Vol. 36 (2016)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

含高次逆幂的矩阵方程对称解的双迭代算法

张肖肖, 张凯院, 宋卫红
(西北工业大学应用数学系, 陕西 西安 710072)

摘 要: 本文研究了在控制理论和随机滤波等领域中遇到的一类含高次逆幂的矩阵方程的等价矩阵方程对称解的数值计算问题. 采用牛顿算法求等价矩阵方程的对称解, 并采用修正共轭梯度法求由牛顿算法每一步迭代计算导出的线性矩阵方程的对称解或者对称最小二乘解, 建立了求这类矩阵方程对称解的双迭代算法, 数值算例验证了双迭代算法是有效的.

关键词: 含高次逆幂的矩阵方程; 对称解; 牛顿算法; 修正共轭梯度法; 双迭代算法
MR(2010) **主题分类号:** 65F10　　**中图分类号:** O241.7
文献标识码: A　　**文章编号:** 0255-7797(2016)02-0437-08

1 引言

在控制理论、随机滤波和超分辨率图像恢复等领域, 会遇到形如

$$X+E_1X^{-1}F_1+E_2X^{-2}F_2+E_3X^{-3}F_3=G \tag{1}$$

的含有未知矩阵逆幂的非线性矩阵方程 [1−6], 其中 $E_i,\ F_i,\ G,\ X\in\mathbf{R}^{n\times n}$(实矩阵集合). 针对方程 (1) 的特例 $X+F_1^{\mathrm{T}}X^{-1}F_1=G$, 陈小山等 [1] 给出了方程存在唯一对称正定解的充分条件, 以及对称正定解和最大解的存在区间, 并利用微分方法给出了最大解的一阶扰动界; 针对方程 (1) 的特例 $X+F_2^{\mathrm{T}}X^{-2}F_2=I$, Zhao 等 [2] 研究了 F_2 可逆时, 方程存在对称正定解的充要条件; Peng 等 [3] 给出了当 $\alpha\geq 1$ 时求方程 $X+A^{\mathrm{T}}X^{-\alpha}A=Q$ 的最小对称正定解的不动点迭代算法, 并讨论了算法的收敛性问题; 李静等 [4,5] 给出了方程 $X-A^{\mathrm{T}}X^{-k}A=Q\ (k\geq 1)$ 存在对称正定解的充分条件和解的性质, 并建立了两种迭代算法; Ran 等 [6] 研究了一般非线性矩阵方程 $X+A^{\mathrm{T}}f(X)A=Q$ 存在唯一半正定解的充分条件, 并给出了半正定解的扰动分析. 将方程 (1) 中的 X^{-1} 替换为 X 可得

$$X^{-1}+E_1XF_1+E_2X^2F_2+E_3X^3F_3=G. \tag{2}$$

本文建立求方程 (2) 的对称解的双迭代算法.

首先运用牛顿算法求方程 (2) 的对称解, 然后采用修正共轭梯度法 (MCG 算法) 求由牛顿算法每一步迭代计算导出的线性矩阵方程 (LME) 的对称解或者对称最小二乘解 (Ls 解), 建立求方程 (2) 的对称解的双迭代算法. 通常的牛顿算法要求每一步的 LME 总有唯一对称解, 因此需要对方程 (2) 的系数矩阵和常数项矩阵附加较强的限定, 否则算法就会中断. 文中采用的 MCG 算法不同于通常的共轭梯度法, 它不要求涉及的线性代数方程组的系数矩阵和

*收稿日期: 2013-10-25　　接收日期: 2013-12-30
基金项目: 国家自然科学基金 (11071196).
作者简介: 张肖肖 (1990–), 女, 山东济宁, 硕士, 主要研究方向: 计算数学.

常数项矩阵对称正定、可逆或者列满秩, 因此总是可行的. 文中建立的双迭代算法仅要求方程 (2) 有对称解, 不要求它的对称解唯一, 也不对它的系数矩阵和常数项矩阵做附加限定.

2 求方程 (2) 的对称解的牛顿算法

用 $\mathbf{SR}^{n\times n}$ 表示 n 阶实对称矩阵集合, 引入以下矩阵函数:

$$\psi(X) = X^{-1} + E_1XF_1 + E_2X^2F_2 + E_3X^3F_3 - G,$$
$$\phi_X(Y) = E_1YF_1 + E_2(XY+YX)F_2 + E_3(XYX+X^2Y+YX^2)F_3 - X^{-1}YX^{-1},$$
$$\gamma_X(Y) = \sum_{k=2}^{+\infty}(-X^{-1}Y)^kX^{-1} + E_2Y^2F_2 + E_3(XY^2+Y^2X+YXY+Y^3)F_3.$$

当 $X^{-1}Y$ 的谱半径小于 1 时 (Y 的范数较小时能够满足), 可以导出

$$\psi(X+Y) = \psi(X) + \phi_X(Y) + \gamma_X(Y), \tag{3}$$

这里 $\phi_X(Y)$ 是 $\psi(X)$ 在 "点" X 沿着 "方向" Y 的 Fréchet 导数.

引理 设 $X\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 是方程 (2) 的近似解, 那么, 求方程 (2) 的对称解等价于求校正值 $Y\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 使得 $\psi(X+Y)=O$, 并可以线性化为求 $Y\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 使得 $\phi_X(Y)=-\psi(X)$.

证 设 $X^*\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 是方程 (2) 的精确解, 已知 $X\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 是方程 (2) 的近似解, 令 $X^*=X+Y$, 那么, 求方程 (2) 的解 $X^*\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 等价于求校正值 $Y\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 使得 $\psi(X+Y)=O$. 这是关于 Y 的非线性矩阵方程, 根据牛顿算法的基本原理, 当 Y 的范数较小时, 舍去式 (3) 右端关于 Y 的高次项 $\gamma_X(Y)$, 即用线性部分近似可得 $\psi(X+Y)\approx\psi(X)+\phi_X(Y)$. 于是, 求方程 (2) 的解 $X^*\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 可近似的转化为求关于 Y 的线性矩阵方程 $\phi_X(Y)=-\psi(X)$ 的对称解.

上述引理中, $\phi_X(Y)=-\psi(X)$ 的解 $Y\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 一般不是 $\psi(X+Y)=O$ 的精确解, 从而由 $X^*=X+Y$ 确定的 $X^*\in\mathbf{SR}^{n\times n}$ 也不是 $\psi(X)=O$ 的精确解, 但是可以看作一个近似解. 借鉴文献 [7], 通过修改某些矩阵的类型, 建立求方程 (2) 的对称解的牛顿算法如下.

第 1 步: 给定初始矩阵 $X^{(1)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 置 $k:=1$.

第 2 步: 如果 $\psi(X^{(k)})=O$, 停止; 否则, 求 $Y^{(k)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 使得

$$\phi_{X^{(k)}}(Y^{(k)}) = -\psi(X^{(k)}). \tag{4}$$

第 3 步: 计算 $X^{(k+1)}=X^{(k)}+Y^{(k)}$, 置 $k:=k+1$, 转第 2 步.

需要指出: 对于牛顿算法中的某个 k, 当 LME(4) 没有对称解 Y 时, 可用它的对称 Ls 解来代替, 这也是本文研究的双迭代算法的一个特点. 对于牛顿算法有如下的收敛性结论 [7]: 假设 X^* 是方程 (2) 的单根, 且初始矩阵 $X^{(1)}$ 充分接近于 X^*, 那么由牛顿算法确定的矩阵序列 $\{X^{(k)}\}$ 收敛于 X^*.

3 求 LME(4) 的对称解与对称 Ls 解的 MCG 算法

用 $A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积, $\overline{\mathrm{vec}}(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列向量, $\|A\|$ 表示矩阵 A 的 Frobenius 范数. 下面建立求 LME(4) 的对称解与对称 Ls 解的 MCG

算法. 考虑 LME(4) 的一般形式

$$\sum_{i=1}^{7} A_i Y B_i = F, \tag{5}$$

其中 $A_i,\ B_i,\ F \in \mathbf{R}^{n\times n}$. 研究以下两个问题:

问题 I 设 LME(5) 有对称解, 求 $Y \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 使满足 LME(5).

问题 II 设 LME(5) 无对称解, 求 $Y \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 使得 $\|\sum\limits_{i=1}^{7} A_i Y B_i - F\| = \min$.

3.1 求解问题 I 的 MCG 算法

借鉴文献 [8] 的算法原理, 通过修改有关矩阵的类型或者算法, 建立求解问题 I 的 MCG 算法. 引进记号: $u(Y) = \sum\limits_{i=1}^{7} A_i Y B_i$, $w(R) = \sum\limits_{i=1}^{7} A_i^{\mathrm{T}} R B_i^{\mathrm{T}}$.

算法 1 (问题 I 的 MCG 算法)

第 1 步 任意给定初始矩阵 $Y^{(1)} \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 置 $k := 1$, 计算 $R_k = F - u(Y^{(k)})$, $\widetilde{R}_k = w(R_k)$, $Z_k = \frac{1}{2}(\widetilde{R}_k + \widetilde{R}_k^{\mathrm{T}})$;

第 2 步 如果 $R_k = O$, 或者 $R_k \neq O$ 而 $Z_k = O$, 停止计算; 否则, 计算 $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \frac{\|R_k\|^2}{\|Z_k\|^2} Z_k$;

第 3 步 计算

$$R_{k+1} = F - u(Y^{(k+1)}),\ \widetilde{R}_{k+1} = w(R_{k+1}),\ Z_{k+1} = \frac{1}{2}(\widetilde{R}_{k+1} + \widetilde{R}_{k+1}^{\mathrm{T}}) + \frac{\|R_{k+1}\|^2}{\|R_k\|^2} Z_k;$$

第 4 步 置 $k := k+1$, 转第 2 步.

可以验证, 算法 1 中的矩阵满足 $Y^{(k)} \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 且有如下的收敛定理 (证明过程类似文献 [8]).

定理 1 设问题 I 相容 (指 LME(5) 有对称解), 则对任意初始矩阵 $Y^{(1)} \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 算法 1 可在有限步计算后求得问题 I 的一个解, 即 LME(5) 的一个对称解; 若取初始矩阵 $Y^{(1)}$ 满足 $Y^{(1)} = \frac{1}{2}[w(H) + (w(H))^{\mathrm{T}}]$(任意 $H \in \mathbf{R}^{n\times n}$), 则算法 1 可在有限步计算后得到问题 I 的唯一极小范数解, 即 LME(5) 的唯一极小范数对称解; 问题 I 不相容的充要条件是存在正整数 k, 使得由算法 1 得到的 $R_k \neq O$ 而 $Z_k = O$.

3.2 求解问题 II 的 MCG 算法

根据定理 1, 在算法 1 中, 当 $R_k \neq O$ 而 $Z_k = O$ 时, 算法 1 中断, 这表明 LME(5) 无对称解. 因此, 需要求解问题 II, 即求 LME(5) 的对称 Ls 解. 下面通过构造约束正规矩阵方程, 将求 LME(5) 的对称 Ls 解问题转化为求约束正规矩阵方程的对称解的问题. 然后参照算法 1, 建立求 LME(5) 的对称 Ls 解的 MCG 算法. 引进记号 $Q = w(F) + (w(F))^{\mathrm{T}}$, $g(Y) = w(u(Y)) + [w(u(Y^{\mathrm{T}}))]^{\mathrm{T}}$.

定理 2 求解问题 II 等价于求 LME(约束正规矩阵方程)

$$g(Y) = Q \tag{6}$$

的对称解, 并且 LME(6) 一定有对称解.

证 求解问题Ⅱ等价于求 $Y \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 使得

$$\|u(Y)-F\|^2+\|u(Y^{\mathrm{T}})-F\|^2=\min. \tag{7}$$

下面证明求解极小值问题 (7) 等价于求 LME(6) 的对称解. 令 $M=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{7}A_i\otimes B_i^{\mathrm{T}}\\ (\sum\limits_{i=1}^{7}A_i\otimes B_i^{\mathrm{T}})T_{n,n}\end{pmatrix}$, $f=\overline{\mathrm{vec}}\begin{pmatrix}F\\F\end{pmatrix}$, $y=\overline{\mathrm{vec}}(Y)$, 其中 $T_{m,n}$ 表示满足 $\overline{\mathrm{vec}}(A^{\mathrm{T}}_{m\times n})=T_{m,n}\overline{\mathrm{vec}}(A)$ 的 mn 阶置换矩阵. 将线性矩阵方程组

$$u(Y)=F,\ u(Y^{\mathrm{T}})=F \tag{8}$$

按行拉直可得线性代数方程组 $My=f$, 求它的 Ls 解等价于求线性矩阵方程组 (8) 的 Ls 解, 即求极小值问题 (7) 的解. 方程组 $My=f$ 的正规方程组为 $M^{\mathrm{T}}My=M^{\mathrm{T}}f$, 还原为矩阵形式就是 LME(6). 因为求方程组 $My=f$ 的 Ls 解, 就是求它的正规方程组 $M^{\mathrm{T}}My=M^{\mathrm{T}}f$ 的解, 即求 LME(6) 的解, 所以求解问题Ⅱ等价于求 LME(6) 的对称解.

下面证明 LME(6) 有对称解. 因为正规方程组 $M^{\mathrm{T}}My=M^{\mathrm{T}}f$ 有解, 所以 LME(6) 有解. 设 $\widetilde{Y}$ 是 LME(6) 的一个解 (未必是对称解), 那么 $g(\widetilde{Y})=Q$. 令 $\widetilde{Y}^*=\frac{1}{2}(\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^{\mathrm{T}})$, 则 $\widetilde{Y}^*\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 且有 $g(\widetilde{Y}^*)=Q$, 故 LME(6) 有对称解.

参照算法 1 以及文献 [8–9] 的算法原理, 建立求 LME(6) 的对称解, 即求解问题Ⅱ的 MCG 算法如下.

算法 2 (问题Ⅱ的 MCG 算法)

第 1 步 任意给定初始矩阵 $Y^{(1)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 置 $k:=1$, 计算 $R_k=Q-g(Y^{(k)})$, $\widetilde{R}_k=g(R_k)$, $Z_k=\widetilde{R}_k$;

第 2 步 如果 $R_k=O$, 停止计算; 否则, 计算 $Y^{(k+1)}=Y^{(k)}+\frac{\|R_k\|^2}{\|Z_k\|^2}Z_k$;

第 3 步 计算 $R_{k+1}=Q-g(Y^{(k+1)})$, $\widetilde{R}_{k+1}=g(R_{k+1})$, $Z_{k+1}=\widetilde{R}_{k+1}+\frac{\|R_{k+1}\|^2}{\|R_k\|^2}Z_k$;

第 4 步 置 $k:=k+1$, 转第 2 步.

可以验证, 算法 2 中的矩阵满足 $Y^{(k)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 且有如下的收敛定理 (证明过程类似文献 [9]).

定理 3 对任意的初始矩阵 $Y^{(1)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 算法 2 可在有限步计算后求得问题Ⅱ的一个解, 即 LME(5) 的一个对称 Ls 解; 若取初始矩阵 $Y^{(1)}$ 满足 $Y^{(1)}=g(H)$ (任意 $H\in\mathbf{SR}^{n\times n}$), 则算法 2 可在有限步计算后得到 LME(6) 的唯一极小范数对称解, 也就是 LME(5) 的唯一极小范数对称 Ls 解.

4 数值算例

求方程 (2) 的对称解, 可采用以下两种计算方案.

方案一

第 1 步 给定初始矩阵 $X^{(1)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 置 $k:=1$;

第 2 步 如果 $\psi(X^{(k)})=O$, 停止; 否则, 采用算法 1 求 $Y^{(k)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 使满足 LME(4); 若算法 1 中断 (此时 LME(4) 没有对称解), 采用算法 2 求 $Y^{(k)}\in\mathbf{SR}^{n\times n}$, 使得

$$\|\phi_{X^{(k)}}(Y^{(k)})+\psi(X^{(k)})\|=\min; \tag{9}$$

第 3 步 计算 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$, 置 $k := k+1$, 转第 2 步.

方案二

第 1 步 给定初始矩阵 $X^{(1)} \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 置 $k := 1$;

第 2 步 如果 $\psi(X^{(k)}) = O$, 停止; 否则, 采用算法 2 求 $Y^{(k)} \in \mathbf{SR}^{n\times n}$, 使满足式 (9). 当 LME(4) 有对称解时, 它的对称 Ls 解就是它的对称解;

第 3 步 计算 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$, 置 $k := k+1$, 转第 2 步.

下面的方案一 (a) 是指算法 2 的初始矩阵取零矩阵, 方案一 (b) 是指算法 2 的初始矩阵取算法 1 中断前得到的矩阵, 用 k_{12} 表示方案一中算法 1 的中断次数, k_0、k_1 及 k_2 分别表示牛顿算法、算法 1 及算法 2 的总迭代次数, t 表示计算时间, n 表示未知矩阵的阶数. 算例使用 Matlab7.0 软件 -CPU3.00GHz 微机计算, 取牛顿算法的终止准则为 10^{-7}, MCG 算法的终止准则为 10^{-8}, 没有特别约定时 MCG 算法的初始矩阵为 $Y^{(1)} = O$.

例 1 采用双迭代算法和 Li's 算法 (文献 [4] 算法) 求方程 (2) 的特例 $X^{-1} - F_3^{\mathrm{T}} X^3 F_3 = G$ 的对称解.

(1) 系数矩阵和常数项矩阵如下 (取自文献 [4]):

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & -0.06 & -0.16 \\ -0.2 & -0.3 & 0.16 & 0.33 \\ 0.1 & 0 & 0.02 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.03 \end{pmatrix},\ G = I.$$

根据文献 [4], 取初始对称矩阵为 $X^{(1)} = \frac{5}{6}I$, 迭代次数和计算时间见表 1.

表 1: 例 1 之 (1) 的计算结果对比

计算结果	k_0	k_1	k_{12}	k_2	t(s)
方案一 (a)	4	26	2	16	0.0790
方案一 (b)	4	26	2	5	0.0630
方案二	4	- - -	- - -	34	0.0940
Li's 算法	6	- - -	- - -	- - -	0.0160

由方案一和方案二求得方程 (2) 的对称解均为

$$X^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.9576 & -0.0515 & 0.0234 & 0.0477 \\ -0.0515 & 0.9070 & 0.0394 & 0.0876 \\ 0.0234 & 0.0394 & 0.9797 & -0.0458 \\ 0.0477 & 0.0876 & -0.0458 & 0.8934 \end{pmatrix},$$

由 Li's 算法求得对应的方程 (1) 的对称解 $X^{(7)}$ 就是 $(X^{(5)})^{-1}$.

(2) 系数矩阵和常数项矩阵如下: $F_3 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$, $G = \mathrm{ones}(3)$. 取初始对称矩阵为 $X^{(1)} = \frac{2}{3}I$, 迭代次数和计算时间见表 2.

表 2: 例 1 之 (2) 的计算结果对比

计算结果	k_0	k_1	k_{12}	k_2	t(s)
方案一 (a)	7	48	0	0	0.0470
方案一 (b)	7	48	0	0	0.0460
方案二	7	- - -	- - -	62	0.0780
Li's 算法			失效		

由方案一和方案二求得方程 (2) 的对称解均为 $X^{(8)}=\begin{pmatrix}1.7668 & -0.6312 & -0.6261\\ -0.6312 & 1.9587 & -0.6773\\ -0.6261 & -0.6773 & 1.1429\end{pmatrix}$, Li's 算法失效的原因是常数项矩阵不满足文献 [4] 中算法的要求.

需要指出, 双迭代算法不对方程 (2) 的系数矩阵和常数项矩阵做附加限定, 不必选取特定的初始对称矩阵, 但求出的只是方程 (2) 的对称解, 不一定具备正定性. 而 Li's 算法对方程 (2) 的常数项矩阵有要求, 选取特定的初始对称矩阵时, 可求出方程 (2) 的对称正定解.

例 2 采用两种计算方案求方程 (2) 的对称解, 其系数矩阵和常数项矩阵等如下:

$$E_1=[0.1I,I,0.1I]_{i=1}^N(\text{块三对角矩阵}),\ F_1=2I,$$
$$\widetilde{E}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \widetilde{E}_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$E_2=F_2^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\widetilde{E}_2,\cdots,\widetilde{E}_2),\ E_3=-F_3^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\widetilde{E}_3,\cdots,\widetilde{E}_3),$$
$$\widetilde{X}^{(0)}=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ U_1=\begin{pmatrix}2.1&2.9&0\\2.9&1.9&0\\0&0&1.001\end{pmatrix},\ U_2=\begin{pmatrix}-5.5&-1.4&0\\-1.4&3.9&0\\0&0&1.1\end{pmatrix}.$$

令 $X^{(0)}=\mathrm{diag}(\widetilde{X}^{(0)},\cdots,\widetilde{X}^{(0)})$, $X^{(1)}=\mathrm{diag}(\widetilde{X}^{(1)},\cdots,\widetilde{X}^{(1)})$, 构造矩阵

$$G=(X^{(0)})^{-1}+E_1X^{(0)}F_1+E_2(X^{(0)})^2F_2+E_3(X^{(0)})^3F_3,$$

那么方程 (2) 有对称解, 从而方程 (1) 有对称解, 取牛顿算法的初始矩阵为 $X^{(1)}$.

(1) 选取子矩阵 $\widetilde{X}^{(1)}=U_1$, 两种方案的迭代次数和计算时间见表 3.

表 3: 例 2 之 (1) 的计算结果对比

n	方案一 (a)					方案一 (b)					方案二		
	k_0	k_1	k_{12}	k_2	t(s)	k_0	k_1	k_{12}	k_2	t(s)	k_0	k_2	t(s)
6	3	61	0	0	0.0320	3	61	0	0	0.0320	3	189	0.1560
15	3	299	1	1498	2.3130	3	307	1	61	0.2810	3	3858	5.6250
30	3	620	1	3951	12.828	3	610	1	31	0.6560	3	12234	38.141
45	3	825	0	0	2.2190	3	825	0	0	2.1410	3	16587	162.59
60	3	979	0	0	4.8280	3	979	0	0	4.8600	3	17779	313.19

两种方案求出方程 (2) 的对称解均为已知的 $X^{(0)}$, 对应方程 (1) 的对称解为 $(X^{(0)})^{-1}$.

(2) 选取子矩阵 $\widetilde{X}^{(1)}=U_2$, 两种方案的迭代次数和计算时间见表 4.

表 4: 例 2 之 (2) 的计算结果对比

n	方案一 (a)					方案一 (b)					方案二		
	k_0	k_1	k_{12}	k_2	t(s)	k_0	k_1	k_{12}	k_2	t(s)	k_0	k_2	t(s)
6	4	78	0	0	0.0470	4	78	0	0	0.0470	4	213	0.1880
15	4	513	0	0	0.2340	4	513	0	0	0.2500	4	5695	8.4850
30	4	1280	0	0	1.2190	4	1280	0	0	1.2180	4	24687	78.843
45	4	1821	0	0	4.9370	4	1821	0	0	4.9360	4	46901	485.08
60	4	2087	0	0	10.828	4	2087	0	0	10.562	4	64631	1120.4

两种方案求出方程 (2) 的对称解 (未知矩阵阶数 $n=6$ 的情形) 均为

$$X^{(5)}=\begin{pmatrix} -5.4954 & -1.4355 & 0 & 0.2040 & -0.2267 & 0 \\ -1.4355 & 3.9464 & 0 & -0.2267 & -0.0917 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2040 & -0.2267 & 0 & -5.4954 & -1.4355 & 0 \\ -0.2267 & -0.0917 & 0 & -1.4355 & 3.9464 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对应方程 (1) 的对称解为 $(X^{(5)})^{-1}$. 对比 (1) 中的计算结果可见, 当牛顿算法的初始矩阵不同时, 求得方程 (2) 的对称解也不同 (比较 (1) 中的 $X^{(0)}$ 与 (2) 中的 $X^{(5)}$), 这说明方程 (2) 的对称解不唯一, 从而方程 (1) 的对称解不唯一.

多个算例的计算结果表明当某一步的 LME(4) 有对称解时, 方案一一般比方案二的效率高, 其原因是当 LME(4) 有对称解时, 方案二总是采用求 LME(4) 的对称 Ls 解的算法 2 进行计算, 而算法 2 比算法 1 的计算耗时多.

5 结论

作变量替换可将方程 (1) 转化为方程 (2), 运用牛顿算法求方程 (2) 的对称解, 并采用 MCG 算法求由牛顿算法每一步迭代计算导出的 LME 的对称解或者对称最小二乘解, 建立了求方程 (2) 的对称解的双迭代算法, 算例表明双迭代算法是有效的. 通过修改牛顿算法、算法 1 和算法 2 中初始矩阵的类型, 以及算法 1 中 Z_1 与 Z_{k+1} 的计算公式和算法 2 中涉及的 LME(6) 的构造方式, 可以建立求方程 (2) 的其它特殊解的双迭代算法. 需要指出, 本文建立的双迭代算法求出的只是方程 (2) 的一个对称解, 不一定具备正定性, 如何修改算法使求出的对称解具备正定性, 尚需进一步探讨.

参 考 文 献

[1] 陈小山, 黎稳. 关于矩阵方程 $X+A^{\mathrm{H}}X^{-1}A=P$ 的解及其扰动分析 [J]. 计算数学, 2005, 27(3): 303–310.

[2] Zhao Wenling, Li Hongkui, Liu Xueting, Xu Fuyi. Necessary and sufficient conditions for the existence of a Hermitian positive definite solution of a type of nonlinear matrix equations [J]. Math. Prob. Engin., 2009 (Article ID 672695): 1–13.

[3] Peng Zhenyun, El-sayed Salah M, Zhang Xianglin. Iterative methods for the extremal positive definite solution of the matrix equation $X + A^{\mathrm{H}}X^{-\alpha}A = Q$[J]. J. Comput. Appl. Math., 2007, 200(2): 520–527.

[4] 李静, 张玉海. 矩阵方程 $X - A^{\mathrm{H}}X^{-q}A = Q$ 当 $q > 1$ 时的 Hermite 正定解 [J]. 工程数学学报, 2005, 22(4): 679–686.

[5] 李静, 张玉海. 矩阵方程 $X - A^{\mathrm{H}}X^{-1}A = Q$ 的 Hermite 正定解及其扰动分析 [J]. 计算数学, 2008, 30(2): 129–142.

[6] Ran AndréC M, Reurings Martine C B. On the nonlinear matrix equation $X + A^{\mathrm{H}}f(X)A = Q$: solutions and perturbation theory [J]. Linear Alg. Appl., 2002, 346(1): 15–26.

[7] Long Jianhui, Hu Xiyan, Zhang Lei. Improved Newton's method with exact line searches to solve quadratic matrix equation [J]. J. Comput. Appl. Math., 2008, 222(2): 645–654.

[8] 李书连, 张凯院, 刘晓敏. 一类矩阵方程异类约束解与 Ls 解的迭代算法 [J]. 高校应用数学学报, 2012, 27(3): 313–324.

[9] 刘晓敏, 张凯院. 双变量 LMEs 一种异类约束最小二乘解的 MCG 算法 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(5): 938–948.

DOUBLE ITERATIVE ALGORITHM FOR SYMMETRIC SOLUTION OF MATRIX EQUATION WITH HIGH ORDER INVERSE-POWER

ZHANG Xiao-xiao, ZHANG Kai-yuan, SONG Wei-hong

(*Dept. of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

Abstract: A new iterative algorithm is proposed to get the symmetric solution of equivalent matrix equation transformed from the matrix equation with high order inverse-power which is common in many fields such as control theory and stochastic filtering. By using Newton's method, we obtain symmetric solution of the above equivalent matrix equation, and with modified conjugate gradient method, we get symmetric solution or symmetric least square solution of linear matrix equation derived from each iterative step of Newton's method. A double iterative algorithm is proposed to solve the symmetric solution of this kind of matrix equation, and numerical experiments demonstrate the effectiveness of proposed double iterative method.

Keywords: matrix equation with high order inverse-power; symmetric solution; Newton's method; modified conjugate gradient method; double iterative algorithm

2010 MR Subject Classification: 65F10