1,Q_2\in\mathbb{B}(q,r)$ 使得 $A=Q_1BQ_2$. 从而有 $PA^TP=(PQ_2^TP)(PB^TP)(PQ_1^TP)$. 因此 $I_{PA^TP}\subseteqq I_{PB^TP}$. 若 $I_{PA^TP}=I_{PB^TP}$, 则 $PB^TP\in I_{PA^TP}$. 同上类似可得 $B\in I_A$, 进而有 $I_A=I_B$, 与前提 $I_A\subsetneqq I_B$ 相矛盾. 因此 $I_{PA^TP}\subsetneqq I_{PB^TP}$, 进而有 $\tau_P(A)\rightarrow\tau_P(B)$. 所以 $\tau_P\in\mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$.

假设 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))(r\geqslant 3)$. 为了刻画 σ, 需要揭示对于任意的 $A\in\mathbb{B}(q,r)$, A 与 $\sigma(A)$ 之间的关系.

引理 3.6 $\sigma(0)=0$; $[\sigma(E_{N_1N_r})]=[E_{N_1N_r}]$; $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_1N_{r-1}}]$ 或 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_2N_r}]$ 且 $n_1n_{r-1}=n_2n_r$.

证 从引理 3.3, 推论 3.2 以及 σ 保持顶点度以及孪生等价类大小, 可得结论成立.

命题 3.7 (i) 若 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_1N_{r-1}}]$, 则对于任意的 $2\leqslant k\leqslant r-1$, $[\sigma(E_{N_1N_{r-k}})]=[E_{N_1N_{r-k}}]$ 成立;

(ii) 若 $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_2N_r}]$, 则对于任意的 $3\leqslant k\leqslant r$, $[\sigma(E_{N_kN_r})]=[E_{N_kN_r}]$ 成立;

(iii) 若 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_2N_r}]$, 则对于任意的 $0\leqslant k\leqslant r-1$, $[\sigma(E_{N_1N_{r-k}})]=[E_{N_{k+1}N_r}]$ 且 $n_1n_{r-k}=n_{k+1}n_r$.

证 (i) 的证明. 在假定条件下 $k=1$ 时结论成立. 下面证明若结论当 $k=t$ 时成立, 则当 $k=t+1$ 时结论也成立. 从而由归纳法知结论对于任意的 k 都成立. 假定 $[\sigma(E_{N_1N_{r-t}})]=[E_{N_1N_{r-t}}]$. 由 $E_{N_1N_{r-t}}\rightarrow E_{N_1N_{r-(t+1)}}$, 可得 $E_{N_1N_{r-t}}\rightarrow\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}})$. 因此 $I_{E_{N_1N_{r-t}}}\subsetneqq I_{\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}})}$. 由引理 2.3, 存在 $(N_i,N_j)\in\mathrm{supp}^b(\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}}))$ 且 $(i,j)\preccurlyeq(1,r-t)$. 因此 $i\geqslant 1$ 且 $j\leqslant r-t$. 若 $i\geqslant 2$ 或 $\mathrm{supp}^b(\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}}))-\{(N_i,N_j)\}\neq\emptyset$, 则有

$$\{E_{ij}|1\leqslant i\leqslant n_1, \sum_{s=1}^{r-t-1}n_s<j\leqslant\sum_{s=1}^{r}n_s\}\subsetneqq N_i(\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}})),$$

从而有 $d_i(\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}}))>q^{n_1(\sum\limits_{s=r-t}^{r}n_s)}$, 矛盾. 因此 $\mathrm{supp}^b(\sigma(E_{N_1N_{r-(k+1)}}))=\{(N_1,N_j)\}$. 由 $d_i(\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}}))=d_i(E_{N_1N_{r-(t+1)}})$ 以及引理 3.3 可得 $j=r-(t+1)$, 进而有

$$[\sigma(E_{N_1N_{r-(t+1)}})]=[E_{N_1N_{r-(t+1)}}].$$

(ii) 的证明. 由 $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_2N_r}]$ 证明对于任意的 $1\leqslant k\leqslant r$, $[\sigma(E_{N_kN_r})]=[E_{N_kN_r}]$ 成立, 可以类似于 (i), 省略.

(iii) 的证明. 由假定以及引理 3.6 知结论当 $k=0,1$ 时成立. 下面用归纳法来证明. 假设结论当 $k=l$ 时成立. 由 $[\sigma(E_{N_1N_{r-l}})]=[E_{N_{l+1}N_r}]$ 以及 $E_{N_1N_{r-l}}\to E_{N_1N_{r-(l+1)}}$, 可得 $E_{N_{l+1}N_r}\to\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}})$. 因此 $I_{E_{N_{l+1}N_r}}\subsetneqq I_{\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}})}$. 由命题 2.6 知存在 $(N_i,N_j)\in\operatorname{supp}^b(\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}}))$ 且 $(i,j)\preccurlyeq(l+1,r)$. 因此 $j\leqslant r$ 且 $i\geqslant l+1$. 若 $j<r$ 且 $\operatorname{supp}^b(\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}}))-\{(i,j)\}\neq\emptyset$, 则

$$\{E_{ij}|1\leqslant i\leqslant\sum_{s=1}^{l+1}n_s,\ \ \sum_{t=1}^{r-1}n_t+1<j\leqslant\sum_{t=1}^{r}n_t\}\subsetneqq N_i(\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}})).$$

因此 $d_i(\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}}))>q^{n_r(\sum\limits_{t=1}^{l+1}n_t)}$. 但是由引理 3.3 知道 $d_i(E_{N_1N_{r-(l+1)}})=q^{n_1\sum\limits_{t=r-l}^{r}n_t}$. 再由归纳假设知 $n_1(n_r+\cdots+n_{r-l})=(n_1+\cdots+n_{l+1})n_r$, 从而有 $d_i(\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}}))=d_i(E_{N_1N_{r-(l+1)}})=q^{n_r\sum\limits_{t=1}^{l+1}n_t}$, 矛盾. 因此 $\operatorname{supp}^b(\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}}))=\{(N_i,N_r)\}$. 再由引理 3.3 可得 $i=l+2$, 进而有 $[\sigma(E_{N_1N_{r-(l+1)}})]=[E_{N_{l+2}N_r}]$.

最后, 由 σ 保持孪生类大小知 $|[E_{N_1N_{r-(l+1)}}]|=|[E_{N_{l+2}N_r}]|$. 再由推论 3.2 知

$$(q^{n_1n_{r-(l+1)}}-1)q^{n_1(\sum\limits_{t=r-l}^{r}n_t)}=(q^{n_{l+2}n_r}-1)q^{n_r(\sum\limits_{t=1}^{l+1}n_t)}.$$

由归纳假设知 $n_1n_{r-(l+1)}=n_{l+2}n_r$. 因此当 $k=l+1$ 时结论也成立. 由归纳法知结论对于任意的 $0\leqslant k\leqslant r-1$ 都成立.

定理 3.8 假定 $r\geqslant 3$. 对于 $\sigma\in\operatorname{Aut}(\operatorname{In}(\mathbb{B}(q,r)))$, 存在奇异自同构 $\rho\in\operatorname{Sin}(\operatorname{In}(\mathbb{B}(q,r)))$ 和 $\delta\in\{0,1\}$ 使得 $\sigma=\tau_P^\delta\circ\rho$.

证 由引理 3.6 知, $\sigma(0)=0$; $[\sigma(E_{N_1N_r})]=[E_{N_1N_r}]$; $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_1N_{r-1}}]$ 或 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_2N_r}]$. 首先证明存在 $\delta\in\{0,1\}$ 使得 $\sigma_1=\tau_P^\delta\circ\sigma$ 稳定任意的 $[E_{N_iN_j}]$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant r)$. 分两种情况来讨论.

情形 1 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})]=[E_{N_1N_{r-1}}]$.

由引理 3.6 和命题 3.7 知, 对于任意的 $1\leqslant k\leqslant r$ 有 $[\sigma(E_{N_1N_k})]=[E_{N_1N_k}]$. 下面证明 $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_2N_r}]$ 也成立, 进而由命题 3.7 知对于任意的 $1\leqslant k\leqslant r$ 有 $[\sigma(E_{N_kN_r})]=[E_{N_kN_r}]$. 由引理 3.3 知, $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_2N_r}]$ 或 $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_1N_{r-1}}]$. 若 $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_1N_{r-1}}]$, 由 $E_{N_1N_{r-1}}\to E_{N_1N_{r-2}}$ 且 $[\sigma(E_{N_1N_{r-2}})]=[E_{N_1N_{r-2}}]$, 可得 $\sigma(E_{N_2N_r})\to\sigma(E_{N_1N_{r-2}})$, 从而得到 $E_{N_2N_r}\to E_{N_1N_{r-2}}$, 这显然是不可能的. 因此 $[\sigma(E_{N_2N_r})]=[E_{N_2N_r}]$.

下面证明对于任意的 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant r$, $[\sigma(E_{N_iN_j})]=[E_{N_iN_j}]$ 成立. 对 i 做归纳证明. 当 $i=1$ 时结论成立; 假设当 $1\leqslant i-1\leqslant j\leqslant r$ 时结论成立, 下面证明当 $1<i\leqslant j\leqslant r$ 时结论也成立. 为此对 j 再做归纳证明. 由上面的讨论知当 $j=r$ 时结论是成立的; 假定当 $1<i\leqslant j+1\leqslant r$ 时结论成立. 由 $E_{N_{i-1}N_j}\to E_{N_iN_j}$, $E_{N_iN_{j+1}}\to E_{N_iN_j}$, $[\sigma(E_{N_{i-1}N_j})]=[E_{N_{i-1}N_j}]$ 且 $[\sigma(E_{N_iN_{j+1}})]=[E_{N_iN_{j+1}}]$, 可以得出 $E_{N_{i-1}N_j}\to\sigma(E_{N_iN_j})$ 且 $E_{N_iN_{j+1}}\to\sigma(E_{N_iN_j})$. 由 $E_{N_1N_{j-1}}\nrightarrow E_{N_iN_j}$, $E_{N_{i+1}N_r}\nrightarrow E_{N_iN_j}$, $[\sigma(E_{N_1N_{j-1}})]=[E_{N_1N_{j-1}}]$ 且 $[\sigma(E_{N_{i+1}N_r})]=[E_{N_{i+1}N_r}]$, 可以得出 $E_{N_1N_{j-1}}\nrightarrow\sigma(E_{N_iN_j})$ 且 $E_{N_{i+1}N_r}\nrightarrow\sigma(E_{N_iN_j})$. 因此

$\sigma(E_{N_iN_j}) \sim E_{N_iN_j}$ 或 $\sigma(E_{N_iN_j}) \sim E_{N_{i-1}N_j}+E_{N_iN_{j+1}}$. 但是容易验证 $d_i(E_{N_{i-1}N_j}+E_{N_iN_{j+1}}) < d_i(E_{N_iN_j})$. 因此 $\sigma(E_{N_iN_j}) \sim E_{N_iN_j}$. 令 $\sigma_1 = \tau_P^{\delta} \circ \sigma$ 且此时 $\delta = 0$.

情形 2 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})] = [E_{N_2N_r}]$.

由命题 3.7 知对于任意的 $0 \leqslant k \leqslant r-1$ 有 $[\sigma(E_{N_1N_{r-k}})] = [E_{N_{k+1}N_r}]$ 且 $n_1n_{r-k} = n_{k+1}n_r$; 令 $\sigma_1 = \tau_P \circ \sigma$, 则有 $[\sigma_1(E_{N_1N_r})] = [E_{N_1N_r}]$ 且 $[\sigma_1(E_{N_1N_{r-1}})] = [E_{N_1N_{r-1}}]$. 由情形 1 知 $[\sigma_1(E_{N_iN_j})] \sim [E_{N_iN_j}] (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r)$. 此时 $\sigma_1 = \tau_P^{\delta} \circ \sigma$ 且 $\delta = 1$.

下面证明 σ_1 稳定任意的孪生等价类, 即对于任意的 $A \in \mathbb{B}(q,r)$, 有 $[\sigma_1(A)] = [A]$.

假定 $A \neq 0$ 且 $\mathrm{supp}^b(A) = \{(N_{i_1}, N_{j_1}), (N_{i_2}, N_{j_2}), \cdots, (N_{i_m}, N_{j_m})\}$. 若 $m = 1$, 则 $[A] = [E_{N_{i_1}N_{j_1}}]$. 因此 $[\sigma_1(A)] = [A]$. 若 $m \geqslant 2$, 由 $E_{N_{i_k}N_{j_k}} \to A$ 以及 $[\sigma_1(E_{N_{i_k}N_{j_k}})] = [E_{N_{i_k}N_{j_k}}]$ 可得 $E_{N_{i_k}N_{j_k}} \to \sigma_1(A)$. 因此 $I_{E_{N_{i_k}N_{j_k}}} \subsetneqq I_{\sigma_1(A)}$. 令 $X = \sum\limits_{k=1}^{m} E_{N_{i_k}N_{j_k}}$. 由命题 2.6 得 $I_A = I_X \subseteq I_{\sigma_1(A)}$. 同样的考虑 σ_1^{-1} 的作用, 可以得出对于任意的 $A \in \mathbb{B}(q,r)$ 有 $I_{\sigma_1(A)} \subseteq I_A$. 因此 $I_{\sigma_1(A)} = I_A$, 进而有 $[\sigma_1(A)] = [A]$.

令 $\rho = \sigma_1$, 则 $\rho \in \mathrm{Sin}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$. 进而有 $\sigma = (\tau_P^{\delta})^{-1} \circ \rho = \tau_P^{\delta} \circ \rho$, 结论得证.

推论 3.9 假定 $r \geqslant 3$. 若存在 $1 \leqslant k \leqslant r$ 满足 $n_k \neq n_{r+1-k}$, 则图 $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))$ 上的每一个自同构均是奇异的.

证 假设存在 $1 \leqslant k \leqslant r$ 使得 $n_k \neq n_{r+1-k}$. 由定理 3.8 的证明过程可得, 对于任意的 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$, 有 $[\sigma(E_{N_1N_{r-1}})] = [E_{N_1N_{r-1}}]$. 进而对于任意的 $A \in \mathbb{B}(q,r)$ 有 $[\sigma(A)] = [A]$, 即 $\sigma \in \mathrm{Sin}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$. 所以 $\mathrm{Aut}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r))) = \mathrm{Sin}(\mathrm{In}(\mathbb{B}(q,r)))$.

参 考 文 献

[1] Anderson D F, Livinston P S. The zero-divisor graph of a commutative ring[J]. J. Alg., 1999, 217: 434–447.

[2] Redmond S P. The zero-divisor graph of a non-commutative ring[J]. Intern. J. Commut. Rings, 2002, 1(4): 203–211.

[3] Akbari S, Mohammadian A. Zero-divisor graphs of non-commutative rings[J]. J. Algebra, 2006, 296: 462–479.

[4] Akbari S, Ghandehari M, Hadian M, Mohammadian A. On commuting graphs of semisimple rings[J]. Linear Alg. Appl., 2004, 390: 345–355.

[5] Abdollahi A. Commuting graphs of full matrix rings over finite fields[J]. Linear Alg. Appl., 2008, 428: 2947–2954.

[6] Mohammadian A. On commuting graphs of finite matrix rings[J]. Commun. Alg., 2010, 38: 988–994.

[7] Anderson D F, Badawi A. The total graph of a commutative ring[J]. J. Alg., 2008, 320: 2706–2719.

[8] Akbari S, Kiani D, Mohammadi F, Moradi S. The total graph and regular graph of a commutative ring[J]. J. Pure Appl. Alg., 2009, 213: 2224–2228.

[9] Akbari S, Aryapoor M, Jamaali M. Chromatic number and clique number of subgraphs of regular graph of matrix algebras[J]. Linear Alg. Appl., 2012, 436: 2419–2424.

[10] Sharma P K, Bhatwadekar S M. A note on graphical representation of rings[J]. J. Alg., 1995, 176: 124–127.

[11] Chakrabarty I, Ghosh S, Mukherjee T K, Sen M K. Intersection graphs of ideals of rings[J]. Disc. Math., 2009, 309: 5381–5392.

[12] Akbari S, Habibi M, Majidinya A, Manaviyat R. The inclusion ideal graph of rings[J]. Comm. Alg., 2015, 43: 2457–2465.

[13] Ma X B, Wong D. Automorphism group of an ideal-relation graph over a matrix ring[J]. Linear Multi. Alg., 2016, 64: 309–320.

[14] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

[15] Han J. The zero-divisor graph under group actions in a noncommutative ring[J]. J. Korean Math. Soc., 2008, 45(6): 1647–1659.

[16] Park S, Han J. The group of graph automorphisms over a matrix ring[J]. J. Korean Math. Soc., 2011, 48(2): 301–309.

[17] Ma X B, Wang D Y, Zhou J M. Automorphisms of the zero-divisor graph over 2×2 matrices[J]. J. Korean Math. Soc., 2016, 53(3): 519–532.

[18] Wong D, Ma X B, Zhou J M. The group of automorphisms of a zero-divisor graph based on rank one upper triangular matrices[J]. Linear Alg. Appl., 2014, 460: 242–258.

[20] Wang L. A note on automorphisms on the zero-divisor graph of upper triangular matrices[J]. Linear Alg. Appl., 2015, 465: 214–220.

[20] Chen M X, Chen Q H. The automorphisms of triangular algebras[J]. J. Math., 2010, 30(4): 587–594.

AUTOMORPHISMS OF INCLUSION IDEAL GRAPHS OVER BLOCK UPPER TRIANGULAR MATRICES

CHEN Li

(*Department of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China*)

Abstract: Let F_q be a finite field and $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ a sequence of positive integers. The algebra $\mathbb{B}(q, r)$ consists of all block upper triangular matrices over F_q with an $n_i \times n_i$ square matrix as i-diagonal block $(1 \leqslant i \leqslant r)$. The inclusion ideal graph $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$ is defined as a directed graph whose vertex set is $\mathbb{B}(q, r)$ and there is a directed edge from A to B if and only if $I_A \subsetneqq I_B$ where I_A denotes the two-sided ideal generated by A. In this paper, we investigate the characterization of the automorphisms of $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$. We first investigate the ideals of $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$, then for any given automorphism of $\mathrm{In}(\mathbb{B}(q, r))$, by constructing some standard automorphisms such that the composition of these automorphisms fixes all vertices, we give a explicit description of the given automorphism, which extends the result of the reference [13].

Keywords: inclusion ideal graph; graph automorphism; block upper triangular matrix; ideal

2010 MR Subject Classification: 05C20; 05C25; 05C60; 15A33