

随机扰动下统一混沌系统的有限时间同步

王 娇, 涂俐兰, 朱泽飞

(武汉科技大学冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430065)

摘要: 本文研究了具有随机扰动的统一混沌系统的有限时间同步问题, 其中随机扰动是一维标准的维纳随机过程. 利用了有限时间随机李雅普诺夫稳定性理论、伊藤公式, 本文分三个步骤设立了三个控制器获得了驱动-响应系统在有限时间内的均方渐近同步. 最后进行的数值模拟验证了理论结果的正确性和方法的有效性.

关键词: 随机扰动; 统一混沌系统; 有限时间同步; 伊藤公式; 李雅普诺夫稳定性理论

MR(2010) 主题分类号: 93E15 中图分类号: O231.3

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2017)01-0193-08

1 引言

混沌现象是指发生在确定的非线性系统中的随机现象, 是一种非常普遍的自然现象. 例如, 在流体对流实验中观测到倍周期分叉和混沌运动, 在化学反应、非线性电路、光学双稳态、非线性声学、激光振荡等系统中能观测到混沌现象, 甚至社会、经济领域中也存在混沌现象^[1]. 1963年, Lorenz 提出了第一个混沌模型, 即 Lorenz 系统^[2], 从此开启了混沌研究的热潮. 各种混沌系统相继被人们发现, 如 Rossler 系统、Chua 电路系统、Chen 系统、Lü系统和统一混沌系统等等^[3].

混沌的同步问题是混沌研究中的一个重要方向. 自从 Pecoro 和 Carroll 于 1990 年提出了混沌的反馈控制同步之后^[4], 越来越多的科学家、学者们开始致力于这一方面的研究并提出了各种各样的混沌控制同步的方法, 如自适应同步^[5]、非线性同步^[6]、耦合同步^[7]、投影同步^[8]和 H_∞ 同步^[9] 等等.

到现在为止, 对于混沌同步, 研究的主流方向是使得系统在无限时间内达到同步^[4-10]. 但是, 在处理实际情况下的混沌系统问题时, 不仅要使得系统达到同步, 而且要在有限时间之内达到同步, 即如何在有限的时间之内使驱动-响应系统达到同步. 赵等^[11]研究了分数阶超混沌 Lorenz 系统的有限时间同步问题, Wang Liyang 等^[12]研究了不确定参数下两个不同的混沌系统的有限时间同步, Wang Hua 等^[13]研究了不确定参数下的统一混沌系统的有限时间同步. 与同步时间为无穷的情况下相比, 有限时间更加切合人们的实际应用, 这也使得有限时间同步的研究更加受到学者们的青睐.

同时, 实际生活中, 混沌系统不是孤立地存在于社会之中的, 当然也就存在扰动, 比如由于随机波动所带来的信号传输就是一个有扰动的过程. 在具体的函数形式下的随机干扰项具有丰富的内容, 随机扰动的产生会使得系统不稳定并难以控制, 减少扰动的影响才能保持系

*收稿日期: 2014-03-07 接收日期: 2014-09-11

基金项目: 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金资助 (Y201412); 湖北省自然科学基金资助 (22013CFA131).

作者简介: 王娇 (1990-), 女, 湖北松滋, 硕士, 主要研究方向: 复杂网络.

统良好的稳定性. Salarieh 等^[14]研究了带有随机扰动的两个混沌系统在不确定参数下的自适应同步, Sun Yonghui 等^[15]研究了有时滞的情况下带有随机扰动的混沌系统的指数同步.

基于以上所述, 本文将研究随机扰动下的统一混沌系统的有限时间同步问题, 其中随机扰动是一维标准的维纳随机过程. 研究这种扰动下的混沌系统更具有有一般性, 更加符合实际生活. 基于有限时间随机李雅普诺夫稳定性理论、伊藤公式, 本文将分三个步骤设立三个控制器使得驱动-响应系统在有限时间内达到均方渐近同步.

2 问题的提出和预备知识

本节首先介绍随机扰动下的统一混沌系统的驱动系统和响应系统的数学模型, 之后再阐述文章中所需要的预备知识. 考虑随机扰动下的统一混沌系统的驱动系统为

$$\begin{cases} dx_1 = [(25\alpha + 10)(x_2 - x_1)]dt + H_1(t, x_1)dw(t), \\ dx_2 = [(28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2]dt + H_2(t, x_2)dw(t), \\ dx_3 = [x_1x_2 - (8 + \alpha)x_3/3]dt + H_3(t, x_3)dw(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 x_1, x_2, x_3 是状态向量, $\alpha \in [0, 1]$ 是系统参数, $H_i(t, x_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 是非线性函数, 并满足 Lipschitz 条件, 即

$$|H_i(t, x) - H_i(t, y)| \leq L_i(x - y), \quad (2.2)$$

其中 L_i ($i = 1, 2, 3$) 是 Lipschitz 系数, $w(t)$ 是随机扰动, 是一维标准的维纳随机过程, 且满足

$$E(dw(t)) = 0, E(dw(t)^2) = dt. \quad (2.3)$$

对于系统 (2.1), 如果去掉随机项, 则该系统是一个统一混沌系统, 其中当 α 取不同数值时, 对应的混沌系统将相应发生改变, 如当 $0 \leq \alpha < 0.8$ 时, 系统 (2.1) 为一般 Lorenz 混沌系统; 当 $\alpha = 0.8$ 时, 为 Lü 系统; 当 $0.8 < \alpha \leq 1$ 时, 系统为 Chen 系统.

再设响应系统为

$$\begin{cases} dy_1 = [(25\alpha + 10)(y_2 - y_1)]dt + H_1(t, y_1)dw(t), \\ dy_2 = [(28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2]dt + H_2(t, y_2)dw(t), \\ dy_3 = [y_1y_2 - (8 + \alpha)y_3/3]dt + H_3(t, y_3)dw(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 y_1, y_2, y_3 是状态向量.

设控制器为 u_1, u_2, u_3 , 则加入控制器后的响应系统为

$$\begin{cases} dy_1 = [(25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + u_1]dt + H_1(t, y_1)dw(t), \\ dy_2 = [(28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + u_2]dt + H_2(t, y_2)dw(t), \\ dy_3 = [y_1y_2 - (8 + \alpha)y_3/3 + u_3]dt + H_3(t, y_3)dw(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

定义响应系统 (2.4) 和驱动系统 (2.1) 之间的状态误差为

$$e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

本文的目标是通过设置合适的控制器 u_1, u_2, u_3 , 使得系统 (2.1) 和 (2.4) 达到有限时间内的均方渐近同步, 即如果存在正数 $T > 0$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow T} |y_i - x_i| = \lim_{t \rightarrow T} e_i = 0, \quad (2.7)$$

且当 $t \geq T$ 时, 有 $|y_i - x_i| \equiv 0$, 则称系统 (2.1) 和 (2.4) 在 T 时刻内达到有限时间内的均方渐近同步.

为了获得系统 (2.1) 和 (2.4) 在有限时间内达到同步的条件, 需要用到以下两个引理.

引理 1 (有限时间稳定性定理^[16]) 假设存在连续的, 正定的函数 $V(t)$ 满足下面的微分不等式

$$V'(t) \leq -cV^\eta(t), \forall t \geq t_0, V(t_0) \geq 0,$$

其中 $c > 0, 0 < \eta < 1$, 那么对于任意给定的 $t_0, V(t)$ 满足下面的微分不等式

$$V^{1-\eta}(t) \leq V^{1-\eta}(t_0) - c(1-\eta)(t-t_0), t_0 \leq t \leq t_1,$$

且当 $\forall t \geq t_1, V(t) \equiv 0$,

$$t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}.$$

引理 2 (伊藤公式^[17]) 设 $f(t, x(t))$ 是关于 t 和随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 的二次微分函数, 若 $x(t)$ 的随机微分是

$$dx(t) = A(t)dt + B(t)dw(t),$$

则 $Y(t) = f(t, x(t))$, 有

$$dY(t) = [f'_t(t, x(t)) + f'_x(t, x(t))A(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, x(t))B^2(t)]dt + f'_x(t, x(t))B(t)dw(t),$$

其中

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= dw(t) \cdot dt = dt \cdot dw(t) = 0, \\ dw(t) \cdot dw(t) &= dt. \end{aligned}$$

3 主要结果

由系统 (2.1) 和系统 (2.5) 以及状态误差 (2.6), 获得系统的误差方程为

$$\begin{cases} de_1 = [(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + u_1]dt + [H_1(t, y_1) - H_1(t, x_1)]dw(t), \\ de_2 = [(28 - 35\alpha)e_1 + e_1e_3 - e_1y_3 - e_3y_1 + (29\alpha - 1)e_2 + u_2]dt \\ \quad + [H_2(t, y_2) - H_2(t, x_2)]dw(t), \\ de_3 = [-e_1e_2 + e_1y_2 + e_2y_1 - (8 + \alpha)e_3/3 + u_3]dt + [H_3(t, y_3) - H_3(t, x_3)]dw(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

为了获得误差系统在有限时间内达到稳定, 本节下面将分三步分别设置控制器 u_1, u_2, u_3 .

第 1 步 设置控制器

$$u_1 = -(25\alpha + 10)e_2 - e_1^\beta - L_1^2 e_1, \quad (3.2)$$

这里 $\beta = \frac{q}{p}$ 是一个合适的有理数, p 和 q 都是正的奇数并且有 $p > q$, 将 (3.2) 式代入 (3.1) 式有

$$de_1 = [-(25\alpha + 10)e_1 - e_1^\beta - L_1^2 e_1]dt + \tilde{H}_1(t, e_1)dw(t). \quad (3.3)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2, \quad (3.4)$$

应用引理 2 得

$$\begin{aligned} dV_1 = & [-(25\alpha + 10)e_1^2 - e_1^{1+\beta} + \tilde{H}_1(t, e_1)^2 - L_1^2 e_1^2]dt \\ & + e_1 \tilde{H}_1(t, e_1)dw(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 (2.3) 式可知 (3.5) 式的均方 (即数学期望) 只有第一部分不为零, 所以后面只需考虑第一部分, 可设

$$LV_1 = -(25\alpha + 10)e_1^2 - e_1^{1+\beta} + \tilde{H}_1(t, e_1)^2 - L_1^2 e_1^2, \quad (3.6)$$

其中 LV_1 是应用引理 2 后, 去掉公式中的随机微分项获得的. 由 (2.2) 式得

$$|\tilde{H}_i(t, e_i)|^2 \leq L_i^2 e_i^2, \quad (3.7)$$

则

$$LV_1 \leq -(25\alpha + 10)e_1^2 - e_1^{1+\beta} \leq -e_1^{1+\beta} \leq -2^{\frac{1+\beta}{2}} \left(\frac{1}{2}e_1^2\right)^{\frac{1+\beta}{2}} = 2^{\frac{1+\beta}{2}} V_1^{\frac{1+\beta}{2}},$$

所以根据引理 1, 在某个 T_1 时刻内, 误差 e_1 渐近趋于零, 且当 $t \geq T_1$ 时, e_1 恒等于零.

第 2 步 类似地, 在第一步的基础上, 设置控制器

$$u_2 = -28e_2 - e_2^\beta - L_2^2 e_2 + e_3 y_1, \quad (3.8)$$

将 (3.8) 式代入到状态误差方程 (3.1) 式中, 有

$$de_2 = [(29\alpha - 1)e_2 - 28e_2 - e_2^\beta - L_2^2 e_2]dt + \tilde{H}_2(t, e_2)dw(t). \quad (3.9)$$

同样地, 构造李雅普诺夫函数

$$V_2 = \frac{1}{2}e_2^2, \quad (3.10)$$

应用引理 2 得到

$$LV_2 = 29(\alpha - 1)e_2^2 - e_2^{1+\beta} + \tilde{H}_2(t, e_2)^2 - L_2^2 e_2^2, \quad (3.11)$$

由公式 (3.7) 得

$$LV_2 \leq -e_2^{1+\beta} \leq -2^{\frac{1+\beta}{2}} \left(\frac{1}{2}e_2^2\right)^{\frac{1+\beta}{2}} = -2^{\frac{1+\beta}{2}} V_2^{\frac{1+\beta}{2}}, \quad (3.12)$$

所以根据引理 1, 在某个 T_2 时刻内, 误差 e_2 也渐近趋于零, 且当 $t \geq T_2$ 时, e_2 恒等于零.

第 3 步 在第一步和第二步的基础上, 设置控制器

$$u_3 = L_3^2 e_3 - e_3^\beta. \quad (3.13)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V_3 = \frac{1}{2}e_3^2, \quad (3.14)$$

由引理 2 得

$$LV_3 = -(8 + \alpha)e_3^2/3 - L_3^2 e_3^2 - e_3^{1+\beta} + \tilde{H}_3(t, e_3)^2, \quad (3.15)$$

由公式 (3.7) 得

$$LV_3 \leq -e_3^{1+\beta} \leq -2^{\frac{1+\beta}{2}} \left(\frac{1}{2}e_3^2\right)^{\frac{1+\beta}{2}} = -2^{\frac{1+\beta}{2}} V_3^{\frac{1+\beta}{2}}. \quad (3.16)$$

同样地, 根据引理 1, 可知在某个 T_3 时刻内, 误差 e_3 是渐近稳定的, 且当 $t \geq T_3$ 时, e_3 恒等于 0. 由此得到状态误差方程 (3.1) 在 T_3 时刻内渐近趋于零, 即驱动系统和响应系统在 T_3 时刻内达到有限时间同步.

注 在施加控制器 u_2 的时候, e_1 已经恒为 0, 本文的证明是在过了时间 T_1 之后再添加的 u_2 , 然后过了时间 T_2 之后施加控制器 u_3 , 这样就有 $T_3 \geq T_2 \geq T_1$. 当然, 实际操作的时候, 也不一定非得这样做, 可以一次性地把这三个控制器同时加上去, 只求最后的时间 T_3 .

4 数值模拟

为了说明第 3 节中所提出的理论结果的正确性和方法的有效性, 本节将运用数值模拟来验证驱动 - 响应系统的均方渐近同步情况. 在本节中 α 分别取 0, 0.8 和 1. 为了简单起见, 设

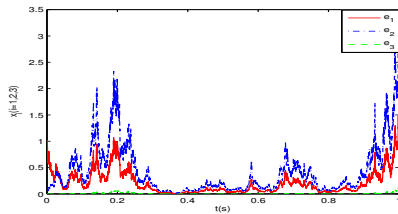
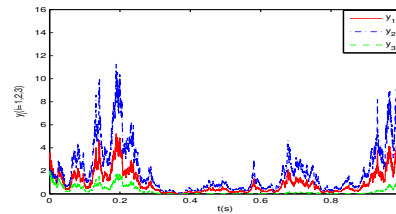
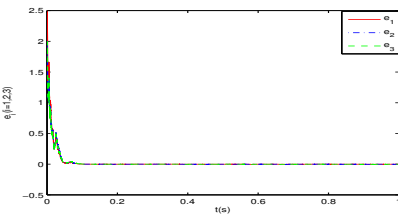
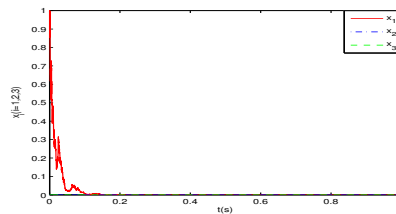
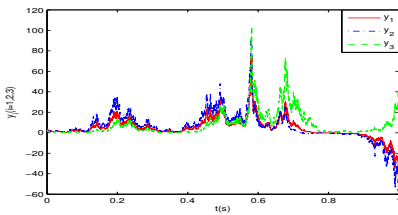
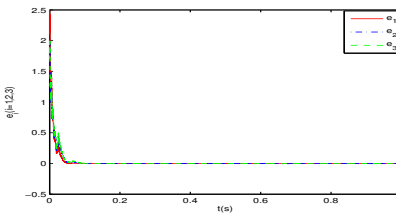
$$\begin{aligned} H_i(t, x_i) &= 5x_i, \\ H_i(t, y_i) &= 5y_i, \end{aligned}$$

则可取 Lipschitz 系数 $L_1 = L_2 = L_3 = 6$, 再设 $\beta = \frac{q}{p} = \frac{1}{3}$. 在模拟中, 我们始终设驱动系统和响应系统的初始值分别为

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (1, 0, 0), \\ (y_1, y_2, y_3) &= (3.5, 2, 2). \end{aligned}$$

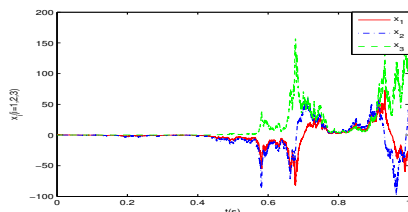
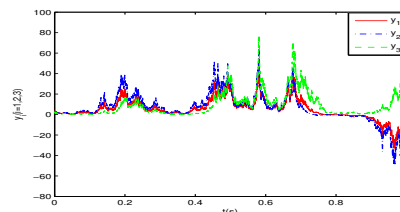
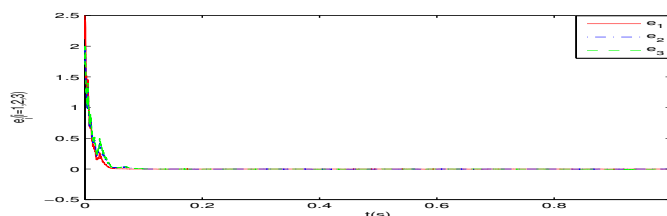
当 $t_0 = 0$ 时, $c = 2^{\frac{2}{3}}$, $\eta = \frac{2}{3}$, 由有限时间引理 1, 获得理论有限时间 $T \approx 3.64$ 秒, 要注意的是这个理论值依赖于初值的选取情况.

利用 Matlab, 下面给出驱动系统、响应系统和误差系统相对应的数值模拟图. 图 1、图 4 和图 7 是随机扰动下的统一混沌系统在参数 α 分别取 0、0.8 和 1 时驱动系统的图形, 图 2、图 5 和图 8 是对应的响应系统的图形, 这些图形说明了系统的运动轨迹是杂乱无章的, 且驱动系统和响应系统的对应轨迹不一致. 图 3、图 6 和图 9 是在控制器 u_1, u_2, u_3 下误差系统的图形, 可以看出在 0.1 秒左右的时间, 驱动-响应系统都达到了有限时间同步, 而且比理论上计算出来的有限时间更小, 体现了良好的同步性能.

图 1: 驱动系统轨迹图 ($\alpha = 0$)图 2: 响应系统轨迹图 ($\alpha = 0$)图 3: 误差系统轨迹图 ($\alpha = 0$)图 4: 驱动系统轨迹图 ($\alpha = 0.8$)图 5: 响应系统轨迹图 ($\alpha = 0.8$)图 6: 误差系统轨迹图 ($\alpha = 0.8$)

5 结论

混沌系统的有限时间同步控制是控制理论界的热门研究方向. 本文对带有随机扰动的两个统一混沌系统的有限时间均方渐近同步问题进行了研究. 与同步时间在无穷的情况下相比, 本文中有限时间同步问题的研究更加符合现实生活, 而且考虑了随机扰动的影响, 具有一定的现实意义. 文中分三个步骤分别设置了三个控制器, 相应地构造了三个李雅普诺夫函数, 其中控制器和李雅普诺夫函数的形式相对简单, 计算过程也不繁琐. 文章最后进行的 Matlab 数值模拟表明当 α 取不同的数值时, 对应的各个系统均体现出了良好的同步性能, 验证了理论结果的正确性和方法的有效性.

图 7: 驱动系统轨迹图 ($\alpha = 1$)图 8: 响应系统轨迹图 ($\alpha = 1$)图 9: 误差系统轨迹图 ($\alpha = 1$)

参 考 文 献

- [1] 陈士华, 陆君安. 混沌动力学初步 [M]. 武汉: 武汉水利电力大学出版社, 1998.
- [2] Lorenz E N. Deterministic non periodic flow[J]. J. Atmos. Sci., 1963, 20(2): 130–141.
- [3] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析, 控制与同步 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821–824.
- [5] 祝大伟, 涂俐兰. 随机扰动下 Lorenz 混沌系统的自适应同步与参数识别 [J]. 物理学报, 2013, 62(5): 98–103.
- [6] Wu Xiaoqun, Zheng Weixing, Zhou Jin. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks[J]. Chaos, 2009, 19(1): 013109.
- [7] Simonovi J. Synchronization in coupled systems with different type of coupling elements[J]. Diff. Equ. Dyn. Sys., 2013, 21(1-2): 141–148.
- [8] Ma Shaojuan, Shen Qiong, Hou Jing. Modified projective synchronization of stochastic fractional order chaotic systems with uncertain parameters[J]. Nonl. Dyn., 2013, 73(1-2): 93–100.
- [9] 涂俐兰, 柯超, 丁咏梅. 随机扰动下一般混沌系统的 H_∞ 同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(5): 584–591.
- [10] 王建根. 混沌同步研究进展综述 [J]. 计算机工程与应用, 2005, 41(22): 1–4.
- [11] 赵灵冬, 胡建兵, 包志华. 分数阶系统有限时间稳定性理论及分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(10): 100507–100507.
- [12] Wang Liyang, Xia Xiaodong, Yu Caidong, et al. Finite time synchronization between two different chaotic systems with uncertain parameters[J]. Comput. Inform. Sci., 2010, 3(3): 174–179.
- [13] Wang Hua, Han Zhengzhi, Xie Qiyue, et al. Finite-time chaos synchronization of unified chaotic system with uncertain parameters[J]. Commun. Nonli. Sci. Numer. Simul., 2009, 14(5): 2239–2247.
- [14] Salarieh H, Alasty A. Adaptive synchronization of two chaotic systems with stochastic unknown parameters[J]. Communi. Nonli. Sci. Numer. Simul., 2009, 14(2): 508–519.
- [15] Sun Yonghui, Cao Jinde, Wang Zidong. Exponential synchronization of stochastic perturbed chaotic delayed neural networks[J]. Neuro. Comp., 2007, 70(13): 2477–2485.

- [16] Chen Weisheng, Jiao Licheng. Finite-time stability theorem of stochastic nonlinear systems[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2105–2108.
- [17] 龚光鲁, 钱敏平. 应用随机过程教程及在算法和智能计算中的随机模型 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

FINITE-TIME SYNCHRONIZATION OF UNIFIED CHAOTIC SYSTEM WITH STOCHASTIC PERTURBATION

WANG Jiao, TU Li-lan, ZHU Ze-fei

(*Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process,
Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China*)

Abstract: In this paper, finite-time synchronization of the unified chaotic system with stochastic perturbation is investigated, in which the perturbation is a Wiener process of one-dimensional standards. Based on finite-time stochastic Lyapunov stability theory and Ito formula, three steps are presented to consecutively design three controllers to guarantee the finite-time mean-square asymptotical synchronization of the drive-response systems. Finally, numerical simulations are provided to illustrate the correctness and effectiveness of the theoretical results.

Keywords: stochastic perturbation; unified chaotic system; finite-time synchronization; Ito formula; Lyapunov stability theory

2010 MR Subject Classification: 93E15