Vol. 36 (2016)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

与分担函数相关的正规定则

杨端阳, 叶亚盛
(上海理工大学理学院, 上海 200093)

摘 要: 本文研究了与分担函数相关的亚纯函数族的正规性的问题. 利用 Nevanlinna 理论的方法, 得到了一个正规定则, 推广了庞学诚和 Zalcman [3] 的一个结果.

关 键 词: 正规族; 分担值; 分担函数; 亚纯函数
MR(2010) **主题分类号**: 30D45 **中 图 分 类 号**: O174.52
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2016)05-1091-06

1 引言

设区域 D 为复平面 C 上的一个区域, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族. 若对于 $\mathcal{F}$ 中任一函数序列均可选出一个子序列在区域 D 上按球距内闭一致收敛, 则称 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是区域 D 内的两个亚纯函数, a 和 b 是两个复数, 若当 $f(z)=a$, 有 $g(z)=b$, 记 $f(z)=a \Rightarrow g(z)=b$. 若 $f(z)=a \Rightarrow g(z)=b$ 和 $g(z)=b \Rightarrow f(z)=a$, 记 $f(z)=a \Leftrightarrow g(z)=b$. 若 $f(z)=a \Leftrightarrow g(z)=a$. 则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是区域 D 上 IM 分担 a.

1979 年, 顾永兴证明了 Hayman 关于正规族的猜想, 得到如下著名的正规定则.

定理 A [1] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, k 是一个正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f, 有 $f(z)\neq 0$, $f^{(k)}(z)\neq 1$. 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

1986 年, 杨乐改进了定理 A 的结果, 得到

定理 B [2] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, k 是一个正整数, $h(z)(\not\equiv 0)$ 是区域 D 内的全纯函数. 若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, $f(z)\neq 0$, $f^{(k)}(z)\neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

2002 年, 庞学诚和 Zalcman 考虑涉及零点重级的亚纯函数的情况, 证明了

定理 C [3] 设 k 是一个正整数, $h(z)(\not\equiv 0)$ 是区域 D 内的全纯函数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, 其零点重级均至少为 $k+3$. 若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, $f^{(k)}(z)\neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

推广定理 C, 得到如下结果

定理 1 设 k 是一个正整数, M 是正数, $h(z)(\not\equiv 0)$ 是区域 D 内的全纯函数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, 其零点重级均至少为 $k+3$. 若对于任意 $f\in\mathcal{F}$, $f^{(k)}(z)\doteq h(z)\Rightarrow |f(z)|\geq M$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

例 1 设 $D=z:|z|\leq 1$, $h(z)=z$, $\mathcal{F}=\{f_n(z)\}$, 其中 $f_n(z)=\frac{z^4}{2(z^2-\frac{1}{n})}$. 当

$$f_n'(z)-h(z)=-\frac{z}{n^2(z^2-\frac{1}{n})^2}=0$$

*收稿日期: 2015-05-02 接收日期: 2015-06-02
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11371139).
作者简介: 杨端阳 (1989–), 女, 河南信阳, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

时, $|f_n(z)|=0$. 然而 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内不正规, 这是因为当 $n\to\infty$ 时, $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})\to\infty$, $f_n(0)=0$.

例 1 说明 $f^{(k)}(z)\doteq h(z)\Rightarrow|f(z)|\geq M$ 是个必要条件.

在文献 [3] 中的例 1 说明零点重级均至少为 $k+3$ 也是必要的.

定理 2 设 k 是一个正整数, $h(z)(\not\equiv 0,\infty)$ 是区域 D 内的亚纯函数, 其极点的重级均之多为 $k-1$, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, 其零点重级均至少为 $k+3$. 若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, $f^{(k)}(z)\doteq h(z)\Rightarrow|f(z)|\geq M$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

2 相关引理

为了证明定理, 需要下面的引理

引理 2.1 [4] 设 k 是一个正整数, $\mathcal{F}$ 是单位圆盘上的亚纯函数族, 其零点重级至少为 k, 且存在 $A\geq 1$, 使得对于任意 f, 在 f 零点处, 都有 $|f^{(k)}(z)|\leq A$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 则对 $0\leq\alpha\leq k$ 任意, 必存在

a. 点列 z_n, $z_n\to z_0$;

b. 函数列 $f_n\in\mathcal{F}$;

c. 正数列 $\rho_n\to 0^+$,

使得 $g_n(\zeta)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{\alpha}}$ 在复平面 C 按球面距离内闭一致收敛非常数亚纯函数 $g(\zeta)$, 其零点重级至少是 k, 级至多为 2.

引理 2.2 [5] 设 k 是一个正整数, $f(z)$ 是超越亚纯函数, $R(z)(\not\equiv 0)$ 是有理函数. 若除有限个点外, $f(z)$ 的零点重级至少为 $k+2$, 那么 $f^{(k)}(z)-R(z)$ 有无穷多个零点.

引理 2.3 [6] 设 k 是一个正整数, $f(z)$ 是有穷级亚纯函数, 其零点重级均至少为 $k+2$. 若 $f^{(k)}(z)\neq 1$, 则 $f(z)$ 是常数.

引理 2.4 [3] 设 $f(z)$ 是非常数有理函数, k, m 是正整数. 若 $f(z)$ 的零点重级均至少为 $k+3$, 则对于任意正整数 m, 在复平面上 $f^{(k)}(z)=z^m$ 有解.

引理 2.5 [7] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘上的亚纯函数族, a 是一个有穷复数或 ∞, 且每个任意 $f\in\mathcal{F}$, $f\neq a$. 若 $\mathcal{F}$ 在 $\triangle'$ 内正规, 在 $z=0$ 处不正规, 则存在 $\mathcal{F}$ 的子列 f_n, 使得 $f_n\to a$ 在 $\triangle'$ 内.

引理 2.6 [8] 设 k, m 是一个正整数, $f(z)$ 是有理函数, 其零点的重级均至少为 k. 如果 $f^{(k)}(z)\neq z^{-m}$, 那么 $f(z)$ 是常数.

引理 2.7 设 $\{f_n(z)\}$ 是区域 D 内的亚纯函数列, 其零点重级均至少为 $k+3$, $\{h_n(z)\}$ 是区域 D 内的全纯函数列, 并且一致收敛于全纯函数 $h(z)(\neq 0)$. 若对于任意正整数 n, $f_n^{(k)}(z)=h_n(z)\Rightarrow|h_n(z)|\geq M$, 则 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内正规.

证 设 z_0 为 D 内任意一点, 下证 $\{f_n(z)\}$ 在 z_0 处正规. 由于 $h(z)\neq 0$, 不妨设 $h(z_0)=1$. 假设 $\{f_n(z)\}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 2.1, 存在点列 z_n, $z_n\to z_0$, $\{f_n(z)\}$ 的子列（仍记为 $\{f_n(z)\}$), 正数列 $\rho_n\to 0$, 使得 $g_n(\zeta)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}$ 在复平面 C 上按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\zeta)$, 其零点重级至少为 $k+3$, 级至多为 2.

断言: $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$.

若不然, 存在 ζ_0, 使得 $g^{(k)}(\zeta_0)=1$. 显然 $g^{(k)}\not\equiv 1$. 否则, $g(\zeta)$ 是次数为 k 的多项式, 这与 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$ 矛盾. 又因为 $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)-h_n(z_n+\rho_n\zeta)=g_n^{(k)}(\zeta)-h_n(z_n+\rho_n\zeta)\to g^{(k)}(\zeta)-1$, 由 Hurwitz 定理, 存在 ζ_n, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 n 充分大时,

$f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=h_n(z_n+\rho_n\zeta_n)$, 根据条件可得 $|f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)|\ge M$, 则

$$|g_n(\zeta_n)|=|\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k}|\ge\frac{M}{\rho_n^k},$$

所以 $g_n(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}=\infty$, 这与 $g^{(k)}(\zeta_0)=1$ 矛盾.

由于 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 由引理 2.3, $g(\zeta)$ 是常数, 矛盾.

3 定理的证明

定理 1 的证明 不妨设 D 为 $\triangle$, z_0 为 $\triangle$ 内任意一点. 下证 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 下面分两种情况讨论.

情形 1 $h(z_0)\neq0$, 则存在 $\delta>0$, 使得在 $\triangle(z_0,\delta)$ 内, $h(z)\neq0$. 由引理 2.7, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

情形 2 $h(z_0)=0$. 不失一般性, 令 $z_0=0$, $h(z)=z^m\phi(z)$, 其中在 $\triangle$ 内 $\phi(0)=1,\phi(z)\neq0$. 由情形 1, $\mathcal{F}$ 在 $\triangle'=\triangle\backslash\{0\}$ 内正规, 下证 $\mathcal{F}$ 在 $z_0=0$ 处正规.

令 $\mathcal{F}_\infty:\{F(z)=\frac{f(z)}{z^m},f\in\mathcal{F}\}$. 显然 $f(0)\neq0$. 否则, $f(0)=0$. 由于 f 零点重级均至少为 $k+3$, 则 $f^{(k)}(0)=0$, 即 $f^{(k)}(0)=h(0)$, 根据条件 $0=|f(0)|\ge M$, 矛盾. 由于 $f(0)\neq0$, 则 $F(0)=\infty$. 下证 $\mathcal{F}_\infty$ 在 $z_0=0$ 处正规.

假设 $\mathcal{F}_\infty$ 在 $z_0=0$ 处不正规, 由引理 2.1, 存在点列 z_n, $z_n\to0$, 函数列 $F_n\in\mathcal{F}_\infty$, 正数列 $\rho_n\to0^+$, 使得

$$g_n(\zeta)=\frac{F_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}$$

在复平面 C 上按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\zeta)$, 其零点重级至少为 $k+3$, 级至多为 2.

情形 2.1 $\frac{z_n}{\rho_n}\to\infty$. 因为

$$f_n^{(k)}(z)=F_n^{(k)}(z)z^m+\sum_{i}^{k}m(m-1)\cdots(m-i+1)C_k^iz^{m-i}F_n^{(k-i)}(z),$$

又因为 $\rho_n^ig_n^{(k-i)}(\zeta)=F_n^{(k-i)}(z_n+\rho_n\zeta)$, 其中 $i=0,1,\cdots,k$. 所以

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^m}=g_n^{(k)}(\zeta)+\sum m(m-1)\cdots(m--i+1)C_k^i(\frac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta})^ig_n^{(k-i)}(\zeta)$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\rho_n}{(z_n+\rho_n\zeta)}=0$, 因此

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^m}-\frac{h(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^m}\to g^{(k)}-1.$$

断言: $g^{(k)}(\zeta)\neq1$.

若不然, 存在 ζ_0, 使得 $g^{(k)}(\zeta_0)=1$. 显然, $g^{(k)}(\zeta)\not\equiv1$. 否则, $g(\zeta)$ 是次数为 k 的多项式, 这与 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$ 矛盾. 由 Hurwitz 定理, 存在 ζ_n, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 n 充分大时, $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=h(z_n+\rho_n\zeta_n)$. 根据条件可得 $|f_n(z_n+\rho_n\zeta)|\ge M$, 则

$$|g_n(\zeta)|=|\frac{F_n(z_n+\rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k}|=|\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)}{(z_n+\rho_n\zeta_n)^m\rho_n^k}|\ge\frac{M}{(z_n+\rho_n\zeta_n)^m\rho_n^k},$$

所以 $g(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\zeta_n)=\infty$, 这与 $g^{(k)}(\zeta_0)=1$ 矛盾.

由于 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 由引理 2.3, $g(\zeta)$ 是常数, 矛盾.

情形 2.2 $\frac{z_n}{\rho_n}\to\alpha$. 其中 α 是有穷复数. 因为

$$\frac{F_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}=\frac{F_n(\zeta_n+\rho_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n^k}==g(\zeta-\alpha),$$

所以 $g(\zeta-\alpha)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 并且 0 是 $g(\zeta-\alpha)$ 的重级至少为 m 的极点.

记 $G_n(\zeta)=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+m}}$, 则

$$G_n=\frac{F_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}\frac{(\rho_n\zeta)^m}{\rho_n^m}\to G(\zeta)\triangleq g(\zeta-\alpha\zeta^m),$$

其中 $G(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$. 由于 0 是 $g(\zeta-\alpha)$ 的重级至少为 m 的极点, 所以 $G(0)\neq 0$.

断言: $G^{(k)}(\zeta)\neq\zeta^m$.

若不然, 存在 ζ_0, 使得 $G^{(k)}(\zeta_0)=\zeta_0^m$. 断言 $G^{(k)}(\zeta)\neq\zeta^m$. 否则, $G^{(k)}(\zeta)\equiv\zeta^m$. 设 ζ_0 为 $G(\zeta)$ 的零点, 由于 $G(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 从而 $G^{(k)}(\zeta_0)\equiv\zeta_0^m$, 那么 $\zeta_0=0, G(0)$, 矛盾. 又因为 $\frac{f_n^{(k)}(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m}-\frac{\rho_n\zeta)}{\rho_n^m}\to G^{(k)}-\zeta^m$. 由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 n 充分大时, $f_n^{(k)}(\rho_n\zeta_n)-h(\rho_n\zeta_n)$. 根据条件可得 $|f_n(\rho_n\zeta)|\geq M$, 则

$$|G_n(\zeta_n)|=|\frac{f_n(\rho_n\zeta_n)}{\rho_n^{m+k}}|\geq\frac{M}{\rho_n^{m+k}},$$

所以 $G(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}G_n(\zeta_n)=\infty$, 这与 $G^{(k)}(\zeta_0)=\zeta_0^m$ 矛盾.

由于 $G(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 由引理 2.2, $G(\zeta)$ 是有理函数. 若 $G(\zeta)$ 是非常数有理函数, 由引理 2.4, $G^{(k)}(\zeta)=\zeta^m$ 有解, 这与断言矛盾. 所以 $G(\zeta)$ 是常数. 设 $G(\zeta)=c(\neq 0)$, 所以 $G_n(\zeta)=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+m}}\to c$, 从而可得

$$\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m}-\frac{h_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m}=G_n^{(k)}(\zeta)-\zeta^m\phi(\rho_n\zeta)\to-\zeta^m.$$

首先假设 $f_n(z)$ 在 $\triangle_\delta\in\triangle$ 内上全纯函数. 因为 $f_n(z)$ 在 $\triangle_\delta'$ 内正规, 但是在 0 处不正规, 由最大模型原理 $f_n(z)\to\infty$ 于 $\triangle_\delta'$ 内.

另一方面, $f_n(z)\neq 0$, 所以 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 为 $\triangle_\delta$ 内一全纯函数列且在 $\triangle_\delta'$ 内正规, 然而 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 在 0 处不正规, 根据最大模型原理, $\frac{1}{f_n(z)}\to\infty$ 于 $\triangle_\delta'$ 内, 矛盾. 所以存在 $z_n^*\to 0$, 使得 $f_n(z_n^*)=0$. 又因为 $G_n(\zeta)=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+m}}\to c$, 其中 $c\neq 0$, 然而 $G_n(\frac{z_n^*}{\rho_n})=\frac{f_n(z_n^*)}{\rho_n^{k+m}}=0$, 从而可得 $\frac{z_n^*}{\rho_n}\to\infty$.

令

$$L_n(\zeta)=\frac{f_n(z_n^*\zeta)}{(z_n^*)_n^{k+m}},K_n(\zeta)=\frac{H(z_n^*\zeta)}{(z_n^*)_n^m}.$$

于是 $L_n(\zeta)$ 为复平面上的全纯函数列, 其零点的重级至少为 $k+3$. $K_n(\zeta)$ 为全纯函数列且一致收敛于 ζ^m. 根据条件可得 $L_n^{(k)}(\zeta)=K_n(\zeta)\Rightarrow|L_n(\zeta)|\geq M$, 由引理 2.7, $L_n(\zeta)$ 在 $C\backslash\{0\}$ 内正规. 若 $L_n(\zeta)$ 在 0 处不正规, 由引理 2.5, $L_n(\zeta)\to\infty$ 在 $C\backslash\{0\}$ 内.

由于 $L_n(1)=\frac{f_n(z_n^*)}{(z_n^*)_n^{k+m}}=0$, 从而可得 $L_n(1)=0$, 矛盾. 故 $L_n(\zeta)$ 在 C 内正规, 设 $L_n(\zeta)\to L(\zeta)$, 其中 $L(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$. 显然, $L^{(k)}(\zeta)-\zeta^m$ 有零点. 否则, $L^{(k)}(\zeta)\neq\zeta^m$, 从而 $L^{(k)}(0)\neq 0^m$. 经计算可得 $L_n(0)=G_n(0)(\frac{\rho_n}{z_n^*})\to 0$, 而且 $L(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$ 则 $L^{(k)}(0)=0^m$, 矛盾. 显然 $L^{(k)}(\zeta)\equiv\zeta^m$. 否则, $L^{(k)}(1)\equiv 1^m$. 又由于 $L(1)=0$, 并且 $L(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 则 $L^{(k)}(1)=0$, 矛盾. 于是设 ζ_0 是 $L^{(k)}(\zeta)-\zeta^m$ 的零点, 又因为

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n^*\zeta)}{(z_n^*)^m}-\frac{h(z_n^*\zeta)}{(z_n^*)^m}\to L^{(k)}(\zeta)-\zeta^m.$$

由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 n 分大时, $f_n^{(k)}(z_n^*\zeta_n)-h(z_n^*\zeta_n)$, 根据条件可得 $|f_n(z_n^*\zeta_n)|\geq M$, 则

$$|L_n(\zeta_n)|=|\frac{f_n(z_n^*\zeta_n)}{(z_n^*)_n^{m+k}}|\geq\frac{M}{(z_n^*)_n^{m+k}},$$

所以 $L(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}L_n(\zeta_n)=\infty$, 这与 $L^{(k)}(\zeta_0)=\zeta_0^m$ 矛盾. 因此存在 ω_n, 使得 $f_n(\omega_n)=\infty$, 其中 ω_n 是 f_n 模最小的极点. 经计算可得 $G_n(\zeta)=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+m}}\to c$, 其中 c 是非零常数. 然而 $G_n(\frac{\omega_n}{\rho_n})=\infty$, 所以 $\frac{\omega_n}{\rho_n}\to\infty$.

令

$$T_n(\zeta)=\frac{f_n(\omega_n\zeta)}{(\omega_n)_n^{k+m}},\ \ S_n(\zeta)=\frac{h(\omega_n\zeta)}{(\omega_n)_n^m}.$$

于是 $T_n(\zeta)$ 为复平面上的亚纯函数列, 其零点的重级至少为 $k+3$, $S_n(\zeta)$ 为全纯函数列且一致收敛于 ζ^m. 根据条件可得 $T_n^{(k)}(\zeta)=S_n(\zeta)\Rightarrow|T_n(\zeta)|\geq M$, 由引理 2.7, $T_n(\zeta)$ 在 $C\backslash\{0\}$ 内正规. 显然

$$T_n(\zeta)=\frac{f_n(\omega_n\zeta)}{(\omega_n)_n^{k+m}}\neq\infty$$

在 $\triangle$ 内. 否则, 存在 η_n, 使得 $T_n(\eta_n)=\infty$, 则 $f_n(\omega_n\eta_n)=\infty$. 显然 $|\omega_n\eta_n|=|\omega_n||\eta_n|<|\omega_n|$, 这与 ω_n 是 f_n 模最小的极点矛盾. 再根据最大模原理以及 Montel 定则, 故 $T_n(\zeta)$ 在 C 内正规.

设 $T_n(\zeta)\to T(\zeta)$, 其中 $T(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$. 显然, $T^{(k)}(\zeta)-\zeta^m$ 有零点. 否则, $T^{(k)}(\zeta)\neq\zeta^m$, 从而 $T^{(k)}(0)\neq 0^m$. 又因为 $T_n(0)=G_n(0)(\frac{\rho_n}{\omega_n})\to 0$, 而且 $T(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+3$, 则 $T^{(k)}(0)=0$, 矛盾. 显然, $T^{(k)}(\zeta)\equiv\zeta^m$. 否则, $T^{(k)}(1)\equiv 1^m$. 又由于

$$T_n(1)=\frac{f_n(\omega_n\zeta)}{(\omega_n)_n^{k+m}}=\infty,$$

矛盾. 于是设 ζ_0 是 $T^{(k)}(\zeta)-\zeta^m$ 的零点, 又因为

$$\frac{f_n^{(k)}(\omega_n\zeta)}{(\omega_n)^m}-\frac{h(\omega_n\zeta)}{(\omega_n)^m}\to T^{(k)}(\zeta)-\zeta^m.$$

由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 n 分大时, $f_n^{(k)}(\omega_n\zeta_n)-h(\omega_n\zeta_n)$, 根据条件可得 $|f_n(\omega_n\zeta_n)|\geq M$, 则

$$|T_n(\zeta_n)|=|\frac{f_n(\omega_n\zeta_n)}{(\omega_n)_n^{m+k}}|\geq\frac{M}{(\omega_n)_n^{m+k}},$$

所以 $T(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}L_n(\zeta_n)=\infty$, 这与 $T^{(k)}(\zeta_0)=\zeta_0^m$ 矛盾. 所以 $\mathcal{F}_\infty$ 在 z_0 处正规. 下证 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

由于 $\mathcal{F}_\infty$ 在 z_0 处正规, 由条件知对于任意 $F_n\in\mathcal{F}_\infty$, 有 $F_n(0)=\infty$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|F(z)|\geq 1$ 在 $\triangle_\delta$ 内, 所以当 n 充分大时, $|F_n(z)|\geq\frac{1}{2}$. 故在 $\triangle_{\delta_1}$ 内 $f_n(z)\neq 0$, 则 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 在 $\triangle_{\delta_1}$ 内是全纯函数列, 因此

$$|\frac{1}{f_n(z)}|=|\frac{1}{z^mF_n(z)}|\leq\frac{2^{m+1}}{\delta_1^m},|z|=\frac{\delta_1}{2},$$

再由最大模原理以及 Montel 定则知 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 故 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

定理 2 的证明利用引理 2.2 和 2.6, 类似于定理 1 方法可证得.

参 考 文 献

[1] Gu Y X. A normal criterion of meromorphic families[J]. Sci. Sinica, Math., 1979, (I): 267–374.

[2] Yang L. Normality of families of meromorphic functions[J]. Scientia. Sinica., 1986, A(9): 898-908.

[3] Pang X C, Yang D G, Zalcman L. Normality families of meromorphic functions whose derivatives omit a function[J]. Comput. Meth. Funct. The., 2002, 2: 257–265.

[4] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values[J]. Bull. London. Math. Soc., 2000, 32: 325–331.

[5] Xu Y. Picard Values and derivatives of meromorphic functions[J]. Kodai. Math. J., 2005, 28: 99–105.

[6] Wang Y F, Fang M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Math. Sci., 1998, 1: 17–26.

[7] 杨刘, 陈巧玉. 与例外函数相关的正规族 [J]. 华东师范大学学报, 2013, 2: 154–159.

[8] Xu Y. Normal families and exceptional functions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 329: 1343–1354.

[9] 李铭, 黄斌. 亚纯函数族的一个正规定则 [J]. 数学杂志, 2014, 3(34): 539–545.

[10] 徐焱. 亚纯函数的正规族 [J]. 数学杂志, 2001, 4(21): 381–386.

NORMALITY ON SHARING FUNCTIONS

YANG Duan-yang, YE Ya-sheng

(*School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: In this paper, we study the normality of the family of meromorphic functions about sharing functions. By using Nevanlinna theory method, we obtain a normal criterion, which improves a results got by Pang and Zalcman [3].

Keywords: normal family; sharing values; sharing functions; meromorphic function

2010 MR Subject Classification: 30D45