Vol. 37 (2017)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

光滑映射芽的 $\mathscr{R}_N$ - 轨道切空间及 $\mathscr{R}_N$ - 无限决定性

苏 丹 [1], 刘恒兴 [2]

(1. 对外经贸大学统计学院, 北京 100029)

(2. 武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了光滑映射芽在 $\mathscr{R}_N$ 作用下的轨道切空间的问题. 利用乘积积分理论的方法, 获得了光滑映射芽关于右等价群的一类子群 $\mathscr{R}_N$ 的无限决定性的结果, 推广了光滑映射芽是 $\mathscr{R}_N$ - 有限决定的结果.

关键词: 映射芽; 无限决定性; $\mathscr{R}_N$ 子群; 切空间

MR(2010) **主题分类号**: 58K40 **中图分类号**: O192

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)03-0467-07

1 引言

决定性问题是奇点理论中的基本论题.

在文献 [6] 中, Mather 考虑了光滑映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 在群 $\mathscr{L},\mathscr{R},\mathscr{A},\mathscr{K}$ 作用下的有限决定性问题. 而无限决定性概念是有限决定性的延伸. 无限决定性涉及光滑映射芽在平坦扰动下的稳定性问题. 文献 [2–5] 研究了光滑映射芽在群 $\mathscr{J}=\mathscr{L},\mathscr{R},\mathscr{C},\mathscr{K}$ 作用下的无限决定性问题, 以及文献 [12] 研究了带参数的函数芽的无限决定性问题.

如果记 ε_n 为所有光滑函数芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 构成的环, m_n 为所有光滑函数芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ 构成的理想, 它是 ε_n 的极大理想. 如果将 ε_n 中的所有平坦函数芽构成的理想记为 m_n^∞, 那么 $m_n^\infty=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}m_n^k$. 对于芽 f, 记 $j^kf(x)$ 为芽 f 在 x 处的 k 阶 Taylor 多项式. 特别地, 当 $k=\infty$ 时, 将 $j^\infty f(x)$ 看作芽 f 在 x 处的 Taylor 级数. 而对于 $f\in\varepsilon_n$, f 是 $\mathscr{R}_N$ - 无限决定的意指对于任意的 $u\in m^\infty$, 存在原点处的一个光滑微分同胚芽 ϕ 使得 $f+u=f\circ\phi$, 简记为

$$f+m^\infty\subset f\circ\mathscr{R},$$

这里 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 在原点处的光滑微分同胚芽构成的群. 在文献 [2] 或 [5] 的第二部分中有下述结果.

定理 1.1 设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 则下列条件等价:

(1) f 是无限 $\mathscr{R}$ - 决定的;

(2) $J(f)\supset m_n^\infty$;

(3) (若 f 是解析的) f 在 0 处有一个孤立奇点,

其中 $J(f)$ 表示 Jacobian 理想 $\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle\varepsilon_n$.

---

*收稿日期: 2015-01-22 接收日期: 2015-05-06

基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (11501103).

作者简介: 苏丹 (1977–), 女, 吉林四平, 副教授, 主要研究方向: 奇点理论.

对于非孤立奇点的情况, Sun 和 Wilson 在文 [9] 中研究了带有某些条件的光滑函数芽的无限相对决定性. 在文 [9] 中, 若集合 X 是 x_n - 轴, I 是 ε_n 中由前 $n-1$ 个坐标 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 生成的理想. 设 $f\in I^2$, 如果 $f+m^\infty I^2\subset f\circ\mathscr{R}^X$, 那么 f 是无限决定的, 其中 $\mathscr{R}^X$ 表示 $\mathscr{R}$ 中保持 X 不变的元素构成的子群, 并且给出了下述结果.

定理 1.2 设 $f\in I^2$, 则 $f+m^\infty I^2\subset f\circ\mathscr{R}^X$ 当且仅当 $m^\infty I\subset J(f)$.

此外, 文献 [7–8] 研究了关于作用群 $\mathscr{R}$ 的一些子群 $\mathscr{R}_N$ 和 $\mathscr{R}_I$ 的光滑映射芽的有限性问题, 其中 $\mathscr{R}_N$ 是 $\mathscr{R}$ 中不同于 $\mathscr{R}^X$ 的子群. 受上述文献的启发, 本文首先考虑了光滑映射芽在 $\mathscr{R}_N$ 作用下的轨道切空间, 这个切空间是轨道的无穷小逼近; 然后利用乘积积分理论研究光滑映射芽关于作用群 $\mathscr{R}$ 的一类子群 $\mathscr{R}_N$ 的无限决定性问题, 并给出映射芽在该子群作用下无限决定的充要条件: 设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 则 f 是无限 $\mathscr{R}_N$ - 决定的当且仅当 $m_n^\infty\varepsilon_n^p\subset T\mathscr{R}_Nf$, 其中 $T\mathscr{R}_Nf$ 是轨道在 f 处的切空间.

2 基本记号与概念

记 ε_n 为所有光滑函数芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 构成的环, m_n 为所有光滑函数芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ 构成的理想, 它是 ε_n 的极大理想. 如果将 ε_n 中的所有平坦函数芽构成的理想记为 m_n^∞, 那么 $m_n^\infty=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}m_n^k$. 对于芽 f, 记 $j^kf(x)$ 为芽 f 在 x 处的 k 阶 Taylor 多项式. 特别地, 当 $k=\infty$ 时, 将 $j^\infty f(x)$ 看作芽 f 在 x 处的 Taylor 级数.

文献 [6] 中, Mather 定义了右等价群 $\mathscr{R}=\{h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 是微分同胚芽 $\}$, 两个映射芽 $f,g\in\varepsilon_n$ 是 $\mathscr{R}$ - 等价的当且仅当存在一个微分同胚芽 $h\in\mathscr{R}$, 使得 $f\circ h=g$, 其中 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^T$. 因为 $h(0)=0$, 所以 $h_i(0)=0,\ i=1,2,\cdots,n$. 从而 $h_i(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x)x_j$, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 且 $a_{ij}(x)\in\varepsilon_n$. 因此 $h(x)=A[x]\cdot x$, 其中 $A(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}$. 因为 h 在 $x=0$ 处的 Jacobian 矩阵为 $J(h)|_{x=0}=A[0]$, 并且 h 是可逆的, 所以 $A[0]$ 是非奇异的. 由此, 函数芽 $f,g\in\varepsilon_n$ 是 $\mathscr{R}$ - 等价的当且仅当存在一个矩阵芽 $A[x]\in\varepsilon_n^{n\times n}$, 其中 $A[0]$ 非奇异, 使得 $f(A[x]\cdot x)=g(x)$.

现若设 $R=\{A[x]\mid A:(\mathbb{R}^n,0)\to GL(\mathbb{R},n)$ 是光滑映射芽$\}$, 则 $\mathscr{R}=\{A[x]\cdot x\mid A[x]\in R\}$. 对于给定矩阵 $N\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义 R 的子群

$$R_N=\{A[x]\in R\mid A[x]\cdot N\cdot(A[x])^T=N,x\in(\mathbb{R}^n,0)\},$$

以及 $\mathscr{R}$ 的子群 (参见文 [8])

$$\mathscr{R}_N=\{A[x]\cdot x\mid A[x]\in R_N,x\in(\mathbb{R}^n,0)\}.$$

如果 $N=I_n,\begin{pmatrix}I_r&0\\0&-I_r\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, 那么 R_N 分别为实正交群, Lorentz 群和 R 自身. 特别地, 当 $n=2m$ 且 $N=\begin{pmatrix}0&I_m\\-I_m&0\end{pmatrix}$ 时, $R_N=Sp(2m,\mathbb{R})$ 为实辛群.

记 ε_n^p 为所有光滑映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 构成的环, $m_n\varepsilon_n^p$ 为所有光滑映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 构成的理想. 对于 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 用 $V(f)$ 表示所有沿 f 的光滑向量场组成的 ε_n 模. 这个模通过它的自由基 $\frac{\partial}{\partial y_1}\circ f,\cdots,\frac{\partial}{\partial y_p}\circ f$ 可以等同于 ε_n^p. 特别地, 如果 f 分别

是 $(\mathbb{R}^n,0)$, $(\mathbb{R}^p,0)$ 到自身的恒同映射芽, 此时的 $V(f)$ 分别就是秩为 n 的自由 ε_n 模 $V(\mathbb{R}^n)$, 秩为 p 的自由 ε_p 模 $V(\mathbb{R}^p)$. 定义 $tf: V(\mathbb{R}^n)\to V(f)$ 为 $tf(X)(x)=\mathrm{D}f(x)(X(x))$, $X\in V(\mathbb{R}^n)$, $x\in(\mathbb{R}^n,0)$, 它是两个自由 ε_n 模之间的线性映射, 其中 $\mathrm{D}f$ 是 f 的 Jacobian 矩阵 (参见文 [10]).

定义 2.1 (参见文 [7]) f 与 g 是 $\mathscr{R}_N$ - 等价的意指存在 $A[x]\cdot x\in\mathscr{R}_N$ 使得 $f(A[x]\cdot x)=g(x)$ (记为 $f\circ A=g$).

注 1 若记 $\mathscr{R}_N\cdot f$ 表示芽 f 在群 $\mathscr{R}_N$ 作用下的轨道, 则芽 f 与 g 是 $\mathscr{R}_N$ - 等价的当且仅当 f 与 g 是属于同一个 $\mathscr{R}_N$ - 轨道.

定义 2.2 (参见文 [7]) $V_N(\mathbb{R}^n)=\{A[x]\mid A[x]\in\varepsilon_n^{n\times n}, A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0, x\in(\mathbb{R}^n,0)\}$, $\mathscr{V}_N(\mathbb{R}^n)=\{A[x]\cdot x\mid A[x]\in V_N(\mathbb{R}^n)\}$.

引理 2.1 (Nakayama 引理) 设 A 是一个具有单位元 (记为 1) 的交换环, I 为 A 中的理想且具有下列性质: 对每一 $\alpha\in I$, $1+\alpha$ 是 A 中的可逆元, 假设 M 是有限生成的 A - 模, N 为 M 的 A - 子模. 若 $N+I\cdot M=M$, 则 $N=M$.

3 轨道 $\mathscr{R}_N\cdot f$ 的切空间

设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 记 $\mathscr{R}_N\cdot f:=\{\phi\cdot f\mid 对任意的\phi\in\mathscr{R}_N\}$ 为 f 在 $\mathscr{R}_N$ 作用下的轨道. 现取 ε_{n+1}^p 中的光滑映射芽 γ, 设 $\gamma_t(x)=\gamma(x,t)$, 当 t 足够小时, $\gamma_t\in\varepsilon_n^p$. 假设 $\gamma_0=f$ 和 $\gamma_t\in\mathscr{R}_N\cdot f$, 则对每个 t, 存在 $\psi_t\in\mathscr{R}_N$ 使得 $\gamma_t=\psi_t\circ f$, 但这不能确保我们所选取的 ψ_t 使得 $\psi:(x,t)\to\psi(x,t)=\psi_t(x)$ 是 $(\mathbb{R}^{n+1},0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 的一个光滑映射芽.

因此, 为了研究轨道 $\mathscr{R}_N\cdot f$ 的切空间, 应先来考虑导网空间中的轨道 $\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf$ 的切空间.

引理 3.1 记 $R_N^k=\{j^k\phi\mid\phi\in R_N\}$, $V_N^k(\mathbb{R}^n)=\{j^k\varphi\mid\varphi\in V_N(\mathbb{R}^n)\}$ $(k\geq 1)$, $T_eR_N^k$ 表示单位元 e 处的切空间, 则有

$$T_eR_N^k=V_N^k(\mathbb{R}^n).$$

证 因为 R^k 是 Lie 群, R_N^k 是 R^k 的闭子群, 所以由 Lie 群的闭普通子群必是 Lie 子群得, R_N^k 是 Lie 子群. 因此 R_N^k 的李代数为 R_N^k 在单位元 e 处的切空间 $T_eR_N^k$, 且可证明

$$T_eR_N^k=V_N^k(\mathbb{R}^n)=V_N(\mathbb{R}^n)/m_n^{k+1}=\{A[x]=(a_{ij}(x))_{n\times n}|a_{ij}(x)\in J^k(n,p)\},$$

其中 $A[x]$ 满足 $A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0$.

事实上, 取一可微曲线 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to R_N^k$, 满足 $\alpha(0)=I_n$, 则 $\alpha(t)=A[t,x]$, 并且 $\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\in T_eR_N^k$, 其中 $A[t,x]\in R_N^k$, 即满足

$$A[t,x]\cdot N\cdot(A[t,x])^T=N.$$

对上述等式两边关于 t 求导, 且由 $\frac{\mathrm{d}A[t,x]}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=\dot{A}[0,x]$, 得

$$\dot{A}[0,x]\cdot N+N\cdot(\dot{A}[0,x])^T=0,$$

即 $\dot{A}[0,x]\in V_N^k(\mathbb{R}^n)$. 故 $T_eR_N^k\subset V_N^k(\mathbb{R}^n)$.

另一方面, 若 $A[x]\in V_N^k(\mathbb{R}^n)$, 则 $A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0$. 对任意 $\varepsilon>0$, 我们考虑曲线 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to GL(\mathbb{R},n)$, $\alpha(t)=\exp(tA)$, 从而

$$\begin{aligned}\alpha(t)\cdot N\cdot\alpha(t)^T &= \exp(tA)\cdot N\cdot(\exp(tA))^T\\ &= \exp(tA)\cdot N\cdot(\exp(tA^T))\\ &= \exp(tA)\cdot(\exp(-tA))\cdot N\\ &= \exp((t-t)A)\cdot N\\ &= N,\end{aligned}$$

其中第三个等式是根据条件 $A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0$ 得到的. 所以 $\alpha(t)\in R_N^k$, 故 $T_eR_N^k\supset V_N^k(\mathbb{R}^n)$. 由此 $T_eR_N^k=V_N^k(\mathbb{R}^n)$.

注 2 进一步有 $T_e\mathscr{R}_N^k=\mathscr{V}_N^k(\mathbb{R}^n)$.

命题 3.1 (参见文 [11]) 设 G 是代数作用在一个光滑代数簇 M 上的代数群, 则对应的轨道是 M 中的光滑拟代数子集.

命题 3.2 设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 对任意的整数 $k\,(k\geq 1)$, 若记 $\mathscr{R}_N^k:=\{j^k\phi\mid\phi\in\mathscr{R}_N\}$, $J^k(n,p):=\{j^kf\mid f\in\varepsilon_n^p\}$, 则轨道 $\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf$ 在 j^kf 处的切空间满足

$$T_{j^kf}\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf=tf(\mathscr{V}_N(\mathbb{R}^n))/m_n^{k+1}.$$

证 因为 $\mathscr{R}_N^k$ 是 Lie 群, 所以 $\mathscr{R}_N^k$ 在 $J^k(n,p)$ 上的作用是代数作用. 当 $j^kf\in J^k(n,p)$ 时, 若 $\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf$ 表示 j^kf 在 $\mathscr{R}_N^k$ 作用下的轨道, 则由命题 3.1 知 $\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf$ 是 $J^k(n,p)$ 中的光滑子流形. 因此轨道 $\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf$ 在 j^kf 处有切空间.

已知 $\mathscr{R}_N^k$ 的李代数 $T_e\mathscr{R}_N^k=\mathscr{V}_N^k(\mathbb{R}^n)=\{A[x]\cdot x\mid A[x]\in V_N^k(\mathbb{R}^n)\}$. 现设 $\exp:T_e\mathscr{R}_N^k\to\mathscr{R}_N^k$ 表示指数映射, 则

$$T_{j^kf}\mathscr{R}_N^k\cdot j^kf=\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j^k(f(\exp(t(A[x]\cdot x))))\Big|_{t=0}\mid A[x]\in T_eR_N^k=V_N^k(\mathbb{R}^n)\},$$

其中 $A[x]\cdot x\in\mathscr{V}_N^k(\mathbb{R}^n)$, 由注 2 及指数映射的性质, 有 $\exp(t(A[x]\cdot x))=g_t\in\mathscr{R}_N^k$, 从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j^k(f(\exp(t(A[x]\cdot x))))\Big|_{t=0} &= j^k(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ g_t)(x)\Big|_{t=0})\\ &= j^k(\mathrm{D}f(x)(A[x]\cdot x))\in tf(\mathscr{V}_N(\mathbb{R}^n))/m_n^{k+1}.\end{aligned}$$

定义 3.1 设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 轨道 $\mathscr{R}_N\cdot f$ 在 f 处的切空间 $T\mathscr{R}_Nf$ 定义如下:

$$T\mathscr{R}_Nf=tf(\mathscr{V}_N(\mathbb{R}^n)).$$

由命题 3.2 知, 这个定义是合理的.

4 光滑映射芽的无限 $\mathscr{R}_N$ - 决定

此部分研究光滑映射芽关于群 $\mathscr{R}_N$ 的无限决定性, 将给出光滑映射芽的 $\mathscr{R}_N$ - 无限决定的充要条件.

定义 4.1 设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, f 是无限 $\mathscr{R}_N$ - 决定的, 意指对任意的芽 $g\in m_n\varepsilon_n^p$ 满足 $j^\infty f(0)=j^\infty g(0)$, 都有 f 与 g 是 $\mathscr{R}_N$ - 等价的.

定理 4.1 设 $f\in m_n\varepsilon_n^p$, 则 f 是无限 $\mathscr{R}_N$ - 决定的当且仅当

$$m_n^\infty\varepsilon_n^p\subset T\mathscr{R}_Nf. \tag{$*$}$$

证 假设 f 是无限 $\mathscr{R}_N$ - 决定的. 任取 $u\in m_n^\infty\varepsilon_n^p$. 定义

$$F(t,x)=f(x)+tu(x),\qquad t\in\mathbb{R}$$

且 $F_t(x):=F(t,x)$. 由假设条件, $F_t(x)\in\mathscr{R}_N\cdot f$. 又 $F_0(x)=f(x)$, 因此 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=u(x)\in T\mathscr{R}_Nf$. 所以

$$m_n^\infty\varepsilon_n^p\subset T\mathscr{R}_Nf.$$

反之, 对任意给定 $t_0\in[0,1]$, 设 $g\in m_n\varepsilon_n^p$ 满足 $j^\infty f(0)=j^\infty g(0)$, 定义

$$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,t_0\times 0)\to\mathbb{R}^p$$

为 $F(t,x)=f(x)+t(g(x)-f(x))$, $F_t(x):=F(t,x)$.

欲证 g 是 $\mathscr{R}_N$ - 等价于 f 的. 只需证明对于充分接近 t_0 的 t, $F_t(x)$ 是 $\mathscr{R}_N$ - 等价于 $F_{t_0}(x)$ 的.

因为 $F_{t_0}(x)-f(x)=t_0(g(x)-f(x))$ 且 $g-f\in m_n^\infty\varepsilon_{n+1}^p$, 得

$$T\mathscr{R}_NF_{t_0}\subset T\mathscr{R}_Nf,$$

再利用 $(*)$, 得

$$T\mathscr{R}_Nf\subset T\mathscr{R}_NF_{t_0}+m_n(T\mathscr{R}_Nf),$$

根据 Nakayama 引理, 对于任意的 t_0, 都有

$$T\mathscr{R}_NF_{t_0}=T\mathscr{R}_Nf.$$

又 $\frac{\partial F_t}{\partial t}=g(x)-f(x)\in m_n^\infty\varepsilon_n^p\subset T\mathscr{R}_Nf=T\mathscr{R}_NF_t=tF_t(\mathscr{V}_N(\mathbb{R}^n))$, 由此可知, 存在 $\xi\in\mathscr{V}_N(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_t}{\partial t}=tF_t(\xi),\\ \Rightarrow\ &\frac{\partial F_t(x)}{\partial t}-\mathrm{D}F_t(x)(\xi(x))=0,\end{aligned}\tag{$*\ *$}$$

其中 $\xi=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)=A[x]\cdot x, A[x]\in\varepsilon_n^{n\times n}, A[x]\cdot N+N\cdot(A[x])^T=0, x\in(\mathbb{R}^n,0)$, 并且 $(*\ *)$ 对应于微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=1,\\ \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\xi_i.\end{cases}$$

记 $\widetilde{A}$ 是 $-\xi$ 的具有初始条件 $\widetilde{A}_{t_0}(x)=x$ 的积分, 那么 $\frac{\partial\widetilde{A}_t}{\partial t}\circ\widetilde{A}_t^{-1}(x)=A[x]\cdot x$. 从而有 $\frac{\partial\widetilde{A}_t(x)}{\partial t}=A[\widetilde{A}_t(x)]\cdot\widetilde{A}_t(x)$.

由于 $A[x]\in\varepsilon_n^{n\times n}$, 所以该微分方程存在唯一解 $h_t(x)$. 因此 $\frac{\partial\widetilde{A}_t(x)}{\partial t}=A[h_t(x)]\cdot\widetilde{A}_t(x)$. 利用乘积积分的知识 (参见文 [1]), 得到

$$\widetilde{A}_t(x)=\prod_{t_0}^{t}e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}\cdot\widetilde{A}_{t_0}(x)=\prod_{t_0}^{t}e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}\cdot x=\lim_{\mu\to 0}\prod_{k=1}^{n}e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k}\cdot x,$$

这里 μ 是区间 $[t_0,t]$ 划分 $t_0\le t_1\le\cdots\le t_n$ 中子区间长度的最大值, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. 因此 $\widetilde{A}_t$ 可以用矩阵形式表示为 $\widetilde{A}_t(x)=\widetilde{A}_t[x]\cdot x,\widetilde{A}_t[x]=\prod\limits_{t_0}^{t}e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}$. 由于

$$A[h_t(x)]\cdot N+N\cdot(A[h_t(x)])^T=0,$$

且 $e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}((A[h_{t_k}(x)])\cdot\Delta t_k)^n$, 则有

$$e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k}\cdot N=N\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}((-A[h_{t_k}(x)])^T\cdot\Delta t_k)^n=N\cdot e^{-(A[h_{t_k}(x)])^T\Delta t_k},$$

因此

$$\prod_{t_0}^{t}e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}\cdot N=N\cdot\prod_{t_0}^{t}e^{-(A[h_s(x)])^T\mathrm{d}s}.$$

另一方面, 由 $\widetilde{A}_t[x]=\prod\limits_{t_0}^{t}e^{A[h_s(x)]\mathrm{d}s}$, 今有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{A}_t[x]}{\partial t}&=A[h_t(x)]\cdot\widetilde{A}_t[x]\quad\text{(参见文[1])}\\&\Rightarrow\frac{\partial\widetilde{A}_t[x]}{\partial t}\cdot\widetilde{A}_t^{-1}[x]=A[h_t(x)]\Rightarrow\widetilde{A}_t[x]\cdot\frac{\partial\widetilde{A}_t^{-1}[x]}{\partial t}=-A[h_t(x)]\\&\Rightarrow\frac{\partial(\widetilde{A}_t^{-1}[x])^T}{\partial t}\cdot(\widetilde{A}_t[x])^T=-(A[h_t(x)])^T.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}_t^{-1}[x])^T&=\prod_{t_0}^{t}e^{-(A[h_s(x)])^T\mathrm{d}s}\cdot(\widetilde{A}_{t_0}^{-1}[x])^T=\prod_{t_0}^{t}e^{-(A[h_s(x)])^T\mathrm{d}s}\\&\Rightarrow\widetilde{A}_t[x]\cdot N=N\cdot(\widetilde{A}_t^{-1}[x])^T.\end{aligned}$$

即 $\widetilde{A}_t[x]\cdot N\cdot(\widetilde{A}_t[x])^T=N$. 所以 $\widetilde{A}_t[x]\in\mathscr{R}_N$. 又

$$\frac{\partial F_t\circ\widetilde{A}_t}{\partial t}=\frac{\partial F_t}{\partial t}\circ\widetilde{A}_t+tF_t\circ\frac{\partial\widetilde{A}_t}{\partial t}=(\frac{\partial F_t}{\partial t}+tF_t\circ\frac{\partial\widetilde{A}_t}{\partial t}\circ\widetilde{A}_t^{-1})\circ\widetilde{A}_t=(\frac{\partial F_t}{\partial t}-tF_t(\xi))\circ\widetilde{A}_t=0,$$

则这蕴含 $\frac{\mathrm{d}(F_t\circ\widetilde{A}_t)}{\partial t}=0$. 从而当 t 充分接近 t_0 时, 有 $F_t\circ\widetilde{A}_t=F_{t_0}$.

又因为 $[0,1]$ 是紧集, 所以 $[0,1]$ 的任意开覆盖必有有限子覆盖. 而对于有限子覆盖的每一个开集来说, 均有 $F_t\circ\widetilde{A}_t=F_{t_0}$. 因此该等式可由充分小的 t_0 邻域延拓到 $[0,1]$ 区间, 从而有 $F_1\circ\widetilde{A}_1=F_0$, 即 $g\circ\widetilde{A}_1=f$, 这就证明了 g 是 $\mathscr{R}_N$ - 等价于 f 的.

参 考 文 献

[1] John D D, Charles N F. Product integration with application to differential equation[M]. Boston: Addison Wesley Publ. Comp., 1979.

[2] Wilson L C. Infinitely determined map-germs[J]. Can. J. Math., 1981, 33(3): 671–684.

[3] Wilson L C. Map-germs infinitely determined with respect to right-left equivalence[J]. Pacific J. Math., 1982, 102(1): 235–245.

[4] Broderesen H. A note of infinite determinacy of smooth map-germs[J]. Bull. London Math. Soc., 1981, 13: 397–402.

[5] Wall C T C. Finite determinacy of smooth map-germs[J]. Bull. London Math. Soc., 1981, 13: 481–539.

[6] Mather J N. Stability of C^∞ mappings iii: Finitely determined map-germ[J]. Pulb. Math. IHES., 1969, 35: 127–156.

[7] 熊剑飞. 关于映射芽在 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{K}$ 的一些子群下的有限决定性 [J]. 数学研究与评论, 1999, 19(2): 437–444.

[8] Liu Hengxing. Finite indeterminacy of homogeneous polynomial germs under some subgroups $\mathscr{R}_{I_r}$ of $\mathscr{R}$[J]. Wuhan Univ. J. Nat. Sci., 2005, 10(5): 803–807.

[9] Sun B H, Wilson L C. Determinacy of smooth germs with real isolated line singularities[J]. Proceed. Amer. Math. Soc., 2001, 129(9): 2789–2797.

[10] 李养成. 光滑映射的奇点理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[11] Dimca A. Topics on real and complex singularities[M]. Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg Sohn, Adv. Lect. Math. Vieweg, 1987.

[12] Zhang Guobin, Liu Hengxing. The infinite determinacy of function germs with parameters[J]. J. Math., 2005(3): 275–277.

THE INFINITE DETERMINACY AND TANGENT SPACE TO THE ORBIT OF SMOOTH MAP-GERMS UNDER THE ACTION OF $\mathscr{R}_N$

SU Dan[1], LIU Heng-xing[2]

(*1.School of Statistics, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China*)

(*2.School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, the tangent space to the orbit of smooth map-germs under the action of $\mathscr{R}_N$ is investigated. By produce integral theory, the infinite determinacy of smooth map-germs relative to a subgroup $\mathscr{R}_N$ of right equivalent group is obtained, and the necessary and sufficient conditions for a smooth map-germ to be finitely $\mathscr{R}_N$-determined are extended.

Keywords: map-germs; infinite determinacy; $\mathscr{R}_N$ subgroup; tangent space

2010 MR Subject Classification: 58K40