

## 遗传 - 人工蜂群融合算法及其 Markov 收敛性分析

高雷阜, 佟盼

(辽宁工程技术大学理学院, 辽宁 阜新 123000)

**摘要:** 本文研究了遗传算法易发生“早熟”以及人工蜂群算法在搜索初期寻优速度慢的问题. 基于将遗传算法与人工蜂群算法融合以实现二者互补的思想, 提出遗传 - 人工蜂群融合算法 (G-ABCA), 利用马尔可夫理论对其收敛性进行了理论分析, 证明其适应度函数值序列 (即优化解满意值序列) 是单调且收敛的, 并利用四个经典的多峰测试函数对遗传 - 人工蜂群融合算法、改进的遗传算法以及人工蜂群算法进行了对比实验分析, 结果表明: 遗传 - 人工蜂群融合算法不仅收敛, 而且其寻优性能显著优于其它两种算法.

**关键词:** 遗传算法; 人工蜂群算法; 融合; 马尔可夫过程; 收敛性

MR(2010) 主题分类号: 49M30 中图分类号: O224

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2017)01-0215-08

### 1 引言

遗传算法 (Genetic Algorithm, GA) 是一种随机搜索算法, 具有全局搜索能力和较强的鲁棒性, 但是, 系统中的反馈信息得不到充分利用, 容易陷入“早熟”<sup>[1-2]</sup>, 而且算法中的遗传操作比较耗时.

人工蜂群算法 (Artificial Bee Colony Algorithm, ABCA) 是 Karaboga<sup>[3]</sup> 在 2005 年提出的一种基于蜜蜂采蜜的群体智能优化算法, 在搜索过程中仅以适应度函数作为进化依据<sup>[4]</sup>, 反馈信息得到充分利用, 在每次的迭代过程中都进行全局和局部搜索, 极大地提高了找到最优解的概率, 但是, 算法在初期寻优速度较慢.

遗传 - 人工蜂群融合算法 (Genetic-Artificial Bee Colony Algorithm, G-ABCA) 正是基于遗传算法与人工蜂群算法的优缺点, 在初期采用改进的遗传算法得到“蜜源”分布, 在后期采用人工蜂群算法寻找最优解, 实现二者的互补, 以提升算法的有效性.

### 2 遗传 - 人工蜂群融合算法

#### 2.1 遗传 - 人工蜂群融合算法的原理

遗传 - 人工蜂群融合算法的基本原理是: 与袁艳花<sup>[5]</sup> 提出的融合思想不同, 不是将遗传算法的交叉和变异算子融合到人工蜂群算法的搜索过程中, 而是首先采用改进的遗传算法过程得到“蜜源”分布, 然后根据得到的“蜜源”分布, 采用人工蜂群算法进行最优解搜索. 通过这种融合, 避免遗传算法发生“早熟”, 并加速人工蜂群算法的寻优速度.

\*收稿日期: 2014-09-19 接收日期: 2014-12-16

基金项目: 高校博士学科点专项科研联合资助基金资助 (20132121110009).

作者简介: 高雷阜 (1963-), 男, 辽宁阜新, 教授, 主要研究方向: 最优化理论与应用.

## 2.2 遗传 - 人工蜂群融合算法的过程

### 2.2.1 G-ABCA 中遗传算法的设置

G-ABCA 中的遗传算法采用表达精确的实数编码, 以克服二进制编码的换算占用计算时间的问题 [6]; 计算编码后的染色体适应度值, 通过适应度比例法 [7]、自适应的交叉和变异概率公式 [8] 进行遗传操作; 同时采用最优保存策略, 以防止优良的个体在遗传操作中过早的丢失 [9]. 记遗传算法过程的最大迭代次数为  $\maxgen$ , 初始的交叉概率和变异概率为  $pc$  和  $pm$ , 则其自适应的交叉和变异概率公式为

$$pcross = Pcross - \frac{pc - 0.6}{\maxgen}, \quad (2.1)$$

$$pmutation = Pmutation + \frac{0.1 - pm}{\maxgen}, \quad (2.2)$$

其中  $pcross$  和  $pmutation$  表示新一代的交叉和变异概率,  $Pcross$  和  $Pmutation$  表示当代的交叉和变异概率. 显然,  $pc$ 、 $pm$  和  $\maxgen$  是固定的常数, 由交叉和变异概率公式可知, 新的个体是否进行交叉或变异只与当前的交叉或变异概率有关, 而与之前的交叉或变异概率以及时刻 (即迭代次数) 无关, 因此具有 Markov 性.

### 2.2.2 G-ABCA 中人工蜂群算法的设置

G-ABCA 中的人工蜂群算法采用标准模型 [10], 分别记  $N_s$ 、 $N_e$  为蜜蜂总数、采蜜蜂种群规模, 令跟随蜂种群规模与采蜜蜂相同, 记  $D$  为个体向量维数,  $S$  为个体搜索空间,  $X(m)$  为第  $m$  代采蜜蜂种群, 初始采蜜蜂种群  $X(0)$  为改进的遗传算法得到的结果. 首先, 由采蜜蜂寻找新蜜源, 搜索公式为

$$V_i^j = X_i^j + \varphi_i^j (X_i^j - X_k^j), \quad (2.3)$$

其中,  $j \in \{1, 2, \dots, D\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_e\}$  且  $k \neq j$ ,  $\varphi_i^j$  为区间  $[-1, 1]$  上的随机数,  $V \in S$ . 显然, 该搜索只与当前的蜜源位置有关, 而与之前的蜜源及时刻  $m$  无关.

然后, 采用贪婪选择算子在新蜜源和原蜜源之间选出适应度更优的 (这里以适应度越小越优为例) 并保留, 记作  $T_{gs}: S^2 \rightarrow S$ , 其概率分布与时刻无关, 为

$$P\{T_{gs}(X_i, V_i) = V_i\} = \begin{cases} 1, & f(V_i) \leq f(X_i); \\ 0, & f(V_i) > f(X_i). \end{cases} \quad (2.4)$$

跟随蜂依照采蜜蜂种群的适应度值选择一个采蜜蜂, 并在其邻域内按式 (2.3) 进行新蜜源搜索并执行贪婪选择算子. 当某只采蜜蜂在蜜源周围搜索的次数达到一定阈值仍未找到最优位置时, 重新随机初始化该采蜜蜂的位置, 初始化公式为

$$X_i(m+1) = X_{\min} + \text{rand}(0, 1)(X_{\max} - X_{\min}). \quad (2.5)$$

该步骤通过增加种群的多样性, 防止了算法陷入局部最优, 同时保证了搜索始终在邻域内进行.

### 3 融合算法的 Markov 收敛性分析

设  $S^N = \{X = (X_1, X_2, \dots, X_N), X_i \in S(i \leq N)\}$  为种群空间,  $S^2 = \{(X_1, X_2), X_i \in S(i = 1, 2)\}$  为母体空间,  $S$  为个体空间, 个体  $X_i$  的长度  $l$  称为链长,  $N$  为种群规模. 记  $n$  为遗传算法过程的迭代次数,  $m$  为人工蜂群算法的迭代次数,  $P$  为  $S^N$  上的概率分布. 融合算法可以看作是改进遗传算法的扩展, 其中共包括四个过程: 选择算子  $T_s$ 、交叉算子  $T_c$ 、变异算子  $T_m$ 、蜜源算子  $T_b$ , 其基本定义如下:

**定义 3.1** <sup>[11]</sup> 适应度函数为  $f: S \rightarrow R$ , 即为个体空间到实数空间的映射; 全局最优解为  $G = \{X, \forall Y \in S, f(X) \leq f(Y)\}$ ; 满意解  $B = \{X \in B, \forall Y \notin B, f(X) \leq f(Y)\}$ .

**定义 3.2** <sup>[11]</sup> 选择算子  $T_s: S^N \rightarrow S$ , 即在种群中随机选择一个个体的映射, 母体选择算子的概率为

$$P\{T_s(X) = (X_i, X_j)\} = \frac{f(X_i)}{\sum_{k=1}^N f(X_k)} \cdot \frac{f(X_j)}{\sum_{m=1}^N f(X_m)}. \quad (3.1)$$

**定义 3.3** <sup>[11]</sup> 交叉算子  $T_c: S^2 \rightarrow S$ , 即母体空间到个体空间的映射, 记  $k$  为可生成  $Y$  的基因位置的个数, 单点交叉算子的概率为

$$P\{T_c(X_1, X_2) = Y\} = \begin{cases} \frac{k}{l} p_{cross}, & Y \neq X_1; \\ (1 - p_{cross}) + \frac{k}{l} p_{cross}, & Y = X_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

**定义 3.4** <sup>[11]</sup> 变异算子  $T_m: S \rightarrow S$ , 即个体空间到个体空间的随机映射, 变异算子的概率为

$$P\{T_m(X) = Y\} = p_{mutation}^{d(X,Y)}(1 - p_{mutation})^{1-d(X,Y)}, \quad (3.3)$$

其中,  $d(X, Y)$  为  $X$  与  $Y$  的 Hamming 距离.

**定义 3.5** 蜜源算子  $T_b: S^N \rightarrow S$ , 即在蜜源位置序列中选择最优个体的映射, 蜜源算子的概率为

$$P\{T_b(X) = X_i\} = \frac{f(X_i)}{\sum_{j=1}^N f(X_j)}. \quad (3.4)$$

**引理 3.1** 改进的遗传算法种群序列  $\{X(n); n \geq 0\}$  是有限齐次 Markov 链, 且以概率 1 收敛到满意种群集  $G^*$  的子集  $G_0^* = \{Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N); Y_N \in G\}$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X(n) \in G_0^* / X(0) = X_0\} = 1. \quad (3.5)$$

**证** 因为采用最优保存策略的遗传算法的种群序列是有限齐次 Markov 链, 并且以概率 1 收敛到满意种群集的子集 <sup>[12-14]</sup>, 改进的遗传算法采用了最优保存策略, 并且其改进的交叉和变异概率公式对算法的收敛性没有影响, 能保持 Markov 性, 因此, 改进的遗传算法种群序列仍是有限齐次 Markov 链, 且以概率 1 收敛到满意种群集  $G^*$  的子集.

**引理 3.2** 引入适应度函数的人工蜂群系统序列  $\{X(m), f^*(m); m = 1, 2, \dots\}$  是有限齐次 Markov 链.

**证** 因为人工蜂群算法序列  $\{X(m); m = 1, 2, \dots\}$  是有限齐次 Markov 链且以概率 1 收敛<sup>[15]</sup>, 适应度函数序列具有 Markov 性, 因此, 类比引入适应度函数的蚂蚁系统序列<sup>[16]</sup> 仍是有限齐次 Markov 链可知, 引入适应度函数的人工蜂群系统序列是有限齐次 Markov 链.

**定理 3.1** G-ABCA 算法的种群序列  $\{X(n); n \geq 0\}$  是有限齐次 Markov 链.

**证** 由引理 3.1 知, 改进的遗传算法  $X(n+1)$  只与  $X(n)$  有关, 与迭代次数  $n$  无关. 由引理 3.2 知, 人工蜂群系统  $\{X(m+1), f^*(m+1)\}$  只与  $\{X(m), f^*(m)\}$  有关, 而与迭代次数  $m$  无关. 同时, 由人工蜂群算法的设置可知, 算法每一次只更新最优蜜源位置, 具有改进的遗传算法的所有特征. 因此取

$$T = T_b \circ T_m \circ T_c \circ T_s, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} X(n+1) &= (X_i(n+1) = T_b^i \circ T_m^i \circ T_c^i \circ T_s^i(X(n)); i \leq N-1; \\ X_N(n+1) &= X_{i_0}(n), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中,  $i_0 = \arg \min_j \{f(X_j(n))\}$  表示使  $f(X_j(n))$  取最小值的个体为  $X_j(n)$ , 种群转移概率矩阵:

$$\begin{aligned} P\{X, Y\} &= P\{X(n+1) = Y | X(n) = X\} \\ &= \begin{cases} \prod_{k=1}^N P\{T(X(n+1)_k) = Y_k\}, & \exists i_0 \in \{i | f(X_i) = \min f(X_j)\} \text{使 } Y_N = X_{i_0}; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

上述表明  $X(n+1)$  只与  $X(n)$  有关, 而与迭代次数  $n$  无关. 因此, G-ABCA 算法的种群序列  $\{X(n); n \geq 0\}$  是有限齐次 Markov 链.

**定理 3.2** G-ABCA 算法 Markov 链的适应度函数值序列是单调不增的, 即  $\forall n \geq 0, f(X(n+1)) \leq f(X(n))$ .

**证** 由于 G-ABCA 中采用的是改进的遗传算法,  $i_0 = \arg \min_j \{f(X_j(n))\}$ , 所以

$$\begin{aligned} X_N(n+1) &= X_{i_0}(n), \\ f(X(n+1)) &\leq f(X_N(n+1)) \leq f(X(n)). \end{aligned}$$

同理, 由于 G-ABCA 采用了人工蜂群算法,  $i_0 = \arg \min_j \{f(X_j(m))\}$ , 故有

$$\begin{aligned} X_N(m+1) &= X_{i_0}(m), \\ f(X(m+1)) &\leq f(X_N(m+1)) \leq f(X(m)). \end{aligned}$$

又由于人工蜂群算法以改进的遗传算法结果为初始蜜源分布, 具有优值继承性, 因此  $\forall n \geq 0, f(X(n+1)) \leq f(X(n))$ , 即 G-ABCA 算法 Markov 链的适应度函数值序列是单调不增的.

**定理 3.3** G-ABCA 算法的 Markov 序列以概率 1 收敛到满意解集  $B$  的子集  $B_0^* = \{Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N); Y_N \in B\}$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X(n) \in B_0^* / X(0) = X_0\} = 1. \quad (3.9)$$

证 设  $X'$  是  $f(X)$  的唯一最小值解, 由引理 3.1、定理 3.1 以及人工蜂群算法也以概率 1 收敛可知  $P\{X, Y\}$  具有如下性质:

- (1) 当  $X, Y \in B_0^*$  时,  $P\{X, Y\} > 0, P\{Y, X\} > 0$ , 即  $X \leftrightarrow Y$ ;
- (2) 当  $X \in B_0^*, Y \notin B_0^*$  时,  $P\{X, Y\} = 0$ , 即  $X \rightarrow Y$ .

因此  $B_0^*$  为正常返、非周期的不可约闭集,  $S^N \setminus B_0^*$  为非常返的状态集, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X(n) = Y / X(0) = X_0\} = \begin{cases} \pi(Y), & Y \in B_0^*; \\ 0, & Y \notin B_0^*. \end{cases} \quad (3.10)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X(n) \in B_0^* / X(0) = X_0\} = 1.$$

**推论 3.1** G-ABCA 算法的种群序列  $\{X(n); n \geq 0\}$  如果对于任意满意解集收敛, 则必收敛到全局最优解集.

证 因为对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有满意解集

$$B(\varepsilon) = \{Y; f(Y) \leq f(X^*) + \varepsilon\},$$

其中  $X^*$  表示最优解, 即  $X^* \in M$ , 也即全局最优解集  $M$  是所有满意解集的交集,  $M$  为最小满意解集. 所以, 若  $\{X(n); n \geq 0\}$  对于任意满意解集收敛, 则必收敛到全局最优解集.

#### 4 数值实验分析

因为多峰数值函数求极值问题是常见的优化问题, 更是测试连续优化算法的试金石, 所以这里借助 Matlab 编程, 利用四个经典的多峰测试函数<sup>[17]</sup>: Sphere 函数、Griewank 函数、Rosenbrock 函数、Rastrigin 函数来测试 G-ABCA 算法的寻优性能, 并与改进的 GA 和 ABCA 进行寻优性能对比. 这四个经典的测试函数的全局极小值均为 0, 其搜索空间均为  $(-100, 100)^d$ , 并将维数设置为  $d = 50$ . G-ABCA 算法中遗传算法的最大迭代次数设为 100, 编码精度设为  $10^{-5}$ , 初始的交叉、变异概率分别设为 0.9 和 0.005, G-ABCA 算法中人工蜂群算法的蜜蜂总数设为 20, 采蜜蜂数设为 10, 最大搜索次数设为 100, 最大迭代次数设为 800; 改进的 GA 和 ABCA 最大迭代次数均为 800, 其余参数设置与 G-ABCA 算法一致. 实验结果见表 1 至表 4、图 1 至图 4.

表 1: Sphere 测试函数的实验结果

算法	最优解	收敛到最优解的进化代数	计算时间 (秒)
G-ABCA	0.0	335	0.667612
改进的 GA	$1.2 \times 10^5$	5	0.393152
ABCA	0.0	380	0.685536

表 2: Griewank 测试函数的实验结果

算法	最优解	收敛到最优解的进化代数	计算时间 (秒)
G-ABCA	0.0	680	0.909315
改进的 GA	25.2	20	0.465856
ABCA	0.0	680	0.944131

表 3: Rosenbrock 测试函数的实验结果

算法	最优解	收敛到最优解的进化代数	计算时间 (秒)
G-ABCA	0.0	220	0.832529
改进的 GA	$3.8 \times 10^{10}$	10	0.422421
ABCA	0.0	245	0.767868

表 4: Rastrigin 测试函数的实验结果

算法	最优解	收敛到最优解的进化代数	计算时间 (秒)
G-ABCA	0.0	400	0.929299
改进的 GA	$9.6 \times 10^4$	15	0.416955
ABCA	0.0	470	0.786789

表 1 至表 4 反映三种算法对于各测试函数极小值解的一次寻优结果. 可以看出, 对于四个测试函数, 改进的 GA 收敛到最优解的进化代数都非常小, 得到的最优解与测试函数的全局极小值都相差很大, 说明均出现“早熟”; ABCA 虽然仅在 Griewank 函数测试中得到的最优解与其全局极小值有较小的偏差, 但是其收敛到最优解的进化代数显著高于 G-ABCA 算法. 由此可见, G-ABCA 算法确实有效避免了遗传算法的“早熟”, 并且通过加快 ABCA 的初始搜索速度, 提高了算法的整体收敛速度. 另外, 从计算时间上可以看出, 虽然 G-ABCA 算法是改进的 GA 与 ABCA 的融合, 但是其并没有比 ABCA 算法多费时很多, 甚至在 Sphere 函数测试中的计算时间略低于 ABCA 算法; 而改进的 GA 由于“早熟”导致其计算时间很短, 因此不具有可比性.

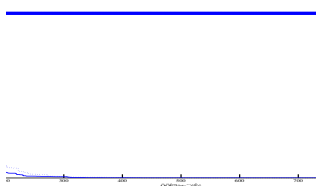


图 1: Sphere 测试函数的对比结果

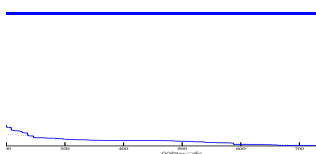


图 2: Griewank 测试函数的对比结果

图 1 至图 4 反映三种算法对于各测试函数极小值解的一次寻优过程对比结果. 可以直观地看出, G-ABCA 算法是逐步收敛的, 其收敛性能显著优于 GA(即改进的 GA) 算法和 ABCA 算法, 而且 GA 算法明显过早收敛, 发生“早熟”.

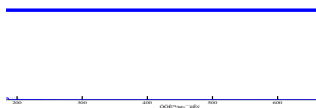


图 3: Rosenbrock 测试函数的对比结果

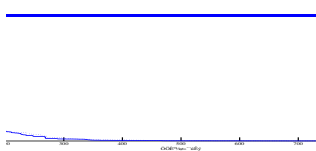


图 4: Rastrigin 测试函数的对比结果

结论: 改进的遗传算法与人工蜂群算法的融合, 实现了两种算法的互补, 不仅避免了遗传算法发生“早熟”, 而且解决了人工蜂群算法初始搜索速度慢的问题. 数值实验结果表明, G-ABCA 算法在经过改进的遗传算法得到“蜜源”分布之后, ABCA 算法以极快的速度逼近全局最优解, 验证了 G-ABCA 算法具有收敛性以及良好的寻优性能.

### 参 考 文 献

- [1] 张爱华, 曹晓刚, 钟守楠. 求多峰函数全部全局最优解的改进遗传算法 [J]. 数学杂志, 2009, 29(1): 56-60.
- [2] 马永杰, 云文霞. 遗传算法研究进展 [J]. 计算机应用研究, 2012, 29(4): 1201-1210.
- [3] Karaboga D. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization[R]. Kayseri: Erciyes Univ., 2005.
- [4] 秦全德, 程适, 李丽等. 人工蜂群算法研究综述 [J]. 智能系统学报, 2014, 9(2): 127-135.
- [5] 袁艳花. 遗传蜂群算法及其应用 [D]. 南京: 南京理工大学硕士学位论文, 2012.
- [6] 王芳, 杨虎山. 实数编码混合遗传算法在参数估计中的应用 [J]. 高等学校计算数学学报, 2013, 35(4): 375-384.
- [7] Wu Q H, Zhang J H, Xu X H. An ant colony algorithm with mutation features[J]. J. Comp. Res. Evel., 1999, 36(10): 1240-1245.
- [8] 刘东平, 单甘霖. 基于改进遗传算法的支持向量机参数优化 [J]. 微计算机应用, 2010, 31(5): 11-15.
- [9] 杨淑莹, 张桦. 群体智能与仿生计算 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2012.
- [10] 段海滨, 张祥银, 徐春芳. 仿生智能计算 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [11] 张文修, 梁怡. 遗传算法的数学基础 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2000.
- [12] 刘峰, 刘贵忠, 张苗生. 遗传算法的 Markov 链分析与收敛速度估计 [J]. 系统工程学报, 1998, 13(4): 81-87.
- [13] 邝溯琼. 遗传算法参数自适应控制及收敛性研究 [D]. 长沙: 中南大学, 2009.

- [14] Rudolph G. Convergence properties of canonical genetic algorithms [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1994, 5(1): 96–101.
- [15] Xu C F, Duan H B. Artificial bee colony optimized edge potential function approach to target recognition for low-altitude aircraft [J]. Patt. Recog. Lett., 2010, 31(13): 1759–1772.
- [16] Gutjahr W J. A graph-based ant system and its convergence[J]. Future Gener. Comp. Sys., 2000, 16(8): 873–888.
- [17] Duan H B, Xu C F, Zhang X Y. A hybrid artificial bee colony optimization and quantum evolutionary algorithm for continuous optimization problems[J]. Intern. J. Neural Sys., 2010, 20(1): 39–50.

## COMBINATION ALGORITHM OF GENETIC-ARTIFICIAL BEE COLONY AND ITS MARKOV CONVERGENCE ANALYSIS

GAO Lei-fu, TONG Pan

*(College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)*

**Abstract:** In this paper, we study the problems that genetic algorithm's prematurity and artificial bee colony algorithm is slow at the beginning of the search. Based on the idea that combining genetic algorithm and artificial bee colony algorithm to achieve complementary, this paper proposes Genetic-Artificial Bee Colony Algorithm (G-ABCA), and analyses the convergence of G-ABCA by Markov theory. And it proves that the sequence of fitness function, which is also called the solution sequence, is monotonous and convergent. Meanwhile, it carries out the contrasting experiment and analysis of G-ABCA, improves genetic algorithm and artificial bee colony algorithm based on four classical multi-modal test functions, the results show that not only G-ABCA is convergent, but also its optimal capability is better than other two algorithms.

**Keywords:** genetic algorithm; artificial bee colony algorithm; combination; Markov process; convergence

**2010 MR Subject Classification:** 49M30