Vol. 36 (2016)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类齐次 Moran 集的维数

刘小丽, 刘卫斌
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了一类特殊的齐次 Moran 集的维数. 将齐次均匀 Cantor 集通过一系列平移, 获得了一类特殊的齐次 Moran 集并得到了它们维数的精确值, 推广了齐次均匀 Cantor 集维数的计算公式.

关键词: 齐次均匀康托集; 齐次 Moran 集; Hausdorff 维数
MR(2010) **主题分类号**: 28A75; 28A78; 28A80 **中图分类号**: O174.12
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)01-0100-05

1 引言

下面给出齐次 Moran 集的定义:

设 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 为一正整数序列, $\{c_k\}_{k\geq 1}$ 为一正实数序列, 满足 $n_k\geq 2$, $0<c_k<1$, $n_1c_1\leq\delta$ 及 $n_kc_k\leq 1 (k\geq 2)$, 其中 δ 为一正实数. 对任意 $k\geq 1$, 记

$$D_k=\{i_1i_2\cdots i_k:1\leq i_j\leq n_j,1\leq j\leq k\}.$$

令 $D=\bigcup\limits_{k\geq 0}D_k$, 其中 D_0 约定为 $\emptyset$.

若

$$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_k\in D_k,\tau=\tau_1\cdots\tau_m\in D_m,$$

记 $\sigma*\tau=\sigma_1\cdots\sigma_k\tau_1\cdots\tau_m$.

定义 1.1 设 J 为长度为 δ 的闭区间. J 中的闭区间族 $\mathcal{F}=\{J_\sigma:\sigma\in D\}$ 称为具有齐次 Moran 结构, 如果它满足

1. $J_\emptyset=J$;
2. 对任意 $k\geq 0$ 及任意 $\sigma\in D_k, J_{\sigma*1},\cdots J_{\sigma*n_{k+1}}$ 为 J_σ 的闭子区间, 并且对任意 $i\neq j$,

$$\mathrm{int}(J_{\sigma*i})\bigcap\mathrm{int}(J_{\sigma*j})=\emptyset,$$

其中 $\mathrm{int}(J_{\sigma*i})$ 表示区间 $J_{\sigma*i}$ 的内部.

3. 对任意 $k\geq 1,\sigma\in D_{k-1}$ 及 $1\leq j\leq n_k$ 有

$$\frac{|J_{\sigma*j}|}{|J_\sigma|}=c_k,$$

其中 $|A|$ 表示集 A 的直径.

*收稿日期: 2015-01-27 接收日期: 2015-03-24
作者简介: 刘小丽 (1991–), 女, 安徽宿州, 硕士, 主要研究方向: 分形几何.

设 $\mathcal{F}$ 为具有齐次 Moran 结构的 J 的闭子区间族, 称 $E(\mathcal{F}) := \bigcap\limits_{k\geq 1}\bigcup\limits_{\sigma\in D_k} J_\sigma$ 为由 $\mathcal{F}$ 确定的齐次 Moran 集, 称 $\mathcal{F}_k = \{J_\sigma : \sigma \in D_k\}$ 为 $E(\mathcal{F})$ 的 k 阶基本区间, J 称为 $E(\mathcal{F})$ 的母区间. 由上面的定义看到, 对于给定的闭区间 J , 序列 $\{n_k\}_{k\geq 1}, \{c_k\}_{k\geq 1}$ 随着 k 阶基本区间的位置不同 $(k \geq 1)$ 而产生不同的齐次 Moran 集, 记 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$ 表示这些齐次 Moran 集的集合.

定义 1.2 设对任意 $k \geq 1$, 任意 $\sigma \in D_k$ 及 $1 \leq j \leq n_{k+1}$, 它的 $k+1$ 阶基本元 $J_{\sigma*j}$ (我们假定 $J_{\sigma*1}, \cdots J_{\sigma*n_{k+1}}$ 在 J_σ 中从左到右排列) 满足

1. $J_{\sigma*1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点重合, $J_{\sigma*n_{k+1}}$ 的右端点与 J_σ 的右端点重合.
2. 相邻的 $k+1$ 阶基本区间的间隔相同.

由此得到的 Moran 集称为齐次均匀康托集, 记为

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(J, \{n_k\}, \{c_k\}).$$

如果将上述定义中的条件 1 用下列条件代替: $J_{\sigma*1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点重合, $J_{\sigma*j+1}$ 的左端点与 $J_{\sigma*j}$ 的右端点重合, $1 \leq j \leq n_{k+1}-1$, 则得到的 Moran 集称为偏齐次均匀康托集, 记为

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*(J, \{n_k\}, \{c_k\}).$$

定义 1.3 定义预维数序列 $\{s_k\}_{k\geq 1}$, 其中 s_k 满足下列等式

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_k} = 1.$$

令 $s_* = \liminf\limits_{k\to\infty} s_k, s^* = \limsup\limits_{k\to\infty} s_k$.

下面总假设 $J = [0,1]$, s_*, s^* 同前面定义, 亦即

$$s_* = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}, \qquad s^* = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}. \tag{1}$$

令 δ_k, ε_k 分别为 $\mathcal{C}$ 的第 k 阶基本区间的长度和相邻基本区间之间的间隔, 则

$$\delta_k = c_1 \cdots c_k, \qquad \varepsilon_k = \frac{c_1 \cdots c_{k-1}(1 - n_k c_k)}{n_k - 1}.$$

命题 1 设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$ 为齐次均匀康托集, 则 $\dim_H \mathcal{C} = s_*$.

现设 $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*(J, \{n_k\}, \{c_k\})$ 为偏齐次均匀康托集, 对任意整数 $l \geq 0$, 令

$$u_l := \sum_{k=l+1}^{\infty} (n_k - 1)\delta_k.$$

记 $J' = [0, u_0], d_k = \frac{u_k}{u_{k-1}}, k \geq 1$, 则由 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}^*$ 的定义得到

引理 1 设 J', d_k, 同上定义, 则

$$\mathcal{C}^*(J, \{n_k\}, \{c_k\}) = \mathcal{C}(J', \{n_k\}, \{d_k\}),$$

亦即 $\mathcal{C}^*$ 对应于 $J', \{n_k\}, \{d_k\}$ 的齐次均匀康托集.

2 一般齐次 Moran 集

现在定义一种新的齐次 Moran 集.

定义 2.1 设 $t \geq 0, t \in R$ 相对于齐次均匀康托集 $\mathcal{C}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$, 对于 k 级基本区间 $J_\sigma, (\sigma \in D_k)$, 定义第 $k+1$ 级的基本区间 $J_{\sigma*1}, \cdots J_{\sigma*n_{k+1}}$ 满足:

1. $|J_{\sigma*i}| = c_1 \cdots c_{k+1} = \delta_{k+1}, \forall 1 \leq i \leq n_{k+1}$.

2. $J_{\sigma*i}$ 与 $J_{\sigma*(i+1)}$ 之间的间隔相同, 记为 a_{k+1}.

3. $J_{\sigma*1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点的距离为 $ta_{k+1}, J_{\sigma*n_{k+1}}$ 的右端点与 J_σ 的右端点的距离也是 ta_{k+1}, 我们把由此得到的 Moran 集记为 $\mathcal{C}^{**}(t) = \mathcal{C}^{**}(J, \{n_k\}, \{c_k\}, t)$. 当 $t = 0$ 时, $\mathcal{C}^{**}(0)$ 即为齐次均匀 Cantor 集 $\mathcal{C}$. 令

$$l_0 = t\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad l_k = t\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i, \quad u_0 = \delta_0 - t\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad u_k = \delta_k - t\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i,$$

从而

$$a_1 = \frac{\delta_0 - n_1\delta_1}{n_1 - 1 + 2t}, \quad a_k = \frac{\delta_{k-1} - n_k\delta_k}{n_k - 1 + 2t}.$$

令

$$J'' = [l_0, u_0], \qquad d'_k = \frac{u_k - l_k}{u_{k-1} - l_{k-1}}, \qquad k \geq 1,$$

由 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}^{**}$ 的定义我们类似得到与引理 1 平行的结果.

引理 $1'$ J'' 和 d_k 如上定义, 则

$$\mathcal{C}^{**}(J, \{n_k\}, \{c_k\}, t) = \mathcal{C}(J'', \{n_k\}, \{d'_k\}),$$

即 $\mathcal{C}$ 为对应于 $J'', \{n_k\}, \{d'_k\}$ 的齐次均匀康托集.

定理 1 设 $\mathcal{C}^{**}(t) = \mathcal{C}^{**}(J, \{n_k, \{c_k\}, t)$, 则当 $t \geq 0$ 时有 $\dim_H \mathcal{C}^{**} = s_*$.

证 当 $t = 0$ 时, $C^{**}(0)$ 即为齐次均匀 Cantor 集. 下面只需证明 $t > 0$ 的情况. 注意到

$$\dim_H C^{**} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log d'_1 \cdots d'_k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log u_k - l_k}. \tag{2}$$

由 u_k 和 l_k 的定义有

$$\begin{aligned} u_k - l_k &= \delta_k - 2t\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \\ &= (1 - \frac{2t}{n_{k+1} - 1 + 2t})\delta_k + 2t\sum_{i=k+1}^{\infty}(\frac{n_i}{n_i - 1 + 2t} - \frac{1}{n_{i+1} - 1 + 2t})\delta_i, \end{aligned}$$

而 $n_k \geq 2$, 所以

$$1 - \frac{2t}{n_{k+1} - 1 + 2t} \geq \frac{1}{1 + 2t}.$$

又由于

$$\frac{n_i}{n_i - 1 + 2t} - \frac{1}{n_{i+1} - 1 + 2t} \geq 0,$$

得到

$$\frac{1}{1+2t}\delta_k \leq u_k - l_k \leq \delta_k,$$

其中 $t \geq 0$. 由 (2) 式得到

$$\dim_H \mathcal{C}^{**} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log u_k - l_k} = s_*.$$

3 一般齐次莫朗集的进一步推广

定义 3.1 现在考虑更一般的情况, 只需将定义 2.1 中第 3 条改为 $J_{\sigma*1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点之间的距离为 b_{2k+1}, 右端点之间的距离为 $b_{2(k+1)}$, 并且满足 $b_{2k+1} + b_{2(k+1)} \leq a_{k+1}$, 其他条件不变, 我们将由此得到的齐次 Moran 集记为

$$\mathcal{C}_1^{**}(J, \{n_k\}, \{c_k\}, \{b_{2k-1}, b_{2k}\}).$$

设

$$l_0 = \sum_{i=1}^{\infty} b_{2i-1}, \qquad l_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_{2i-1}.$$

令

$$u_k = \delta_k - \sum_{i=k+1}^{\infty} b_{2i}, \qquad J'' = [l_0, u_0], \qquad d_k'' = \frac{u_k - l_k}{u_{k-1} - l_{k-1}}.$$

由 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}_1^{**}$ 的定义, 我们也可类似得到下列结果.

引理 1′ J'' 和 d_k'' 如上定义, 则 $\mathcal{C}_1^{**}(J, \{n_k\}, \{c_k\}, \{b_{2k-1}, b_{2k}\}) = \mathcal{C}(J, \{n_k\}, \{d_k''\})$.

定理 2 设 $\mathcal{C}_1^{**} = \mathcal{C}_1^{**}(J, \{n_k\}, \{c_k\}, \{b_{2k-1}, b_{2k}\})$, 若满足 $b_{2k-1} + b_{2k} \leq a_k$, 则有

$$\dim_H \mathcal{C}_1^{**} = s_*.$$

证 由于

$$\dim_H \mathcal{C}_1^{**} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log d_1'' \cdots d_k''} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log u_k - l_k}. \tag{3}$$

注意到

$$\begin{aligned} u_k - l_k &= \delta_k - \sum_{i=k+1}^{\infty} (b_{2i-1} + b_{2i}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (n_i - 1)(\delta_i + a_i) \\ &\leq (n_{k+1} - 1)(\delta_{k+1} + a_{k+1}), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \delta_k &= n_{k+1}\delta_{k+1} + (n_{k+1} - 1)a_{k+1} + b_{2(k+1)-1} + b_{2(k+1)} \\ &\leq n_{k+1}\delta_{k+1} + n_{k+1}a_{k+1}, \end{aligned}$$

所以

$$\delta_{k+1} + a_{k+1} \geq \frac{\delta_k}{n_{k+1}}.$$

从而

$$(n_{k+1} - 1)(\delta_{k+1} + a_{k+1}) \geq \frac{n_{k+1} - 1}{n_{k+1}} \delta_k = (1 - \frac{1}{n_{k+1}}) \delta_k \geq \frac{1}{2} \delta_k.$$

由此得到

$$\frac{1}{2} \delta_k \leq u_k - l_k \leq \delta_k.$$

由 (3) 式得到

$$\dim_H \mathcal{C}_1^{**} = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k} = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log u_k - l_k} = s_*.$$

参 考 文 献

[1] 薛玉梅, 张晓. 一类齐次 Moran 集维数的不连续性 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(1): 150–153.

[2] Feng Dejun, Wen Zhiying, Wu Jun. Some dimensional results for homogeneous Moran sets[J]. Sci. China, 1997, 40(5): 476–486.

[3] 丁道新, 文志雄. 一类广义齐次 Moran 集的 Hausdorf 维数 [J]. 应用数学学报, 2011, 24(1): 73–76.

[4] Hua Su, Rao Hui, Wen Zhiying, Wu Jun. On the structures and dimensions of Moran sets[J]. Sci. China, 2000, 43(8): 837–852.

[5] Qu Chengqin. Hausdorff Measures for a class of Homogeneous Cantor Sets[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, (English Series), 2013, 29(1): 117–122.

[6] 文志英. 分形几何的数学基础 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.

[7] Feng Dejun, Rao Hui, Wu jun.The net measure properties for symmetric Cantor sets and their applications[J]. Prog. Natural Sci., 1997(2): 172–178.

[8] 黄精华. 齐次 Moran 集的 Bouligand 维数 [J]. 数学杂志, 2002, 22(4): 405–411.

THE HAUSDORFF DIMENSION OF A CLASS OF HOMOGENEOUS MORAN SETS

LIU Xiao-li, LIU Wei-bin

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430027, China*)

Abstract: In this paper, we study the dimension of a class of special homogeneous Moran sets. By using through a series of translation of the Cantor sets, we get a special class of homogeneous Moran sets and their precise dimension values which promotes the dimension formula of the uniform homogeneous Cantor sets.

Keywords: homogeneous Cantor set; homogeneous Moran set; Hausdorff dimension

2010 MR Subject Classification: 28A75; 28A78; 28A80