

一类具有时滞的比率依赖捕食者—食饵模型的全局 Hopf 分支

赵汇涛

(周口师范学院数学与信息科学系, 河南 周口 466001)

摘要: 本文研究了一类比率依赖的捕食者—食饵模型的 Hopf 分支问题, 运用吴建宏等人利用等变拓扑度理论建立起的一般泛函微分方程的全局分支理论, 得到了由系统的正平衡点分支出来的周期解的全局存在性, 最后利用数值模拟验证了理论分析的正确性.

关键词: 比率依赖; 捕食者—食饵模型; 稳定性; 全局 Hopf 分支

MR(2010) 主题分类号: 34K18; 34K20; 34K60 中图分类号: O175.15

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2016)01-0191-08

1 引言

本文的主要目的是研究以下捕食者—食饵模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t) - \frac{a_{12}x(t)y(t)}{my^2(t)+x^2(t)}], \\ \dot{y}(t) = \frac{a_{21}x^2(t-\tau)y(t-\tau)}{my^2(t-\tau)+x^2(t-\tau)} - r_2y(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别表示食饵与捕食者在 t 时刻的数量或密度. $r_1, r_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}$ 与 m 都是正常数, 其中 r_1 为食饵的内禀生长率, a_{11} 表示食饵的种内竞争率, a_{12} 表示捕食者的捕食效率, a_{21}/a_{12} 表示捕食者对食饵的转化率, m 为捕食者的干扰系数, r_2 为捕食者的自然死亡率. $\tau_1 \geq 0$ 表示捕食者的哺乳期, $\tau_2 \geq 0$ 捕食者捕食的时间.

系统 (1.1) 称为比率依赖的捕食者—食饵模型. 意味着其功能反应函数不仅依赖食饵的密度, 还依赖于捕食者的密度, 特别是当捕食者需要去寻找食物时, 这种功能反应函数即所谓比率依赖的 (更详细的描述见文献 [1]). 在系统 (1.1) 中, 比率依赖的功能反应函数为下面的形式 $g(x/y) = c(x/y)^2/(m + (x/y)^2) = cx^2/(my^2 + x^2)$. 假设系统 (1.1) 满足以下初始条件:

$$x(\theta) = \phi(\theta), y(\theta) = \psi(\theta), \phi(\theta) \geq 0, \psi(\theta) \geq 0, \theta \in [-\tau, 0], \phi(0) > 0, \psi(0) > 0, \quad (1.2)$$

其中 $(\phi(\theta), \psi(\theta)) \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbf{R}_{+0}^2)$, $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbf{R}_{+0}^2)$ 为区间 $[-\tau, 0]$ 到 \mathbf{R}_{+0}^2 上的连续函数构成的 Banach 空间, 其中 $\mathbf{R}_{+0}^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$.

在文献 [2] 中, Xu 等人研究了系统 (1.1) 的正则性、有界性、正平衡点的全局吸引力以及在正平衡点处产生 Hopf 分支的条件, 并且利用规范型与中心流形理论得到了判断由正平衡点处分支出的周期解性质的判定公式. 而关于系统全局 Hopf 分支的结果在文献 [2] 中并没有涉及. 我们知道从局部 Hopf 分支得到的周期解只在分支值的小邻域内存在, 那么大范围系统是否有周期解, 不仅是一个很有意义的理论课题, 而且也有重要的实际意义. 近来有很多关

*收稿日期: 2013-09-05 接收日期: 2014-04-21

基金项目: 河南省教育厅资助项目 (13A110108); 河南省科技厅资助项目 (122300410417).

作者简介: 赵汇涛 (1977-), 男, 河南周口, 讲师, 主要研究方向: 动力系统分支与混沌.

于全局分支的文献 [3–9], 其中在文献 [7] 中由 Erbe 等人利用等变拓扑度理论建立了时滞微分方程全局 Hopf 分支定理, 在文献 [8] 中, Wen 等人利用这一理论讨论了食饵 - 捕食者模型中全局 Hopf 分支周期解的存在性. Wu 在文献 [9] 中对带有多个参数的时滞微分方程的全局 Hopf 分支定理做了很好的总结, 详细地分析了用度理论研究时滞微分方程的分支问题, 且使得这一理论更便于应用. 在文献 [2, 8, 9] 的启发下, 本文利用 Wu 在文献 [9] 中所述的关于泛函微分方程的全局 Hopf 分支理论来研究系统 (1.1) 的全局 Hopf 分支的存在性, 并在最后给出数值模拟结果来验证我们理论分析的正确性.

由泛函微分方程的基础理论 [10] 可知系统 (1.1) 的满足初始条件 (1.2) 的解是唯一的.

2 正平衡点的稳定性与 Hopf 分支

由文献 [2] 可知系统 (1.1) 总存在一个半平凡平衡点 $E_1(\frac{r_1}{a_{11}}, 0)$. 假设条件:

(H1) $r_1^2 a_{21}^2 m > a_{12}^2 r_2 (a_{21} - r_2) > 0$ 成立,

则系统 (1.1) 存在一个唯一的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 其中

$$x^* = \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{12} h}{a_{11} a_{21}}, \quad y^* = h x^*,$$

其中

$$h = \sqrt{\frac{a_{21} - r_2}{m r_2}}. \quad (2.1)$$

令

$$p_0 = r_2 \left(r_1 - \frac{2a_{12} r_2^2 h}{a_{21}^2} \right), \quad p_1 = r_1 + r_2 - \frac{2a_{12} r_2^2 h}{a_{21}^2},$$

$$q_0 = r_2 (a_{21} - 2r_2) \left(r_1 - \frac{2a_{12} r_2 h}{a_{21}} \right) / a_{21}, \quad q_1 = r_2 (a_{21} - 2r_2) / a_{21},$$

其中常数 h 由 (2.1) 式确定. 若条件 (H1) 成立且 $p_0 < q_0$, 则系统 (1.1) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 处的特征方程有一对纯虚根 $\pm i\omega_0$, 其中

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \{ q_1^2 + 2p_0 - p_1^2 + [(q_1^2 + 2p_0 - p_1^2)^2 - 4(p_0^2 - q_0^2)]^{1/2} \}.$$

进一步可得到

$$\tau_n = \tau_{0n} = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{q_0(\omega_0^2 - p_0) - p_1 q_1 \omega_0^2}{q_0^2 + q_1^2 \omega_0^2} + \frac{2n\pi}{\omega_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

由文献 [2] 可知, 若条件 (H1) 成立且 $p_0 < q_0$, 则横截条件 $\frac{d(\operatorname{Re}\lambda)}{d\tau}|_{\tau=\tau_{0n}} > 0$ 成立. 进而有如下定理:

定理 2.1 设条件 (H1) 成立, 且 h 如 (2.1) 所定义. 则对系统 (1.1) 有

(i) 若 $r_1 a_{21}^2 > 2r_2 [a_{12} r_2 h - a_{21} (a_{21} - 2r_2)]$ 且 $r_1 a_{21} + a_{12} h (a_{21} - 3r_2) > 0$, 则当 $\tau \geq 0$ 时, 系统 (1.1) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的;

(ii) 若 $r_1 a_{21}^2 > 2r_2 [a_{12} r_2 h - a_{21} (a_{21} - 2r_2)]$ 且 $r_1 a_{21} + a_{12} h (a_{21} - 3r_2) < 0$, 则存在 $\tau_0 > 0$, 使得当 $0 < \tau < \tau_0$ 时, 系统 (1.1) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的, 当 $\tau > \tau_0$ 时, 正

平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是不稳定的, 进一步当 $\tau = \tau_0$ 时, 在正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 处经历 Hopf 分支.

3 全局 Hopf 分支的存在性

本节讨论由正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 分支出的 Hopf 分支的全局存在性, 为叙述的方便沿用文献 [9] 中的记号. 令 $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T = (x(t), y(t))^T$, 则系统 (1.1) 可改写为以下 FDE:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{F}(z_t, \tau, p), \quad (3.1)$$

其中 $z_t(\theta) = (z_{1t}(\theta), z_{2t}(\theta))^T = (z_1(t + \theta), z_2(t + \theta))^T \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbf{R}^2)$. 易见若条件 (H1) 成立, 则系统 (4.1) 有一个边界平衡点 $E_1(\frac{r_1}{a_{11}}, 0)$ 和一个正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$. 定义

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbf{R}^2), \\ \Gamma &= \text{Cl} \{ (z, \tau, p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+; z \text{ 为系统 (3.1) 的 } p\text{-周期解} \}, \\ \mathcal{N} &= \{ (\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p}); \mathcal{F}(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p}) = 0 \}. \end{aligned}$$

设 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 为 Γ 中经过点 $(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 的连通分支, 其中 τ_j 由 (2.2) 式所定义. 由定理 2.1 可知 $\ell_{(E^*, \tau_{0j}, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 是非空的.

首先我们引入文献 [9] 中有关泛函微分方程的全局 Hopf 分支定理:

引理 3.1 设 (z_*, τ, p) 为孤立的中心且满足文献 [9] 中的条件 $(A_1) - (A_4)$. 记 $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 为 Γ 中经过点 (z_*, τ, p) 的连通分支. 则或者

- (i) $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 是无界的, 或者
- (ii) $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 是有界的, $\ell_{(z_*, \tau, p)} \cap \Gamma$ 是有限的且对所有的 $m = 1, 2, \dots$,

$$\sum_{(z, \tau, p) \in \ell_{(z_*, \tau, p)} \cap \mathcal{N}} \gamma_m(z_*, \tau, p) = 0,$$

其中 $\gamma_m(z_*, \tau, p)$ 为 (z_*, τ, p) 的 m 阶横截数, 或者对所有 $m \in J(z_*, \tau, p)$, $\gamma_m(z_*, \tau, p) = 0$.

显然, 若引理 2.1 中的结论 (ii) 不成立, 则 $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 是无界的. 因此若 $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 到 z -空间与到 p -空间的投影有界, 则到 τ -空间上的投影必定是无界的. 进一步, 如果能够证明 $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 到 τ -空间的投影是远离 0 的, $\ell_{(z_*, \tau, p)}$ 到 τ -空间的投影必定包含在某个区间 $[\tau, +\infty)$ 中. 基于这种思想, 能够证明全局 Hopf 分支的存在性.

引理 3.2 若条件 (H1) 成立, 则系统 (1.1) 满足初始条件 (1.2) 的非常数周期解一致有界.

证 设 $x = x(t), y = y(t)$ 为系统 (1.1) 的任意非常数周期解, 并定义

$$\begin{aligned} x(\xi_1) &= \min\{x(t)\}, & x(\eta_1) &= \max\{x(t)\}, \\ y(\xi_2) &= \min\{y(t)\}, & y(\eta_2) &= \max\{y(t)\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

由系统 (1.1) 可知

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(r_1 - a_{11}x(s) - \frac{a_{12}x(s)y(s)}{my^2(s) + x^2(s)} \right) ds \right\}, \\ y(t) &= y(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(-r_2 + \frac{a_{21}x^2(s-\tau)y(s-\tau)}{[my^2(s-\tau) + x^2(s-\tau)]y(s)} \right) ds \right\}. \end{aligned}$$

这说明系统 (1.1) 的解不能穿过 x 轴与 y 轴. 则系统 (1.1) 的周期解必定局限于每个象限中. 则由系统 (1.1) 的初始条件可知 $x(t) > 0, y(t) > 0$ 且有

$$0 = r_1 - a_{11}x(\eta_1) - \frac{a_{12}x(\eta_1)y(\eta_1)}{my^2(\eta_1) + x^2(\eta_1)}, \quad (3.3)$$

由于 $x(t) > 0, y(t) > 0$, 由 (3.3) 式可得

$$0 < x(\eta_1) \leq \frac{r_1}{a_{11}}. \quad (3.4)$$

由系统 (1.1) 的第二式可得

$$0 = \frac{a_{21}x^2(\eta_2 - \tau)y(\eta_2 - \tau)}{my^2(\eta_2 - \tau) + x^2(\eta_2 - \tau)} - r_2y(\eta_2). \quad (3.5)$$

由 (3.2) 与 (3.4) 式可知

$$\frac{a_{21}\left(\frac{r_1}{a_{11}}\right)^2y(\eta_2 - \tau)}{my^2(\eta_2 - \tau) + \left(\frac{r_1}{a_{11}}\right)^2} \geq r_2y(\eta_2).$$

又 $my^2(\eta_2 - \tau) + \left(\frac{r_1}{a_{11}}\right)^2 \geq 2\sqrt{m}\frac{r_1}{a_{11}}y(\eta_2 - \tau)$, 从而可得

$$y(\eta_2) \leq \frac{r_1a_{21}}{2r_2a_{11}\sqrt{m}}.$$

证毕.

引理 3.3 若条件 (H1) 与条件 (H2)

$$(H2) \quad r_1 > \max \left\{ \frac{a_{12}}{2\sqrt{m}}, \frac{3a_{12}}{m} + \frac{2a_{12}r_2}{a_{21}}h \right\}$$

成立, 则系统 (1.1) 没有 τ -周期解.

证 利用反证法. 假设系统 (1.1) 具有 τ -周期解. 则下面的常微分方程 (3.6) 具有非常数的周期解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\left[r_1 - a_{11}x(t) - \frac{a_{12}x(t)y(t)}{my^2(t) + x^2(t)}\right], \\ \dot{y}(t) = \frac{a_{21}x^2(t)y(t)}{my^2(t) + x^2(t)} - r_2y(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

且系统 (3.6) 具有与系统 (1.1) 相同的平衡点 $E_1\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$ 与 $E^*(x^*, y^*)$. 注意到 x 轴与 y 都是系统 (3.6) 的不变流形且互不相交. 因此系统 (3.6) 的解不能穿过坐标轴. 另一方面, 注意到系统 (3.6) 若有周期解, 则在它的内部必包含有平衡点, 而且 E_1 在坐标轴上, 则系统 (3.6) 的周期轨必须包含在第一象限内, 那么周期轨的内部只能包含正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 而由文献 [2] 可知, 当条件 (H1) 与 (H2) 成立时, 正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是渐近稳定的且是全局吸引的, 这与假设相矛盾. 故假设不成立. 证毕.

定理 3.1 设条件 (H1) 与条件 (H2) 成立, 且 τ_j 与 ω_0 如第二节中所定义. 若 $r_1a_{21}^2 > 2r_2[a_{12}r_2h - a_{21}(a_{21} - 2r_2)]$ 且 $r_1a_{21} + a_{12}h(a_{21} - 3r_2) < 0$, 则系统 (1.1) 至少有 $j + 1$ 个周期解.

证 方程 (3.1) 在平衡点 $\bar{z} = (\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}) \in \mathbf{R}^2$ 处的特征方程为

$$\Delta(\bar{z}, \tau, p)(\lambda) = \lambda Id - D\mathcal{F}(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p})(e^\lambda Id), \quad (3.7)$$

称 $(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p})$ 为中心, 若其满足 $\mathcal{F}(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p}) = 0$ 与 $\det(\Delta(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p})(\frac{2\pi}{p}i)) = 0$. 若中心 $(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p})$ 在它的某个邻域内是唯一的中心, 我们称 $(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p})$ 为孤立的中心. 由 (6.7) 式可得

$$\det(\Delta(E_1, \tau, p)(\lambda)) = (\lambda + r_1)(\lambda + r_2 - a_{21}e^{-\lambda\tau}) = 0 \quad (3.8)$$

与

$$\det(\Delta(E^*, \tau, p)(\lambda)) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + (q_1\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.9)$$

其中 p_0, p_1, p_2 如第二节中定义. 显然当 $r_1a_{21} + a_{12}h(a_{21} - 3r_2) > 0$ 成立时, 方程 (3.8) 与 (3.9) 没有纯虚根. 因此可知系统 (3.1) 没有形如 (E_1, τ, p) 与 (E^*, τ, p) 的中心. 另一方面, 由第二节的结论可知, $(E_*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 为孤立的中心, 且存在 $\epsilon > 0, \delta > 0$ 与一条光滑曲线 $\lambda: (\tau_j - \delta, \tau_j + \delta) \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $\det(\Delta(\lambda(\tau))) = 0, |\lambda(\tau) - \omega_0| < \epsilon$ 对所有 $\tau \in [\tau_j - \delta, \tau_j + \delta]$ 成立, 而且

$$\lambda(\tau_j) = \omega_0 i, \quad \frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_j} > 0.$$

令

$$\Omega_{\epsilon, \frac{2\pi}{\omega_0}} = \left\{ (\eta, p); 0 < \eta < \epsilon, |p - \frac{2\pi}{\omega_0}| < \epsilon \right\}.$$

易知在 $[\tau_j - \delta, \tau_j + \delta] \times \partial\Omega_{\epsilon, \frac{2\pi}{\omega_0}}$ 上,

$$\det(\Delta(E^*, \tau, p)(\eta + \frac{2\pi}{p}i)) = 0 \quad \text{当且仅当} \quad \eta = 0, \tau = \tau_j, p = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

因此文献 [9] 中的条件 $(A_1) - (A_4)$ 满足. 定义

$$H^\pm(E_*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})(\eta, p) = \det(\Delta(E_*, \tau_j \pm \delta, p)(\eta + \frac{2\pi}{p}i)),$$

则孤立中心 $(E_*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 的横截数为

$$\gamma(E_*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0}) = \deg_B \left(H^-(E_*, \tau_{0j}, \frac{2\pi}{\omega_0}), \Omega_{\epsilon, \frac{2\pi}{\omega_0}} \right) - \deg_B \left(H^+(E_*, \tau_{0j}, \frac{2\pi}{\omega_0}), \Omega_{\epsilon, \frac{2\pi}{\omega_0}} \right) = -1.$$

从而有

$$\sum_{(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p}) \in \mathcal{C}_{(E_*, \tau_{0j}, \frac{2\pi}{\omega_0})}} \gamma(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p}) < 0,$$

其中 $(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{p})$ 可能形如 $(E_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0})(k = 0, 1, \dots)$. 由引理 3.1, $\ell_{(E_*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 经过点 $(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 的连通分支是无界的. 由 (2.2) 式可知, 若 (H1) 成立, 对于 $j \geq 1$,

$$\tau_j = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{\omega_0^2 - p_1}{p_2} + \frac{2j\pi}{\omega_0} \geq \frac{2\pi}{\omega_0},$$

则

$$\frac{2\pi}{\omega_0} < \tau_j.$$

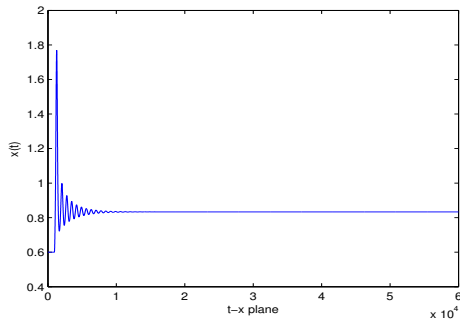


图 1: $x(t)$ 在 $\tau = 9$ 时的轨线

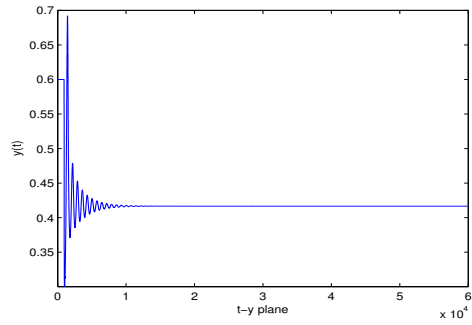


图 2: $y(t)$ 在 $\tau = 9$ 时的轨线

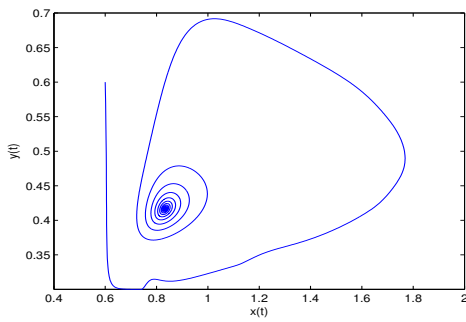


图 3: 系统 (1.1) 在 $\tau = 9$ 时的相图

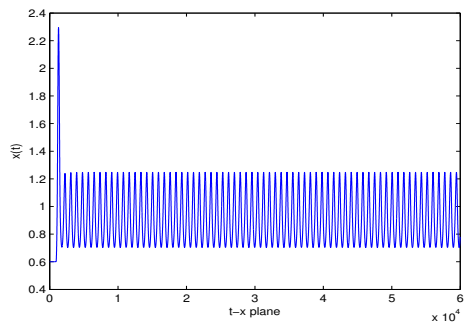


图 4: $x(t)$ 在 $\tau = 12$ 时的轨线

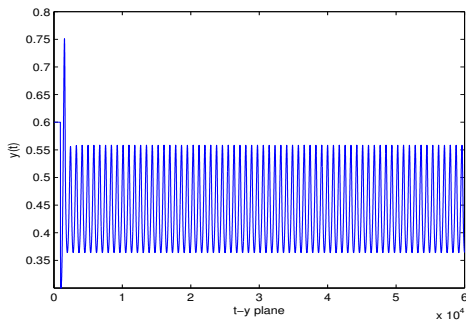


图 5: $y(t)$ 在 $\tau = 12$ 时的轨线

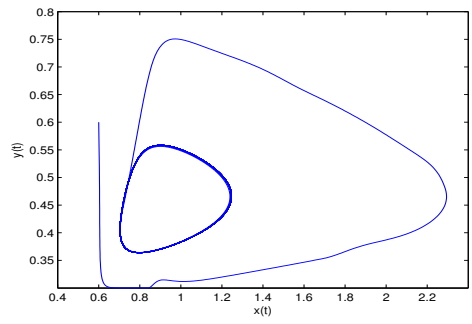


图 6: 系统 (1.1) 在 $\tau = 12$ 时的相图

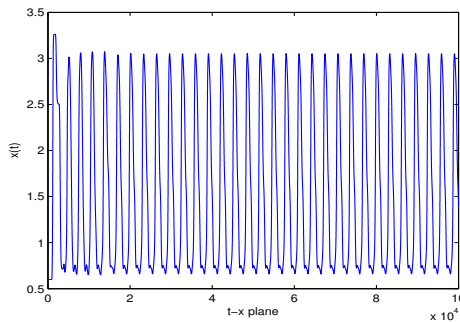


图 7: 系 $x(t)$ 在 $\tau = 90$ 时的轨线

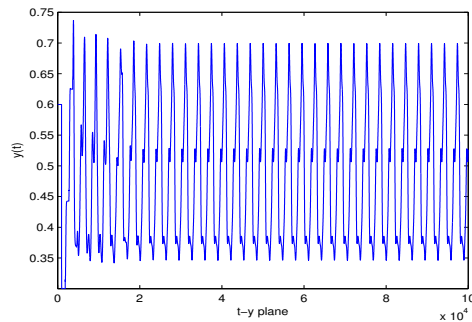
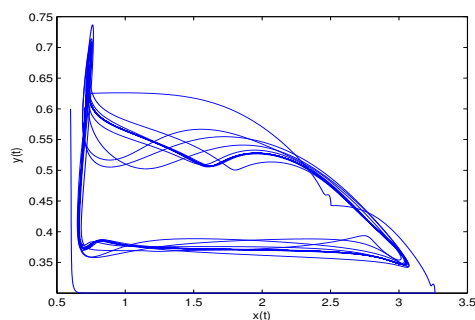


图 8: $y(t)$ 在 $\tau = 90$ 时的轨线

图 9: 系统 (1.1) 在 $\tau = 90$ 时的相图

下面证明 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 到 τ -空间的投影为 $[\bar{\tau}, +\infty)$, 其中 $\bar{\tau} \leq \tau_j$. 由引理 3.3 的证明可知系统 (1.1) 在 $\tau = 0$ 时没有非平凡的周期解, 因此 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 到 τ -空间的投影是远离 0 的.

如果假设 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 到 τ -空间的投影是有界的, 这意味着 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 到 τ -空间的投影包含在某个区间 $(0, \tau^*)$ 中. 注意到 $\frac{2\pi}{\omega_0} < \tau_j$, 由引理 3.3 可知, 当 $(z(t), \tau, p) \in \ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 时, 有 $p < \tau^*$. 这说明 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 到 p -空间的投影是有界的. 这与 $\ell_{(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})}$ 经过点 $(E^*, \tau_j, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 连通分支是无界的相矛盾, 故假设不成立. 证毕.

3 数值模拟

在系统 (1.1) 中, 我们选取与文献 [2] 中相同的参数, 取 $r_1 = \frac{5}{12}, r_2 = 1, a_{11} = 0.1, a_{12} = 1, a_{21} = \frac{3}{2}, m = 2$, 由文献 [2] 可知此时系统 (1.1) 有唯一的正平衡点 $E^*(\frac{5}{6}, \frac{5}{12})$, 且 $\tau_0 \approx 10.1776$, 进一步计算可得 $\tau_1 \approx 85.7875$. 由 Matlab 7.10, 我们做出 $\tau = 9, \tau = 12, \tau = 90$ 时的轨线与相图. 由图 1-3 可以看出, 系统的正平衡点 $E^*(\frac{5}{6}, \frac{5}{12})$ 在 $\tau = 9$ 时仍然是稳定的; 由图 4-6 可以看出, 系统的正平衡点 $E^*(\frac{5}{6}, \frac{5}{12})$ 在 $\tau = 12$ 时是不稳定的, 且有周期解由 $E^*(\frac{5}{6}, \frac{5}{12})$ 处分支出; 由图 7-9 可以看出, $\tau = 90$ 时, 仍有周期解由 $E^*(\frac{5}{6}, \frac{5}{12})$ 处分支出, 说明当 $\tau > \tau_1$ 时, 仍然存在由 $E^*(\frac{5}{6}, \frac{5}{12})$ 分支出的周期解, 这也验证了我们的结论.

参 考 文 献

- [1] Arditi R, Ginzburg L R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence[J]. J. Theo. Biology, 1989, 139(3): 311-326.
- [2] Xu R, Gan Q, Ma Z. Stability and bifurcation analysis on a ratio-dependent predator-prey model with time delay[J]. J. Comput. Appl. Math., 2009, 230(1): 187-203.
- [3] Sun C, Han M. Global Hopf bifurcation analysis on a BAM neural network with delays[J]. Math. Comput. Model., 2007, 45(1-2): 61-67.
- [4] Meng X, Huo H, Zhang X. Stability and global Hopf bifurcation in a delayed food web consisting of a prey and two predators[J]. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 2011, 16(11): 4335-4348.
- [5] Kuang Y, Beretta E. Global qualitative analysis of ratio-dependent predator-prey system[J]. J. Math. Biology, 1998, 36(4): 389-406.
- [6] Song Y, Wei J. Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 301(1): 1-21.

- [7] Erbe L H, Krawcewicz W, Geba K, Wu Jianhong. S^1 -degree and global Hopf bifurcation theory of functional-differential equations[J]. J. Diff. Equ., 1992, 89(2): 277–298.
- [8] Wen X, Wang Z. The existence of periodic solutions for some models with delay[J]. Nonlinear Analysis: Real World Appl., 2002, 3(4): 567–581.
- [9] Wu Jianhong. Symmetric functional differential equations and neural networks with memory[J]. Trans. American Math. Soc., 1998, 350: 4799–4838.
- [10] Hale J, Lunel S. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

GLOBAL HOPF BIFURCATION OF A RATIO-DEPENDENT PREDATOR-PREY MODEL WITH TIME DELAY

ZHAO Hui-tao

(*Department of Math. and Information Science, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466001, China*)

Abstract: This paper is concerned with a ratio-dependent predator-prey model with time delay. By using a global Hopf bifurcation result of general functional differential equations due to Wu Jianhong etc., the global existence results of periodic solutions bifurcating from Hopf bifurcations are established. Finally, numerical simulations are also included to support the theoretic analysis.

Keywords: ratio-dependent; predator-prey model; stability; global Hopf bifurcation

2010 MR Subject Classification: 34K18; 34K20; 34K60