Vol. 36 (2016)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Fisher-Z 分布次序统计量的普通多元随机序

方龙祥, 唐 维
(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241002)

摘 要: 本文研究了 Fisher-Z 分布次序统计量的随机比较问题. 利用 Beta 随机变量的性质以及比例风险率模型的次序统计量随机比较的结论, 获得了 Fisher-Z 分布次序统计量向量的普通多元随机序的比较, 推广了文献中的相关结果.

关 键 词: 普通多元随机序; 次序统计量; 比例风险率模型; Beta 分布; Fisher-Z 分布
MR(2010) **主题分类号**: 60E15; 62N05 **中图分类号**: O212.4
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)01-0171-06

1 引言

次序统计量被广泛应用在统计推断、可靠性理论、生命试验、应用概率等其他领域. 在可靠性理论中, n 中取 k 系统是一种非常常见的纠错系统. 一个 n 中取 k 系统正常工作当且仅当系统中至少有 k 个元件正常工作, 或者等价地说, 一个 n 中取 k 系统正常工作当且仅当系统中至多有 $n-k$ 个元件失效. 一个 n 中取 k 系统的寿命就是这 n 个随机变量中的第 $(n-k+1)$ 个次序统计量. 特别地, 并联系统就是 n 中取 1 系统, 串联系统就是 n 中取 n 系统. 因此, 对并联系统寿命和串联系统寿命的研究就分别等价于是对极大次序统计量和极小次序统计量的研究. 对次序统计量的研究文献很多, 有兴趣的读者可以参阅 Balakrishnan 等 [1], Balakrishnan 和 Zhao [2] 和 Balakrishnan 和 Rao [3,4] 等.

众所周知, 可靠性理论里有很多重要的模型, 如威布尔分布模型 [11] 和比例风险率模型 (proportional hazard rates, 简称 PH). 设一个系统由 n 个元件构成, 其寿命分别为 $X_1,\cdots,X_n$ 且对应的分布函数为 $F_1,\cdots,F_n$. 且设某个随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 对应的密度函数和生存函数分别为 $f(x)$ 和 $\overline{F}(x)$. 若存在正常数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 使得

$$\overline{F}_i(x)=[\overline{F}(x)]^{\lambda_i}, i=1,\cdots,n \tag{1.1}$$

都成立, 则称随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 来自于比例风险率模型. 在此情形下, $r(x)=\frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ 是基本函数的风险率函数, 则 X_i 的风险率是 $\lambda_i r(x), i=1,\cdots,n$. 故 (1.1) 式可以表示为

$$\overline{F}_i(x)=e^{-\lambda_i R(x)}, i=1,\cdots,n,$$

*收稿日期: 2014-05-27 接收日期: 2014-12-18
基金项目:国家自然科学基金资助 (11201003); 全国统计科学研究计划项目 (2012LY158); 安徽省自然科学基金面上项目 (1408085MA07); 安徽高校省级重点科学研究项目 (KJ2013A137); 安徽师范大学博士科研启动基金项目 (2014bsqdjj34).
作者简介: 方龙祥 (1978–), 男, 安徽枞阳, 副教授, 主要研究方向: 随机序及其应用.

其中 $R(x)=\int_0^x r(t)dt$ 是随机变量 X 的累积风险率. 具有风险率 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的指数随机变量是特殊的 PH 模型, 其 $R(x)=x$; Pledger 和 Proschan [5] 已经证明了若随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 分别具有风险率 $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 和 $(\nu_1,\cdots,\nu_n)$, 则由

$$(\mu_1,\cdots,\mu_n)\succeq_m(\nu_1,\cdots,\nu_n)$$

可得 $X_{i:n}\geq_{st}Y_{i:n}, i=1,\cdots,n$; 随后, Proschan 和 Sethuraman [6] 把上述的结果由单个的随机比较推广到了向量的多元普通序比较, 即 $(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\geq_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n})$ 成立.

在文献 Balakrishnan 等 [7] 中研究了两个 Beta 随机变量的普通多元随机序比较. 设

$$X_i\sim \mathrm{Beta}(\alpha_i,1), Y_i\sim\mathrm{Beta}(\gamma_i,1), i=1,2$$

都是独立的随机变量, 则由

$$(\alpha_1,\alpha_2)\succeq_m(\gamma_1,\gamma_2)$$

可得 $(Y_{1:2},Y_{2:2})\geq_{st}(X_{1:2},X_{2:2})$ 成立. 本文利用 Beta 随机变量的性质, 结合 Proschan 和 Sethuraman [6] 中 PH 模型随机比较的结论来研究 Fisher-Z 分布的普通多元随机序.

一个随机变量 X 的概率密度函数可以表示为

$$f(x;a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}},\quad x>0,$$

则称随机变量 X 服从 Fisher-Z 分布, 简称 Z 分布, 记为 $Z(a,b)$, 其中 a 与 b 是两个正参数, Z 分布族记为 $\{Z(a,b):a>0,b>0\}$.

在本文中, 我们研究了 Z 分布次序统计量向量的随机比较的一些新结果. 具体地, 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组相互独立的随机变量, $Y_1,\cdots,Y_n$ 是另一组相互独立的随机变量. 首先, 若 $X_i\sim Z(\beta_i,1)$, $Y_i\sim Z(\gamma_i,1)$, $i=1,\cdots,n$, 证明了

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n})\geq_{st}(X_{1:n},\cdots,X_{n:n}).$$

其次, 若 $X_i\sim Z(1,\beta_i)$, $Y_i\sim Z(1,\gamma_i)$, $i=1,\cdots,n$, 得出

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\geq_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n}).$$

2 准备知识: 定义与引理

本节中我们首先给出本文中所需要的普通多元随机序以及优化序 (majorization) 的定义, 然后给出证明主要结论所需要的五个引理.

定义 2.1 令 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $\mathbf{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 为两个随机向量, 如果对所有的单调递增函数 $\phi:\Re^n\to\Re$, 都有 $E[\phi(\mathbf{X})]\geq E[\phi(\mathbf{Y})]$ 成立. 则称 $\mathbf{X}$ 在普通多元随机序意义下大于 $\mathbf{Y}$, 记作 $\mathbf{X}\geq_{st}\mathbf{Y}$.

在数学和统计的不同研究领域, 优化序是一个很有意义的研究课题. 优化序是非增加顺序重排向量中元素以后的一种偏序. 优化序的理论研究起源于 Schur [8] 和 Hardy 等 [9]. 优化序与组合数学、分析不等式、数值分析、矩阵理论、概率和统计等联系密切.

定义 2.2 设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $\boldsymbol{\lambda}^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*)$ 表示两个 n 维正向量, 令

$$\lambda_{(1)}\le\lambda_{(2)}\le\cdots\le\lambda_{(n)},\lambda_{(1)}^*\le\lambda_{(2)}^*\le\cdots\le\lambda_{(n)}^*$$

是它们元素的递增的排列, 如果 $\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_{(i)}\le\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_{(i)}^*$ 对 $j=1,\cdots,n-1$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{(i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{(i)}^*$, 则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 优化于 $\boldsymbol{\lambda^*}$, 记作 $\boldsymbol{\lambda}\succeq_m\boldsymbol{\lambda^*}$.

下面的结论给出了 PH 模型的次序统计量组成的向量的普通多元随机序比较.

引理 2.1 [6] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组相互独立的随机变量, 符合 PH 模型且 X_i 的生存函数为

$$\overline{F}_i(x)=[\overline{F}(x)]^{\lambda_i},\quad i=1,\cdots,n.$$

设 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是另一组相互独立的随机变量, 符合 PH 模型且 Y_i 的生存函数为

$$\overline{G}_i(x)=[\overline{F}(x)]^{\lambda_i^*},\quad i=1,\cdots,n.$$

记 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\boldsymbol{\lambda}^*=(\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*)$, 则

$$\boldsymbol{\lambda}\succeq_m\boldsymbol{\lambda^*}\Longrightarrow(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\ge_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n}).$$

下面的引理研究了 Beta 随机变量的次序统计量组成的向量的普通多元随机序比较.

引理 2.2 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组相互独立的随机变量, $Y_1,\cdots,Y_n$ 是另一组相互独立的随机变量. 若 $X_i\sim\mathrm{Beta}(1,\beta_i)$, $Y_i\sim\mathrm{Beta}(1,\gamma_i)$, $i=1,\cdots,n$, 则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\ge_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n}).$$

证 首先 X_i 的生存函数 $\overline{F}_i(x)$ 为对任意 $x\in(0,1)$,

$$\overline{F}_i(x)=(1-x)^{\beta_i}=e^{-\lambda_iR(x)},\quad i=1,\cdots,n,$$

这里 $\lambda_i=\beta_i$, $R(x)=\ln\frac{1}{1-x}$. 因此 $X_1,\cdots,X_n$ 符合 PH 模型. 由于 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$, 根据引理 2.1, 可得

$$(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\ge_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n}).$$

引理 2.3 [10] 设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是两个 n 维随机向量, 若 $\mathbf{X}\ge_{st}\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{h}:\Re^n\to\Re^k$ 是任一 k 维递增 (递减) 函数, 则对任一正整数 k, k 维向量 $\mathbf{h}(\mathbf{X})$ 和 $\mathbf{h}(\mathbf{Y})$ 在一般多元随机序意义下满足

$$\mathbf{h}(\mathbf{X})\ge_{st}(\le_{st})\mathbf{h}(\mathbf{Y}).$$

引理 2.4 设 X 是一个随机变量且 $X\sim\mathrm{Beta}(a,b)$, 这里 $a>0$, $b>0$. 如果 $Y=1-X$, 则 $Y\sim\mathrm{Beta}(b,a)$.

证 X 的概率密度函数 $f_X(x)$ 可表示为对任意的 $x\in(0,1)$,

$$f_X(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

因为 $Y=1-X$, 由雅可比变换, Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 为对任意 $y\in(0,1)$,

$$f_Y(y)=|-1|\cdot f_X(1-y)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}y^{b-1}(1-y)^{a-1}.$$

很容易看出 $Y\sim \mathrm{Beta}(b,a)$.

引理 2.5 设随机变量 $X\sim Z(a,b)$, 若 $Y=\frac{X}{1+X}$, 则 $Y\sim\mathrm{Beta}(a,b)$.

此引理的证明很显然, 在此我们略去.

3 主要结果

首先, 我们给出在优化序条件下, Beta 分布次序统计量的普通多元随机序.

定理 3.1 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组相互独立的随机变量, $Y_1,\cdots,Y_n$ 是另一组相互独立的随机变量. 若 $X_i\sim\mathrm{Beta}(\beta_i,1)$, $Y_i\sim\mathrm{Beta}(\gamma_i,1)$, $i=1,\cdots,n$, 则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n})\geq_{st}(X_{1:n},\cdots,X_{n:n}).$$

证 令 $Z_i=1-X_i$, $Z_i^*=1-Y_i$, $i=1,\cdots,n$. 因为 $X_i\sim\mathrm{Beta}(\beta_i,1)$, $Y_i\sim\mathrm{Beta}(\gamma_i,1)$, 所以根据引理 2.4,

$$Z_i\sim\mathrm{Beta}(1,\beta_i),Z_i^*\sim\mathrm{Beta}(1,\gamma_i).$$

从而由引理 2.2 可得

$$(Z_{1:n},\cdots,Z_{n:n})\geq_{st}(Z^*_{1:n},\cdots,Z^*_{n:n}).\tag{3.1}$$

现在, 我们考虑函数 $h(x_1,\cdots,x_n)=(1-x_1,\cdots,1-x_n)$, $0<x_i<1$, $i=1,\cdots,n$. 很显然, $h(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个关于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 单调递减函数. 因此根据引理 2.3 与 (3.1) 式, 可得

$$h(Z^*_{1:n},\cdots,Z^*_{n:n})\geq_{st}h(Z_{1:n},\cdots,Z_{n:n}).\tag{3.2}$$

将 $Z_i=1-X_i$, $Z_i^*=1-Y_i$ 代入 (3.2) 式, 可得

$$(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n})\geq_{st}(X_{1:n},\cdots,X_{n:n}).$$

在下面的定理 3.2 和定理 3.3 中, 我们研究了在优化序条件下, Z 分布次序统计量的普通多元随机序的两个结果.

定理 3.2 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组相互独立的随机变量, $Y_1,\cdots,Y_n$ 是另一组相互独立的随机变量. 若 $X_i\sim Z(\beta_i,1)$, $Y_i\sim Z(\gamma_i,1)$, $i=1,\cdots,n$, 则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n})\geq_{st}(X_{1:n},\cdots,X_{n:n}).$$

证 令 $U_i=\frac{X_i}{1+X_i}$, $U_i^*=\frac{Y_i}{1+Y_i}$, $i=1,\cdots,n$. 因为 $X_i\sim Z(\beta_i,1)$, $Y_i\sim Z(\gamma_i,1)$, 所以根据引理 2.5 立即得到

$$U_i\sim\mathrm{Beta}(\beta_i,1),U_i^*\sim\mathrm{Beta}(\gamma_i,1).$$

根据定理 3.1 可得

$$(U^*_{1:n},\cdots,U^*_{n:n})\geq_{st}(U_{1:n},\cdots,U_{n:n}).\tag{3.3}$$

现在, 考虑函数 $h(x_1,\cdots,x_n)=(\frac{x_1}{1-x_1},\cdots,\frac{x_n}{1-x_n})$, $0<x_i<1$, $i=1,\cdots,n$. 显然, 函数 $h(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 n 维关于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的单调递增函数. 因此由引理 2.3 和 (3.3) 式, 得到

$$h(U^*_{1:n},\cdots,U^*_{n:n})\geq_{st}h(U_{1:n},\cdots,U_{n:n}).\tag{3.4}$$

将 $U_i=\frac{X_i}{1+X_i}$, $U^*_i=\frac{Y_i}{1+Y_i}$, $i=1,\cdots,n$ 代入 (3.4) 式, 可得

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n})\geq_{st}(X_{1:n},\cdots,X_{n:n}).$$

定理 3.3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组相互独立的随机变量, $Y_1,\cdots,Y_n$ 是另一组相互独立的随机变量. 若 $X_i\sim Z(1,\beta_i)$, $Y_i\sim Z(1,\gamma_i)$, $i=1,\cdots,n$, 则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\Longrightarrow(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\geq_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n}).$$

证 因为 $X_i\sim Z(1,\beta_i)$, 所以 X_i 的概率密度函数为对任意 $x\in(0,+\infty)$,

$$f_i(x)=\frac{\beta_i}{(1+x)^{\beta_i+1}},\quad i=1,\cdots,n,$$

则 X_i 的生存函数为

$$\overline{F}_i(x)=\frac{1}{(1+x)^{\beta_i}}=[\overline{F}(x)]^{\beta_i},\quad i=1,\cdots,n,$$

这里 $\overline{F}(x)=\frac{1}{(1+x)}$, $x\in(0,+\infty)$. 因此 $X_1,\cdots,X_n$ 符合 PH 模型. 由于

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\succeq_m(\gamma_1,\cdots,\gamma_n),$$

由引理 2.1 立得

$$(X_{1:n},\cdots,X_{n:n})\geq_{st}(Y_{1:n},\cdots,Y_{n:n}).$$

参 考 文 献

[1] Balakrishnan N, Barmalzan G, Haidari A. Stochastic orderings and ageing properties of residual lifelengths of live components in $(n-k-1)$-out-of-n systems[J]. J. Appl. Prob., 2014, 51(1): 58–68.

[2] Balakrishnan N, Zhao P. Ordering properties of order statistics from heterogeneous populations: A review with an emphasis on some recent developments [J]. Prob. Engin. Inform. Sci., 2013, 27: 403–469.

[3] Balakrishnan N, Rao C R. Handbook of statistics 16: order statistics: theory and methods[M]. Amsterdam: Elsevier, 1998.

[4] Balakrishnan N, Rao C R. Handbook of statistics 17: order statistics: applications[M]. Amsterdam: Elsevier, 1998.

[5] Pledger P, Proschan F. Comparisons of order statistics and of spacings from heterogeneous distributions[A]. Rustagi J S, Optimizing methods in statistics[C]. New York: Academic Press, 1971: 89–113.

[6] Proschan F, Sethuraman J. Stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous populations, with applications in reliability[J]. J. Multivariate Anal., 1976, 6: 608–616.

[7] Balakrishnan N, Barmalzan G, Haidari A. On usual multivariate stochastic ordering of order statistics from heterogeneous beta variables[J]. J. Multivariate Anal., 2014, 127: 147–150.

[8] Schur I. Über eine klasse von mittelbildungen mit anwendungen auf die determinantentheorie[J]. Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, 1923, 22: 9–20.

[9] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Some simple inequalities satisfied by convex functions[J]. Messenger Math., 1929, 58: 145–152.

[10] Shaked M, Shanthikumar J G. Stochastic orders[M]. New York: Springer, 2007.

[11] 黄金超, 凌能祥. 威布尔分布族刻度参数的经验 Bayes 检验函数的收敛速度 [J]. 数学杂志, 2014, 34(4): 729–738.

ON USUAL MULTIVARIATE STOCHASTIC ORDERING OF ORDER STATISTICS FROM FISHER-Z DISTRIBUTIONS

FANG Long-xiang, TANG Wei

(*School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241002, China*)

Abstract: In this paper, we study the stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous Fisher-Z components. By the properties of Beta random variable and the known stochastic comparative results of order statistics from proportional hazard rates models, we obtain the stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous Fisher-Z components with respect to the usual multivariate stochastic order, which generalize some results in literatures.

Keywords: usual multivariate stochastic order; order statistics; proportional hazard rates model; Beta distribution; Fisher-Z distribution

2010 MR Subject Classification: 60E15; 62N05