Vol. 37 (2017)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 216 阶群的完全分类

陈松良
(贵州师范学院数学与计算机科学学院, 贵州 贵阳 550018)

摘 要: 设 G 为 $2^3 \cdot 3^3$ 阶 (即 216 阶) 群, 本文研究 G 的同构分类. 利用有限群的局部分析法, 证明 G 共有 177 种互不同构的类型, 并获得了 G 的全部构造.

关键词: 有限群; 同构分类; 群的构造
MR(2010) **主题分类号**: 20B05; 20D25; 20E34 **中图分类号**: O152.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)01-0185-08

1 引言

设 p 是奇素数 (其中 $p \neq 3,\ 7$), 文 [1] 研究了 2^3p^3 阶群的构造; 当 Sylow 2 - 子群可换时, 文 [2] 重新确定了 2^3p^3 阶群的构造. 文 [3] 确定了 2744(即 $2^3 \cdot 7^3$) 阶群的构造, 这是对文 [1] 与 [2] 的补充. 本文将研究 216 (即 $2^3 \cdot 3^3$) 阶群的同构分类, 并决定它们的全部构造, 从而圆满完成了 2^3p^3 阶群的分类. 我们的主要结果是

定理 1.1 设 G 为 $2^3 \cdot 3^3$ 阶 (即 216 阶) 群, 那么 G 共有 177 种互不同构的类型, 其中

1) 当 Sylow 子群都正规时, G 恰有 25 个彼此不同构的类型;

2) 当 Sylow 2 - 子群正规但 Sylow 3 - 子群不正规时, G 恰有 14 个彼此不同构的类型;

3) 当 Sylow 2 - 子群不正规但 Sylow 3 - 子群正规时, G 恰有 120 个彼此不同构的类型;

4) 当 Sylow 子群都不正规时, G 恰有 18 个彼此不同构的类型.

2 定理的证明

以下恒设 G 是 216 阶群, P 是 G 的一个 Sylow 3 - 子群, Q 是 G 的一个 Sylow 2 - 子群, 我们用 $|G|$, $|g|$ 分别表示有限群 G 及其元素 g 的阶, 用 C_n 表示 n 阶循环群, 用 E_{p^n} 表示 p^n 阶初等交换群, 用 g^x 表示 $x^{-1}gx$, 其他未说明的符号见文献 [4]. 由文 [5] 之定理 7.1.1, P 必为下列 5 种类型之一:

$P_1 = C_{27} = \langle\, a \,\big|\, |a| = 3^3 \,\rangle$;

$P_2 = C_9 \times C_3 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, 其中 $|a| = 3^2,\ |b| = 3$;

$P_3 = E_{27} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, 其中 $|a| = |b| = |c| = 3$;

$P_4 = \langle\, a,\ b \,\big|\, |a| = 3^2,\ |b| = 3,\ a^b = a^4 \,\rangle$;

$P_5 = \langle\, a,\ b,\ c \,\big|\, |a| = |b| = |c| = 3,\ c^a = c^b = c,\ [a,\ b] = c \,\rangle$.

而 Q 也只有 5 种不同构的类型:

*收稿日期: 2014-01-13 **接收日期:** 2014-09-09
基金项目: 贵州师范学院重点支持学科项目; 贵州省自然科学基金资助项目 (黔科合 J 字 [2012]2289; [2013]2234).
作者简介: 陈松良 (1964–), 男, 湖南双峰, 教授, 主要研究方向: 代数学及其应用.

$Q_1 = C_8 = \langle\, x \;\big|\; |x| = 8 \,\rangle$;

$Q_2 = C_4 \times C_2 = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$, 其中 $|x| = 4,\ |y| = 2$;

$Q_3 = E_8 = \langle x\rangle \times \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, 其中 $|x| = |y| = |z| = 2$;

$Q_4 = D_8 = \langle\, x,\ y \;\big|\; |x| = 4,\ |y| = 2,\ x^y = x^3 \,\rangle$;

$Q_5 = Q_8 = \langle\, x,\ y \;\big|\; |x| = 4,\ x^2 = y^2,\ x^y = x^3 \,\rangle$.

由于定理的证明较长, 下面我们分为几个引理来叙述.

引理 2.1 如果 216 阶群 G 的 Sylow 子群都是正规子群, 那么 G 恰有 25 个互不同构的类型, 其构造是: $G = P_i \times Q_j,\ i,\ j = 1, 2, \cdots, 5$.

引理 2.2 如果 216 阶群 G 的 Sylow 2 - 子群正规但 Sylow 3 - 子群不正规, 那么 G 恰有 14 个互不同构的类型且它们的构造分别是式 (2.1)–(2.14), 其中在式 (2.1)–(2.7) 中 $|x| = |y| = |z| = 2$, 且 $\langle x, y, z\rangle \cong E_8$; 而在式 (2.8)–(2.14) 中 $|x| = 4, x^2 = y^2, x^y = x^3$, 且 $\langle x, y\rangle \cong Q_8$.

证 这时 P 非平凡作用在 Q 上, 所以有 $C_P(Q) \neq P$, 从而 $3\big|\ |\mathrm{Aut}(Q)|$. 但 $|\mathrm{Aut}(Q_1)| = 4$, $|\mathrm{Aut}(Q_2)| = 8$, $|\mathrm{Aut}(Q_3)| = 168$, $|\mathrm{Aut}(Q_4)| = 8$, $|\mathrm{Aut}(Q_5)| = 24$, 于是必有 $Q \cong Q_3$ 或 $Q \cong Q_5$, 即 G 的 Sylow 2 - 子群是 8 阶初等交换群或 8 阶四元数群. 又 $\mathrm{Aut}(Q_3)$ 与 $\mathrm{Aut}(Q_5)$ 的 Sylow 3 - 子群都是 3 阶循环群, 所以 $C_P(Q)$ 必是 P 的一个 9 阶正规子群.

(i) 当 Q 是 8 阶初等交换群 (即 $Q \cong Q_3$) 时,

1) 若 $P \cong P_1$, 则必有 $C_P(Q) = \langle a^3\rangle$, 因此 a 作为 $GL(3, 2)$ 的一个元素, 它的特征多项式应是 2 元域 $\mathbb{F}_2$ 上多项式 $\lambda^3 - 1$, 从而 G 的构造是

$$G = \langle x\rangle \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle a\rangle), |a| = 27, y^a = z, z^a = yz. \tag{2.1}$$

2) 若 $P \cong P_2$, 则 $C_P(Q)$ 是 P 的 9 阶正规子群. 如果 $C_P(Q)$ 是循环群, 则不妨设 $C_P(Q) = \langle a\rangle$, 于是 $G = \langle a\rangle \times \langle Q, b\rangle$, 而 b 作为 $GL(3, 2)$ 的一个元素, 它的特征多项式只能是 2 元域 $\mathbb{F}_2$ 上多项式 $\lambda^3 - 1$, 从而 G 的构造是

$$G = \langle a\rangle \times \langle x\rangle \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle b\rangle), |a| = 9, |b| = 3, y^b = z, z^b = yz. \tag{2.2}$$

如果 $C_P(Q)$ 是初等交换群, 则因为 P 有唯一的 9 阶初等交换子群 $\langle a^3,\ b\rangle$, 所以必有 $C_P(Q) = \langle a^3,\ b\rangle$, 从而 a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 $G = \langle b\rangle \times \langle Q, a\rangle$, 其构造是

$$G = \langle b\rangle \times \langle x\rangle \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle a\rangle), |a| = 9, |b| = 3, y^a = z, z^a = yz. \tag{2.3}$$

3) 若 $P \cong P_3$, 则 $C_P(Q)$ 必是 P 的 9 阶初等交换子群, 不妨设 $C_P(Q) = \langle b,\ c\rangle$, 于是 $G = \langle b,\ c\rangle \times \langle Q, a\rangle$, a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 G 的构造是

$$G = \langle b\rangle \times \langle c\rangle \times \langle x\rangle \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle a\rangle), |a| = |b| = |c| = 3, y^a = z, z^a = yz. \tag{2.4}$$

4) 若 $P \cong P_4$, 则因为 $C_P(Q)$ 是 P 的 9 阶正规子群, 所以 $C_P(Q)$ 是循环群或初等交换群. 如果 $C_P(Q)$ 是循环群, 则不妨设 $C_P(Q) = \langle a\rangle$, 于是 $G = \langle a\rangle \rtimes \langle Q, b\rangle$, 而 b 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 从而 G 的构造是

$$G = \langle x\rangle \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle), |a| = 9, |b| = 3, a^b = a^4, y^b = z, z^b = yz. \tag{2.5}$$

如果 $C_P(Q)$ 是初等交换群, 则因为 P 有唯一的 9 阶初等交换子群 $\langle a^3,\ b\rangle$, 所以必有 $C_P(Q)=\langle a^3,\ b\rangle$, 从而 a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 G 的构造是

$$\begin{aligned}&G=\langle x\rangle\times((((\langle y\rangle\times\langle z\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\rtimes\langle b\rangle),|a|=9,|b|=3,\\&a^b=a^4,y^a=z,z^a=yz,b^y=b^z=b.\end{aligned}\tag{2.6}$$

5) 若 $P\cong P_5$, 则 $C_P(Q)$ 必是 P 的 9 阶初等交换子群, 不妨设 $C_P(Q)=\langle b,\ c\rangle$, 于是 a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 G 的构造是

$$\begin{aligned}&G=\langle x\rangle\times((((\langle y\rangle\times\langle z\rangle)\rtimes(\langle a\rangle\times\langle c\rangle))\rtimes\langle b\rangle),|a|=|b|=|c|=3,\\&a^b=ac,c^b=c,y^a=z,z^a=yz,y^b=y^c=y,z^b=z^c=z.\end{aligned}\tag{2.7}$$

(ii) 当 Q 是 8 阶四元数群 (即 $Q\cong Q_5$) 时,

1) 若 $P\cong P_1$, 则必有 $C_P(Q)=\langle a^3\rangle$, 易得 G 的如下构造

$$G=(\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle,|a|=27,x^a=y,y^a=xy.\tag{2.8}$$

2) 若 $P\cong P_2$, 则 $C_P(Q)$ 是 P 的 9 阶正规子群. 如果 $C_P(Q)$ 是循环群, 则 G 的构造是

$$G=\langle a\rangle\times((\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle)\rtimes\langle b\rangle),|a|=9,|b|=3,x^b=y,y^b=xy.\tag{2.9}$$

如果 $C_P(Q)$ 是初等交换群, 则因为 P 有唯一的 9 阶初等交换子群 $\langle a^3,\ b\rangle$, 所以必有 $C_P(Q)=\langle a^3,\ b\rangle$, 从而 a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 $G=\langle b\rangle\times\langle Q,a\rangle$, 其构造是

$$G=\langle b\rangle\times((\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle),|a|=9,|b|=3,x^a=y,y^a=xy.\tag{2.10}$$

3) 若 $P\cong P_3$, 则 $C_P(Q)$ 必是 P 的 9 阶初等交换子群, 不妨设 $C_P(Q)=\langle b,\ c\rangle$, 于是 $G=\langle b,\ c\rangle\times\langle Q,a\rangle$, a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 G 的构造是

$$G=\langle b\rangle\times\langle c\rangle\times((\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle),|a|=|b|=|c|=3,x^a=y,y^a=xy.\tag{2.11}$$

4) 若 $P\cong P_4$, 则因为 $C_P(Q)$ 是 P 的 9 阶正规子群, 所以 $C_P(Q)$ 是循环群或初等交换群. 如果 $C_P(Q)$ 是循环群, 则不妨设 $C_P(Q)=\langle a\rangle$, 于是 $G=\langle a\rangle\rtimes\langle Q,b\rangle$, 而 b 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 从而 G 的构造是

$$G=(\langle a\rangle\times(\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle))\rtimes\langle b\rangle,|a|=9,|b|=3,x^b=y,y^b=xy,a^b=a^4.\tag{2.12}$$

如果 $C_P(Q)$ 是初等交换群, 则因为 P 有唯一的 9 阶初等交换子群 $\langle a^3,\ b\rangle$, 所以必有 $C_P(Q)=\langle a^3,\ b\rangle$, 从而 a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 G 的构造是

$$G=((\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\rtimes\langle b\rangle,|a|=9,|b|=3,\quad x^a=y,\ y^a=xy,a^b=a^4,\ b^x=b^y=b.\tag{2.13}$$

5) 若 $P \cong P_5$, 则 $C_P(Q)$ 必是 P 的 9 阶初等交换子群, 不妨设 $C_P(Q) = \langle b,\ c\rangle$, 于是 a 作用在 Q 上是 Q 的一个 3 阶自同构, 因而 G 的构造是

$$\begin{aligned}&G = (((\langle x\rangle \rtimes \langle y\rangle) \rtimes (\langle a\rangle \times \langle c\rangle)) \rtimes \langle b\rangle, |a| = |b| = |c| = 3,\\ &x^a = y, y^a = xy, a^b = ac, b^x = b^y = b^c = b, c^x = c^y = c^a = c.\end{aligned} \tag{2.14}$$

综上所述, 可知引理 2.2 成立.

引理 2.3 如果 216 阶群 G 的 Sylow 2 - 子群 Q 不正规但 Sylow 3 - 子群 P 正规, 那么 G 恰有 120 个互不同构的类型. 其中当 Sylow 3 - 子群是循环群时, G 恰有 7 个互不同构的类型; 当 Sylow 3 - 子群是 $(3^2, 3)$ 型交换群时, G 恰有 29 个互不同构的类型; 当 Sylow 3 - 子群是 27 阶初等交换群时, G 恰有 52 个互不同构的类型; 当 Sylow 3 - 子群是 $(3^2, 3)$ 型非交换群时, G 恰有 7 个互不同构的类型; 当 Sylow 3 - 子群是指数为 3 的非交换群时, G 恰有 25 个互不同构的类型.

证 类似于文献 [3] 之引理 2.4 – 2.8 的讨论, 可得此引理.

注 2.4 1) 文献 [3] 之引理 2.6 中 (2.65) 的证明有误且漏掉了 1 种构造, 正确叙述如下: 如果 $C_Q(a), C_Q(b), C_Q(c)$ 两两不等, 但 $C_Q(a) \cap C_Q(b) = C_Q(b) \cap C_Q(c) = C_Q(c) \cap C_Q(a)$, 则不妨设 $C_Q(a) = \langle x, z\rangle$, $C_Q(b) = \langle y, z\rangle$, $C_Q(c) = \langle xy, z\rangle$, 于是 G 有构造

$$G = (((\langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \rtimes (\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle,$$

其中

$$|a| = |b| = |c| = 7, |x| = |y| = |z| = 2, a^x = a, a^y = a^{-1}, b^x = b^{-1}, b^y = b, c^x = c^y = c^{-1}.$$

如果 $C_Q(a)$, $C_Q(b)$, $C_Q(c)$ 中两两不等, 且 $C_Q(a) \cap C_Q(b) \neq C_Q(b) \cap C_Q(c)$, 则不妨设 $C_Q(a) \cap C_Q(b) = \langle y\rangle$, $C_Q(b) \cap C_Q(c) = \langle z\rangle$, 于是 $C_Q(b) = \langle y, z\rangle$. 又不妨设 $C_Q(a) = \langle x, y\rangle$, 则 $C_Q(c) \cap C_Q(a) = \langle x\rangle$ 或 $\langle xy\rangle$. 于是 $C_Q(c) = \langle x, z\rangle$ 或 $C_Q(c) = \langle xy, z\rangle$. 注意到 x 与 xy 在 $C_Q(a)$ 中的地位是相同的, 所以不妨设 $C_Q(c) = \langle x, z\rangle$, 从而得 G 的构造

$$G = (\langle a\rangle \rtimes \langle z\rangle) \times (\langle b\rangle \rtimes \langle x\rangle) \times (\langle c\rangle \rtimes \langle y\rangle).$$

其中

$$|a| = |b| = |c| = 7, |x| = |y| = |z| = 2, a^z = a^{-1},\ b^x = b^{-1},\ c^y = c^{-1}.$$

因此文 [3] 之引理 2.6 中应当共有 52 个互不同构的类型.

2) 文献 [3] 之引理 2.8 中 (2.118) 的条件有误, 应为“当 $C_Q(a)$ 与 $C_Q(b)$ 中有一个是 4 阶循环子群而另一个是 4 阶初等交换子群时”. 文 [3] 之引理 2.8 中还遗漏了 G 的一种构造, 即

$$G = (((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) \rtimes \langle b\rangle) \rtimes (\langle x\rangle \rtimes \langle y\rangle),$$

其中

$$\begin{aligned}&|a| = |b| = |c| = 7, a^b = ac, c^b = c, |x| = 4, |y| = 2, x^y = x^3,\\ &a^x = a^{-1}, a^y = y, b^x = b^y = b^{-1},\ c^x = c, c^y = c^{-1}.\end{aligned}$$

此外, 文 [3] 之引理 2.8 中 (ii) 之 (2) 部分证明有误. 构造 (2.125) 和 (2.126) 是不存在的, 因为在 (2) 的条件下, $Q/C_Q(P)$ 只能是 4 阶循环群, 因而 y 在 Q 上的作用是平凡的, 于是只能得到一种构造

$$G = (((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) \rtimes \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle) \times \langle y\rangle,$$

其中

$$|a| = |b| = |c| = 7, a^b = ac, c^b = c, |x| = 4, |y| = 2, a^x = b,\ b^x = a^{-1},\ c^x = c.$$

故文 [3] 之引理 2.8 中只有 25 个互不同构的类型.

引理 2.5 如果 216 阶群 G 的 Sylow 3 - 子群 P 与 Sylow 2 - 子群 Q 都不正规, 那么 G 恰有 18 个互不同构的类型. 它们的构造分别是式 (2.15) – (2.32), 其中在式 (2.15) – (2.20) 中有 $|x| = |y| = |z| = 2$; 在式 (2.22) – (2.32) 中有 $|x| = |y| = |z| = 2$, $x^z = x$, $y^z = xy$; 在式 (2.15), (2.16), (2.19), (2.23) – (2.26), (2.30) 中有 $|a| = 9$, $|b| = 3$; 在式 (2.17), (2.18), (2.20), (2.21), (2.27) – (2.29), (2.31), (2.32) 中有 $|a| = |b| = |c| = 3$.

证 由 Sylow 定理 [6] 可知, G 的 Sylow 3 - 子群的个数是 4, 于是 $N_G(P)$ 是 54 阶群, 从而易知 P 在 G 中的核 P_G 必是 9 阶群, 即 $O_3(G)$ 是 9 阶群. 又 G/P_G 的 Sylow 3 - 子群不正规, 所以 G/P_G 同构于一个 Sylow 3 - 子群不正规的 24 阶群. 但 Sylow 3 - 子群不正规的 24 阶群只有 3 种不同构的类型: $A_4 \times C_2, Q_8 \rtimes C_3 \cong SL(2,3), S_4$ (见文献 [5] 之定理 $10.4.2_2$ 或文献 [7] 之定理 1 后的讨论), 于是, 我们可以作下述讨论.

(i) 设 $G/P_G \cong A_4 \times C_2$. 这时, G 有一个 108 阶正规子群, 记为 H, 则 $H/P_G \cong A_4$. 易见, H 的 Sylow 3 - 子群不正规, 由文 [8] 之引理 8 可知 H 的 Sylow 2 - 子群正规, 从而得 $O_2(G)$ 是 4 阶初等交换群. 又显然 G 的 Sylow 2 - 子群是 8 阶初等交换群, 设为 $E_8 = \langle x\rangle \times \langle y\rangle \times \langle z\rangle$. 不妨设 $O_2(G) = \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, 则 $[O_2(G), P_G] = 1$, 且 $G/P_G = O_2(G)P/P_G \times \langle x\rangle P_G/P_G$. 于是 G 有一个 18 阶正规子群, 即 $\langle x\rangle \ltimes P_G$, 注意到 G 的 Sylow 2 - 子群是不正规的, 所以 $1 < [P, x] \leq P_G$.

1) 当 $P \cong P_1 = \langle a\rangle$ 时, 必有 $1 \neq [a, x] \in P_G = \langle a^3\rangle$, 但 $\mathrm{Aut}(P)$ 只有一个 2 阶自同构, 于是就有 $[a, x] = a^{-2} \notin P_G$, 故这时 G 不存在.

2) 当 $P \cong P_2$ 时, 则 P_G 既可为 9 阶循环群 $\langle a\rangle$, 也可为 9 阶初等交换群 $\langle a^3, b\rangle$, 由此得 G 的如下两种构造

$$G = (\langle a\rangle \rtimes \langle x\rangle) \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle b\rangle), a^x = a^{-1}, y^b = z, z^b = yz, \tag{2.15}$$

$$G = (\langle b\rangle \rtimes \langle x\rangle) \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle a\rangle), b^x = b^{-1}, y^a = z, z^a = yz. \tag{2.16}$$

3) 当 $P \cong P_3$ 时, 则 P_G 只能为 9 阶初等交换群. 不妨设 $P_G = \langle a, b\rangle$, 但 $C_P(x)$ 的阶可为 9 与 3 之一, 因此得 G 的如下两种构造

$$G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle x\rangle) \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle c\rangle),$$
$$a^x = a^{-1}, b^x = b^{-1}, y^c = z, z^c = yz, \tag{2.17}$$

$$G = \langle a\rangle \times (\langle b\rangle \rtimes \langle x\rangle) \times ((\langle y\rangle \times \langle z\rangle) \rtimes \langle c\rangle), b^x = b^{-1}, y^c = z, z^c = yz. \tag{2.18}$$

4) 当 $P \cong P_4$ 时, 则如果 P_G 为 9 阶循环群 $\langle a\rangle$, 那么可得 G 的如下构造:

$$\begin{aligned} &G=(((\langle a\rangle\times\langle y\rangle\times\langle z\rangle)\rtimes\langle b\rangle)\rtimes\langle x\rangle, a^x=a^{-1}, b^x=b,\\ &a^b=a^4, y^b=z, z^b=yz, y^x=y, z^x=z. \end{aligned} \tag{2.19}$$

如果 P_G 为 9 阶初等交换群 $\langle a^3, b\rangle$, 则应有 $G=(((\langle y\rangle\times\langle z\rangle)\rtimes(\langle a\rangle\rtimes\langle b\rangle))\rtimes\langle x\rangle$. 其中 $|a|=9$, $|b|=3$, $|x|=|y|=|z|=2$, $a^b=a^4$, $y^a=z$, $z^a=yz$, $y^b=y^x=y$, $z^b=z^x=z$, 于是应有 $a^x=a$, $b^x=b^{-1}$. 但由此就应有 $a^3=[a,b]^x=[a,b^x]=[a,b^{-1}]=a^6$, 这是不可能的. 故此时 G 只有一种构造 (2.19).

5) 当 $P \cong P_5$ 时, 则 P_G 只能是 9 阶初等交换群. 不妨设 $P_G=\langle a, c\rangle$, 于是 G 的构造应为

$$\begin{aligned} &G=(\langle a\rangle\times\langle c\rangle\times\langle y\rangle\times\langle z\rangle)\rtimes(\langle b\rangle\times\langle x\rangle), a^b=ac, c^b=c,\\ &y^b=z, z^b=yz, a^x=a^{-1}, c^x=c^{-1}, y^x=y, z^x=z. \end{aligned} \tag{2.20}$$

(ii) 设 $G/P_G \cong SL(2,3)$. 这时, G 的 Sylow 2 - 子群同构于 8 阶四元数群, 设为 $Q_5=\langle\, x,\ y \bigm| |x|=4,\ x^2=y^2,\ x^y=x^3\,\rangle$. 易见, Q_5 必非平凡作用在 P_G 上. 若 P_G 不是 G 的极小正规子群, 则 G 有一个 3 阶正规子群 N, 于是 G/N 是 Sylow 子群皆不正规的 72 阶群, 但由文 [9] 之引理 1 知, G/N 的 Sylow 2 - 子群不是四元数群, 因此 P_G 是 G 的极小正规子群, 从而必为 9 阶初等交换群. 因此 P 不可为循环群 P_1.

1) 当 $P \cong P_2$ 时, 则 P_G 必为 9 阶初等交换群 $\langle a^3, b\rangle$. 这时 a 作用在 Q_5 上是 Q_5 的 3 阶自同构, 于是 $[a^3, Q_5]=1$, 从而 $\langle a^3\rangle \le Z(G)$, 这样 P_G 不是 G 的极小正规子群, 矛盾.

2) 当 $P \cong P_3$ 时, 则 P_G 只能为 9 阶初等交换群, 于是 $G \cong SL(2,3)\ltimes E_9$. 但 P 是交换群, 而 $SL(2,3)$ 没有包含 3 阶元的真正规子群, 因此这时 G 是不存在的.

3) 当 $P \cong P_4$ 时, P_G 必为 9 阶初等交换群 $\langle a^3, b\rangle$, 则 a 作用在 Q_5 上是 Q_5 的 3 阶自同构, 于是 $[a^3, Q_5]=1$, 从而 $\langle a^3\rangle \le Z(G)$, 这样 $G/\langle a^3\rangle$ 应是一个没有正规 Sylow 子群的 72 阶群. 由文 [9] 之引理 1 知, $G/\langle a^3\rangle$ 的 Sylow 2 - 子群不是四元数群, 矛盾.

4) 当 $P \cong P_5$ 时, 由于 P_G 是 9 阶初等交换群. 不妨设 $P_G=\langle b, c\rangle$. 又 P_G 是 G 的极小正规子群, 所以 Q_5 在 P_G 上的作用是不可分解的. 群 Q_5P_G 中只有一个 9 阶子群, 由此不难得知 Q_5P_G 中有 9 个 Sylow 2 - 子群, 从而 a 正规化 Q_5, 故 $\langle a, Q_5\rangle \cong SL(2,3)$, 且 $G=\langle a, Q_5\rangle\ltimes P_G$. 由 $P \cong P_5$ 可知, a 作用在 P_G 上的矩阵是 $a=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 又取 $x=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 则 $y=x^a=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 因而 G 的构造应为

$$\begin{aligned} &G=(((\langle b\rangle\times\langle c\rangle)\rtimes\langle x, y\rangle)\rtimes\langle a\rangle, |x|=4, x^2=y^2, x^y=x^3, x^a=y,\\ &y^a=xy, b^a=bc^{-1}, c^a=c, b^x=c^{-1}, c^x=b, b^y=bc, c^y=bc^{-1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

(iii) 设 $G/P_G \cong S_4$. 这时由于 S_4 有一个 12 阶正规子群 A_4, 所以 G 有一个 108 阶正规子群 H 使得 $H/P_G \cong A_4$. 易见, H 的 Sylow 3 - 子群不正规, 由文 [8] 之引理 8 可知 H 的 Sylow 2 - 子群正规, 从而得 $O_2(G)$ 是 4 阶初等交换群. 显然 $N_H(P)=P$, 于是

$O_2(G)\cap N_G(P)=1$, 由此得 $G=O_2(G)\rtimes N_G(P)$. 又显然 $N_G(P)$ 是一个 Sylow 2 - 子群不正规的 54 阶群, 而 G 的 Sylow 2 - 子群同构于 8 阶二面体群, 所以可设 $O_2(G)=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$, $N_G(P)=\langle z\rangle\rtimes P$, 其中 $|x|=|y|=|z|=2, x^z=x,\ y^z=xy$.

1) 当 $P\cong P_1=\langle a\rangle$ 时, 必有 $P_G=\langle a^3\rangle, G$ 的构造应为

$$G=((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\rtimes\langle z\rangle, |a|=27, x^a=y, y^a=xy, a^z=a^{-1}. \tag{2.22}$$

2) 当 $P\cong P_2$ 时, 若 P_G 是 9 阶初等交换群, 则 G 有两种不同的构造

$$G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\times\langle b\rangle)\rtimes\langle z\rangle,\quad x^a=y, y^a=xy, a^z=a^{-1}, b^z=b^{-1}, \tag{2.23}$$
$$G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\rtimes\langle z\rangle)\times\langle b\rangle, x^a=y, y^a=xy, a^z=a^{-1}. \tag{2.24}$$

若 P_G 是 9 阶循环群, 则 G 也有两种不同的构造

$$G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle b\rangle)\times\langle a\rangle)\rtimes\langle z\rangle,\quad x^b=y, y^b=xy, a^z=a^{-1}, b^z=b^{-1}, \tag{2.25}$$
$$G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle b\rangle)\rtimes\langle z\rangle)\times\langle a\rangle, x^b=y, y^b=xy, b^z=b^{-1}. \tag{2.26}$$

3) 当 $P\cong P_3$ 时, P_G 只能是 9 阶初等交换群, G 有三种不同的构造

$$\begin{aligned}&G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\times(\langle b\rangle\times\langle c\rangle))\rtimes\langle z\rangle,\\ &x^a=y, y^a=xy, a^z=a^{-1}, b^z=b^{-1}, c^z=c^{-1},\end{aligned} \tag{2.27}$$
$$\begin{aligned}&G=((((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\times\langle b\rangle)\rtimes\langle z\rangle)\times\langle c\rangle,\\ &x^a=y, y^a=xy, a^z=a^{-1}, b^z=b^{-1},\end{aligned} \tag{2.28}$$
$$G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\rtimes\langle z\rangle)\times(\langle b\rangle\times\langle c\rangle), x^a=y, y^a=xy, a^z=a^{-1}. \tag{2.29}$$

4) 当 $P\cong P_4$ 时, 若 P_G 是 9 阶循环群 $\langle a\rangle$, 则 $G=\langle b,x,y,z\rangle\ltimes\langle a\rangle$, 于是 $\langle b,x,y,z\rangle\cong S_4$. 又 $[a,O_2(G)]=1, b$ 作用在 $\langle a\rangle$ 上诱导 $\langle a\rangle$ 的一个 3 阶自同构, 注意到 $\langle a\rangle$ 的自同构群是 6 阶循环群, 而 S_4 不可能有 3 阶或 6 阶循环商群, 故 P_G 不能是 9 阶循环群. 设 P_G 是 9 阶初等交换群 $\langle a^3,b\rangle$, 则 $\langle a,x,y,z\rangle$ 作用在 P_G 上诱导 P_G 的一个 6 阶非交换自同构群. 易见 $b^a=a^{-3}b$, $a^z=a^{-1}$. 设 $b^z=a^{3m}b^n$, 则由 $b^{z^2}=b$ 及 $b^{a^z}=b^{a^{-1}}$ 得 $m(n-1)\equiv 0\pmod 3), n^2\equiv 1\pmod 3)$ 与 $m-n-1\equiv 1\pmod 3), n\equiv 1\pmod 3)$ 同时成立, 所以 $m\equiv 0\pmod 3)$, $n\equiv 1\pmod 3)$, 即有 $b^z=b$. 总之, 当 $P\cong P_4$ 时, G 只有一种构造

$$\begin{aligned}&G=((\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\rtimes\langle a\rangle)\rtimes(\langle b\rangle\times\langle z\rangle),\\ &x^a=y, y^a=xy, a^b=a^4, x^b=x, y^b=y, a^z=a^{-1}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

5) 当 $P\cong P_5$ 时, P_G 只能是 9 阶初等交换群, 不妨设为 $\langle a,c\rangle$, 则 $G=\langle b,x,y,z\rangle\ltimes\langle a,c\rangle$, 于是 $\langle b,x,y,z\rangle\cong S_4$. 又 $N_G(P)=\langle z\rangle\ltimes\langle a,b,c\rangle$, 而 $Z(P)=\langle c\rangle$, 所以 $c^z=c$ 或 c^{-1}. 又注意到 $[P_G,O_2(G)]=1, a^b=ac$, 故当 $c^z=c$ 时, G 的构造是

$$\begin{aligned}&G=((\langle x\rangle\times\langle y\rangle\times\langle a\rangle\times\langle c\rangle)\rtimes\langle b\rangle)\rtimes\langle z\rangle,\\ &x^b=y, y^b=xy, a^b=ac, c^b=c, a^z=a^{-1}, b^z=b^{-1}, c^z=c.\end{aligned} \tag{2.31}$$

当 $c^z=c^{-1}$ 时, G 的构造是

$$\begin{aligned}&G=(((\langle x\rangle\times\langle y\rangle\times\langle a\rangle\times\langle c\rangle)\rtimes\langle b\rangle)\rtimes\langle z\rangle,\\&x^b=y,y^b=xy,a^b=ac,c^b=c,a^z=a,b^z=b^{-1},c^z=c^{-1}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

综上所述, 可知引理 2.5 成立.

由上面的引理 2.1–2.3 及引理 2.5, 可知定理 1.1 成立.

参 考 文 献

[1] 肖文俊, 谭忠. 阶为 2^3p^3 的群的构造 [J]. 厦门大学学报 (自然科学版), 1995, 34(5): 845–846.

[2] 蔡琼. 2^3p^3 阶群的构造 [J]. 数学杂志, 2005, 25(4): 449–452.

[3] 陈松良. 2744 阶群的构造 [J]. 数学学报 (中文版), 2013, 56(6): 993–1008.

[4] Robinson D J S. A course in the theory of groups[M]. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[5] 张远达. 有限群构造 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[6] 徐明曜. 有限群导引 (上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[7] 陈松良, 欧阳建新, 李惊雷. pq^3 阶群的完全分类 [J]. 海南师范大学学报 (自然科学版), 2010, 23(3): 253–255.

[8] 陈松良, 蒋启燕. 关于 108 阶群的完全分类 [J]. 郑州大学学报 (理学版), 2013, 45(1): 10–14.

[9] 黄强. 2^33^2 阶群的构造 [J]. 数学杂志, 1986, 6(1): 51–58.

ON THE STRUCTURES OF FINITE GROUPS OF ORDER 216

CHEN Song-liang

(*School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal College, Guiyang 550018, China*)

Abstract: Let G be finite groups of order 216 (i.e., $2^3\cdot 3^3$). By means of local analysis of finite groups, we study the isomorphic classifications of G and have showed that G has 177 nonisomorphic types and their structures are all laid out.

Keywords: finite group; isomorphic classification; structure of group

2010 MR Subject Classification: 20B05; 20D25; 20E34