

m -NA 随机阵列的完全收敛性的一个注记

胡学平

(安庆师范学院数学与计算科学学院, 安徽 安庆 246133)

摘要: 本文研究了行 m -NA 随机阵列的完全收敛性. 利用文 [8] 中结果获得了 m -NA 列最大部分和的一个概率不等式, 并根据该不等式和截尾的方法, 探讨了行 m -NA 随机阵列的完全收敛性, 获得了与行 NA 随机阵列情形类似的结果, 简化了文 [5] 中定理 1 的证明.

关键词: NA 列; m -NA 列; 完全收敛性; 最大部分和; 概率不等式

MR(2010) 主题分类号: 60F15 中图分类号: O212.4

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2016)03-0609-06

1 引言

完全收敛性概念自 Hsu 和 Robbins [1] 提出以来, 已有许多学者从不同方面进行了推广并取得了比较完美的结果. 如 Baum 和 Katz [2] 获得了实值独立同分布随机变量序列完全收敛性的一个经典结果. Sung 等 [3] 把文 [1] 中的结果推广为如下的定理 A.

定理 A [3] 设 $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ 是行独立随机阵列, $\{a_n, n \geq 1\}$ 为一个非负常数列, 若满足下列条件

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \epsilon) < \infty, \forall \epsilon > 0;$
- (ii) 存在 $J \geq 2, \delta > 0$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \leq \delta) \right]^J < \infty;$
- (iii) $\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P\left\{ \left| \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \right| > \epsilon \right\} < \infty, \forall \epsilon > 0.$

定义 1 [4] 称随机变量是 $X_1, X_2, \dots, X_n, (n \geq 2)$ 是 NA 的, 如果对于集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意两个不相交的非空子集 A 与 B , 都有 $\text{Cov}(f_1(X_i, i \in A), f_2(X_j, j \in B)) \leq 0$, 其中 f_1, f_2 是任何两个使得协方差存在且对每个变元均非降 (或对每个变元均非增) 的函数. 称随机序列 $\{X_n, n \in N\}$ 是 NA 的, 如果对每个 $n \geq 2, X_1, X_2, \dots, X_n$ 都是 NA 的.

定义 2 [5] 对固定的 $m \geq 1$, 称随机变量序列 $\{X_k, k \geq 1\}$ 是 m -NA 的, 如果对任意自然数 $n \geq 2$, 序列 k_1, k_2, \dots, k_n 满足 $|k_i - k_j| \geq m$, 其中 $1 \leq i \neq j \leq n, m \leq n$, $\{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$ 是 NA 的.

m -NA 列是 NA 列的一个自然推广. 这些概念自引入以来, 不少学者研究了其完全收敛性、强收敛性等性质, 获得了很多结果. 如邱德华 [6] 研究了行为 NA 随机阵列的完全收敛性, Chen 等 [7], Sung [8] 研究了行 NA 阵列的完全收敛性, 得到如下定理 B:

*收稿日期: 2014-04-16 接收日期: 2014-10-16

基金项目: 安徽省高校自然科学基金重点项目 (KJ2013A179).

作者简介: 胡学平 (1972-), 男, 安徽宿松, 教授, 研究方向: 概率极限理论及其应用.

定理 B [7] 设 $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ 是行 NA 随机阵列, $\{a_n, n \geq 1\}$ 为一个非负常数列, 若满足定理 A 中条件 (i) 及

$$(II) \text{ 存在 } J \geq 1, \delta > 0, \text{ 使得 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var} X_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta) \right]^J < \infty, \text{ 则}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left\{ \max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [X_{ni} - EX_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta)] \right| > \epsilon \right\} < \infty, \forall \epsilon > 0.$$

而对行 m -NA 阵列情形 Hu 和 Volodin [5] 得到如下定理 C.

定理 C [5] 设 $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ 是行为 m -NA 随机阵列, $\{a_n, n \geq 1\}$ 为一个非负常数列, 若满足定理 A 中条件 (i), (ii) 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left\{ \max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [X_{ni} - EX_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta)] \right| > \epsilon \right\} < \infty, \forall \epsilon > 0.$$

本文进一步研究行 m -NA 随机阵列的完全收敛性, 并简化了定理 C, 即文 [5] 中定理 1 的证明. 全文约定 N 为正整数. $I(A)$ 为 A 的示性函数.

2 定理及其证明

定理 1 设 $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ 是一个均值为零的行 m -NA 随机阵列, 且 $EX_{ni}^2 < \infty, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1, \{a_n, n \geq 1\}$ 为一个非负常数列, 若满足定理 A 中条件 (i) 及

(II)' 存在 $J \geq 1$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 \right)^J < \infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left\{ \max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l X_{ni} \right| > \epsilon \right\} < \infty, \forall \epsilon > 0.$$

注 该定理把定理 C 中条件 (ii) 的 $J \geq 2$ 改进为 $J \geq 1$, 由该定理可以推导出定理 C.

在证明定理之前先引述文 [9] 一个引理.

引理 1 [9] 设 $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ 是一个均值为零的 NA 列, 且 $EX_i^2 < \infty, 1 \leq i \leq n, n \geq 2$.

令 $B_n = \sum_{i=1}^n EX_i^2, S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, 则 $\forall x > 0, a > 0$,

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k > x \right\} \leq P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} X_i > a \right\} + 2 \exp \left\{ -\frac{x^2}{8B_n} \right\} + 2 \left[\frac{B_n}{4(ax + B_n)} \right]^{x/(12a)},$$

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x \right\} \leq 2P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > a \right\} + 4 \exp \left\{ -\frac{x^2}{8B_n} \right\} + 4 \left[\frac{B_n}{4(ax + B_n)} \right]^{x/(12a)}.$$

引理 2 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是一个均值为零的 m -NA 列, 且 $EX_i^2 < \infty, i \geq 1$. 令 $B_n = \sum_{i=1}^n EX_i^2$,

则对 $n \geq m, x > 0, a > 0$,

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k > x\right\} \leq m\left[P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i > a\right\} + 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{8m^2 B_n}\right\} + 2\left(\frac{mB_n}{4(ax + mB_n)}\right)^{x/(12ma)}\right]. \tag{2.1}$$

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x\right\} \leq 2m\left[P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > a\right\} + 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{8m^2 B_n}\right\} + 2\left(\frac{mB_n}{4(ax + mB_n)}\right)^{x/(12ma)}\right]. \tag{2.2}$$

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x\right\} \leq 2m\left[P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > a\right\} + 4\left(\frac{2mB_n}{3ax}\right)^{x/(12ma)}\right]. \tag{2.3}$$

证 对给定的 $1 \leq k \leq n$, 取 $r = [\frac{n}{m}]$ (表示取整), 令

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & 1 \leq i \leq n; \\ 0, & i > n, \end{cases}$$

$$T_{mk+j} = \sum_{i=0}^k Y_{mi+j}, 1 \leq j \leq m.$$

显然对 $1 \leq j \leq m, m \leq n, \{Y_{mi+j}, i = 0, 1, \dots, r\}$ 是 NA 的. 由

$$\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq x\right\} \subset \left\{\max_{0 \leq k \leq r} T_{mk+1} \geq \frac{x}{m}\right\} \cup \dots \cup \left\{\max_{0 \leq k \leq r} T_{mk+m} \geq \frac{x}{m}\right\}.$$

根据引理 1 可得

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq x\right\} &\leq \sum_{j=1}^m P\left\{\max_{0 \leq k \leq r} T_{mk+j} \geq \frac{x}{m}\right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^m P\left\{\max_{0 \leq i \leq r} Y_{mi+j} > a\right\} + 2 \sum_{j=1}^m \exp\left\{-\frac{x^2}{8m^2 \sum_{i=0}^r EY_{mi+j}^2}\right\} + 2 \sum_{j=1}^m \left[\frac{m \sum_{i=0}^r EY_{mi+j}^2}{4(ax + m \sum_{i=0}^r EY_{mi+j}^2)}\right]^{\frac{x}{12ma}} \\ &\leq m\left[P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \geq a\right\} + 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{8m^2 B_n}\right\} + 2\left(\frac{mB_n}{4(ax + mB_n)}\right)^{\frac{x}{12ma}}\right]. \end{aligned}$$

下证 (2.3) 式, 由 $e^{-x} < \frac{1}{x}, x > 0$, 有

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{8m^2 B_n}\right\} = \left(\exp\left\{-\frac{3ax}{2mB_n}\right\}\right)^{x/(12ma)} < \left(\frac{2mB_n}{3ax}\right)^{x/(12ma)},$$

又有 $\left(\frac{mB_n}{4(ax+mB_n)}\right)^{x/(12ma)} < \left(\frac{2mB_n}{3ax}\right)^{x/(12ma)}$, 从而由 (2.2) 式可得 (2.3) 式.

定理 1 证明 令 $x = \epsilon, a = \frac{\epsilon}{12mJ}$, 根据 (2.3) 式有

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left|\sum_{i=1}^l X_{ni}\right| > \epsilon\right\} &\leq 2m\left[P\left\{\max_{1 \leq i \leq k_n} |X_{ni}| > \epsilon/(12mJ)\right\} + 4\left(\frac{8m^2 J}{\epsilon^2}\right)^J B_n^J\right] \\ &\leq 2m \sum_{i=1}^{k_n} P\left\{|X_{ni}| > \epsilon/(12mJ)\right\} + 8^{J+1} m^{2J+1} J^J \epsilon^{-2J} B_n^J. \end{aligned}$$

由定理条件 (i) 和 (II)' 知结论成立.

下证由定理 1 推定理 C:

定理 C 证明 令 $Y_{ni} = X_{ni}I(|X_{ni}| \leq \delta) + \delta I(X_{ni} > \delta) - \delta I(X_{ni} < -\delta)$, $\delta > 0, 1 \leq k \leq k_n, n \geq 1$, 则 $\{Y_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ 也为 m -NA 列 [5].

$$\begin{aligned}
 & P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [X_{ni} - EX_{ni}I(|X_{ni}| \leq \delta)] \right| > \epsilon\right\} \\
 \leq & \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [X_{ni}I(|X_{ni}| \leq \delta) - EX_{ni}I(|X_{ni}| \leq \delta)] \right| > \epsilon\right\} \\
 \leq & \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} + P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \\
 & + P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [\delta I(X_{ni} > \delta) - \delta I(X_{ni} < -\delta) - \delta P(X_{ni} > \delta) + \delta P(X_{ni} < -\delta)] \right| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \\
 \leq & P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \frac{\epsilon}{2}\right\} + \frac{2\delta}{\epsilon} E\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left(\sum_{i=1}^l [I(|X_{ni}| > \delta) + P(|X_{ni}| > \delta)] \right)\right\} \\
 & + \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\} \\
 \leq & P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \frac{\epsilon}{2}\right\} + \left(1 + \frac{4\delta}{\epsilon}\right) \sum_{i=1}^{k_n} P\{|X_{ni}| > \delta\}.
 \end{aligned}$$

由条件 (i) 只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \epsilon\right\} < \infty$ 即可.

令 $A = \{n : \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) \leq 1\}$, $B = \{n : \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) > 1\}$, 则

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \epsilon\right\} \\
 = & \sum_{n \in A} a_n P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \epsilon\right\} + \sum_{n \in B} a_n P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \epsilon\right\} \\
 \leq & \sum_{n \in A} a_n P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \epsilon\right\} + \sum_{n \in B} a_n.
 \end{aligned}$$

由条件 (i) 及集合 B 的定义知 $\sum_{n \in B} a_n < \infty$, 故只需证明

$$\sum_{n \in A} a_n P\left\{\max_{1 \leq l \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^l [Y_{ni} - EY_{ni}] \right| > \epsilon\right\} < \infty. \quad (2.4)$$

注意到 $\{Y_{ni} - EY_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ 是一个均值为零且二阶矩有限的行 m -NA 随机阵列. 对 $Y_{ni} - EY_{ni}$ 要利用定理 1, 只需证其在集合 A 上满足定理 1 的条件. 由 C_r -不等式

有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \in A} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} E(Y_{ni} - EY_{ni})^2 \right)^J \\
 \leq & 2^{2J-1} \sum_{n \in A} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(X_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta)) \right)^J \\
 & + 2^{2J-1} \sum_{n \in A} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(\delta I(X_{ni} > \delta) - \delta I(X_{ni} < -\delta)) \right)^J \\
 \leq & 2^{2J-1} \sum_{n \in A} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(X_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta)) \right)^J + 2^{2J-1} \delta^{2J} \sum_{n \in A} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) \right)^J \\
 \leq & 2^{2J-1} \sum_{n \in A} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(X_{ni} I(|X_{ni}| \leq \delta)) \right)^J + 2^{2J-1} \delta^{2J} \sum_{n \in A} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta).
 \end{aligned}$$

由此可得对 $Y_{ni} - EY_{ni}$ 定理 1 的条件 (II)' 满足.

下证对 $Y_{ni} - EY_{ni}$ 满足定理 1 的条件 (i) 也成立. 对给定的 $\epsilon > 0$, 不妨设 $0 < \epsilon < 4\delta$, 令 $Y'_{ni} = X_{ni} I(|X_{ni}| \leq \frac{\epsilon}{4})$, $Y''_{ni} = Y_{ni} - Y'_{ni}$, 于是

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k_n} P(|Y_{ni} - EY_{ni}| > \epsilon) & \leq \sum_{i=1}^{k_n} P(|Y'_{ni} - EY'_{ni}| > \frac{\epsilon}{2}) + \sum_{i=1}^{k_n} P(|Y''_{ni} - EY''_{ni}| > \frac{\epsilon}{2}) \\
 & = \sum_{i=1}^{k_n} P(|Y''_{ni} - EY''_{ni}| > \frac{\epsilon}{2}) \leq \frac{4}{\epsilon} \sum_{i=1}^{k_n} E|X''_{ni}| \\
 & \leq \frac{4\delta}{\epsilon} \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \delta) + \frac{4\delta}{\epsilon} \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \frac{\epsilon}{4}).
 \end{aligned}$$

根据条件 (i) 可得 $\sum_{n \in A} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|Y_{ni} - EY_{ni}| > \epsilon) < \infty$. 由定理 1 可得 (2.4) 式成立.

参 考 文 献

- [1] Hsu P L, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947, 33: 25-31.
- [2] Baum L E, Katz M. Convergence rate in the law of large numbers[J]. Trans. American Math. Soc., 1965, 120: 108-123.
- [3] Sung S H, Volodin A, Hu T C. More on complete convergence for arrays[J]. Stat. Probab. Lett., 2005, 71: 303-311.
- [4] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann. Stat., 1983, 11: 286-295.
- [5] Hu T C, Chen Y, Taylor R L. On complete convergence for arrays of rowwise m -negatively associated random variables[J]. Nonl. Anal., 2009, 71: 1075-1081.
- [6] 邱德华. 行为 NA 的随机变量阵列的完全收敛性 [J]. 数学杂志, 2013, 33(1): 138-146.

- [7] Chen P, Hu T C, Liu X, Volodin A. On complete convergence for arrays of rowwise negatively associated random variables[J]. *Theor. Probab. Appl.*, 2007, 52: 393–397.
- [8] Sung S H. A note on the complete convergence for arrays of dependent random variables[J]. *J. Inequa. Appl.*, doi:10.1186/1029-242x-2011-76.
- [9] Shao Q M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables[J]. *J. Theor. Probab.*, 2000, 13: 243–356.

A NOTE ON COMPLETE CONVERGENCE FOR ARRAYS OF ROWWISE m -NEGATIVELY ASSOCIATED RANDOM VARIABLES

HU Xue-ping

(*School of Math. and Comput. Sci., Anqing Teachers College, Anqing 246133, China*)

Abstract: In this paper, we study the complete convergence for arrays of rowwise m -negatively associated random variables. A probability inequalities of maximal partial sum for sequence of m -negatively associated random variables is obtained according to corresponding results in [8]. By applying the inequality and truncated method, the complete convergence for arrays of rowwise m -negatively associated random variables is investigated. The similar result as arrays of rowwise NA random variables is obtained under certain conditions, and simplifies the proof of Theorem 1 in [5].

Keywords: NA sequence; m -NA sequence; complete convergence; maximal partial sum; probability inequality

2010 MR Subject Classification: 60F15