Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于度量及纲函数的 Hausdorff 测度的两个反例

姚媛媛
(华东理工大学理学院, 上海 200237)

摘 要: 本文研究了度量空间中 Hausdorff 测度与度量及纲函数的关系. 利用拓扑学及 Hausdorff 测度论中一些性质, 构造了两反例来说明存在不等价纲函数 g,h 和某一紧度量空间 (ρ,X), 使得 $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对此紧度量空间等价等问题. 这些反例有助于从另一个角度理解文胜友、文志英 [4] 中主要结果.

关键词: 度量; 纲函数; Hausdorff 测度; 等价

MR(2010) **主题分类号:** 28A80; 28A78 **中图分类号:** O174.12

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2015)06-1475-06

1 引言

Hausdorff 测度是分形几何与几何测度论中一个基础而重要的研究课题, 参见文 [1–3]. 文献 [4] 研究了涉及度量及纲函数的推广 Hausdorff 测度, 讨论了加倍条件、Hausdorff 测度的等价性及度量等价性之间的关系. 得到结论:

(1) $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对所有紧度量空间等价, 当且仅当纲函数 g 与 h 等价.

(2) 对给定的 $c\in(0,+\infty)\backslash\{1\}, H^{\rho,g}$ 与 $H^{c\rho,g}$ 对任意的紧度量空间 (ρ,X) 等价, 当且仅当纲函数 g 满足加倍条件.

围绕这两个结论, 有一些值得思考的问题:

(a) 是否存在不等价纲函数 g,h 和某一紧度量空间 (ρ,X), 使得 $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对该度量空间等价?

(b) 结论 (2) 中, 考虑的度量 ρ 与 $c\rho$ 是等价度量, 而非任意度量 ρ_1,ρ_2. 是否存在不等价度量空间 $(\rho_1,X),(\rho_2,X)$ 和某纲函数 g, 使得 $H^{\rho_1,g}$ 与 $H^{\rho_2,g}$ 等价?

本文拟对上述两问题给出肯定答案.

2 定义及引理

首先给出需要的定义和引理:

称非空集合 X 上的两度量 ρ_1 与 ρ_2 等价如果存在常数 $0<c_1\le c_2<+\infty$, 使得 $c_1\rho_1(x,y)\le\rho_2(x,y)\le c_2\rho_1(x,y)\ \forall x,y\in X$ 成立.

称非空集合 X 上的两测度 μ_1 与 μ_2 等价如果存在常数 $0<c_1\le c_2<+\infty$, 使得 $c_1\mu_1(K)\le\mu_2(K)\le c_2\mu_1(K)\ \forall K\subseteq X$ 成立.

称函数 $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为纲函数若它递增右连续, 当 $x>0$ 时 $g(x)>0$ 且 $g(0)=0$. 称纲函数 g 满足加倍条件, 如果存在常数 $0<c<+\infty$ 及 $\delta>0$, 使得 $\forall 0\le x\le\delta$,

*收稿日期: 2014-01-21 接收日期: 2014-03-17
基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助 (11101148); 中央高校基本科研业务费专项资金资助.
作者简介: 姚媛媛 (1983–), 女, 安徽南陵, 讲师, 主要研究方向: 分形几何、几何测度论.

有 $g(2x)\le cg(x)$. 称两纲函数 g_1 与 g_2 等价如果存在常数 $0<c_1\le c_2<+\infty$ 及 $\delta>0$, 使得 $\forall 0\le x\le\delta$, 有 $c_1g_1(x)\le g_2(x)\le c_2g_1(x)$.

设 (ρ,X) 为度量空间, g 为纲函数, 对 $K\subseteq X$, 称可数集族 $\{U_i\}_i$ 为 K 关于度量 ρ 的一个 δ 覆盖, 若 $\cup_iU_i\supseteq K$ 且对任意 $i, 0\le|U_i|_\rho<\delta$, 其中 $|U_i|_\rho=\sup\{\rho(x,y):x,y\in U_i\}$. 定义

$$H_\delta^{\rho,g}(K)=\inf\sum_i g(|U_i|_\rho).$$

这里下确界取遍所有 K 关于 ρ 的 δ 覆盖. 定义 K 关于度量 ρ 及纲函数 g 的 Hausdorff 测度为

$$H^{\rho,g}(K)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta^{\rho,g}(K).$$

由文献 [3] 知以上定义的测度是 X 上 Borel 正则的度量测度.

引理 2.1 [5] 若 X 为度量空间, 则 X 为紧等价于 X 中的任一序列存在子序列收敛于 X 中的点.

引理 2.2 [3] 若对欧氏空间里的 Borel 集合 Ω 和连续纲函数 g, 有 $H^{\rho,g}(\Omega)=+\infty$ (其中 ρ 是通常欧氏度量), 则存在 Ω 的紧子集 X 满足 $0<H^{\rho,g}(X)<+\infty$.

3 反例

反例 3.1 存在两不等价纲函数 g,h 和一紧度量空间 (ρ,X), 使得 $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对 (ρ,X) 等价.

构造: 令 $\frac12<\lambda<1, \forall n\in\mathbb{N}_+, a_n=\lambda^{2^{-n}}$, 则 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 有 $a_n>\frac12$ 且 $a_1a_2\cdots a_n>\lambda$. 易知, 存在序列 $\{\delta_n\}_{n\ge 0}$ 满足 $\delta_n\le(1-a_n)\delta_{n-1}$ 且单调递减趋于 0.

分别构造 $g(x),h(x)$ 如下:

$$g(x)=\begin{cases}\delta_n, & \text{若 } \delta_n\le x<\delta_{n-1},\\ 0, & \text{若 } x=0,\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\delta_{n-1}, & \text{若 } b_n\le x<\delta_{n-1},\\ \text{连接}(\delta_n,\delta_n),(b_n,\delta_{n-1})\text{的线段}, & \text{若 } \delta_n\le x<b_n,\\ 0, & \text{若 } x=0,\end{cases}$$

其中 $b_n=\frac{\delta_n+\delta_{n-1}}{2}(n\in\mathbb{N}_+)$. 易证 g,h 均为纲函数.

由于

$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{g(b_n)}{h(b_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\le\liminf_{n\to\infty}(1-a_n)=0,$$

因此 g,h 不等价.

接下来我们构造紧度量空间 (ρ,X) 使得 $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对 (ρ,X) 等价.

令 $k_n=\left[\frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}\right], n\in\mathbb{N}_+$, 此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 从而

$$k_n\ge\left[\frac{1}{1-a_n}\right]\ge 2, k_1k_2\cdots k_n\le\frac{\delta_0}{\delta_n} \tag{3.1}$$

且

$$k_1k_2\cdots k_n \ge \left(\frac{\delta_0}{\delta_1}-1\right)\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}-1\right)\cdots\left(\frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}-1\right) \ge \frac{a_1a_2\cdots a_n\delta_0}{\delta_n} \ge \frac{\lambda\delta_0}{\delta_n}. \tag{3.2}$$

令 $F_0=[0,1]$, 构造 F_0 的子集 X 如下: 首先, 从 F_0 中选择 k_1 个互不相交的正长度闭子区间, 令 F_1 表示这些闭子区间的并. 对 F_1 的每个区间, 从中选择 k_2 个互不相交的正长度闭子区间, 将这些 k_1k_2 个区间的并记为 F_2. 继续这一过程得到序列 $F_0\supseteq F_1\supseteq\cdots\supseteq F_n\cdots$, 令 $X=\cap_{n=1}^{\infty}F_n$. 称 F_n 的每个子区间为一个 n 阶基本区间.

$\forall x,y\in X, x\neq y$, 用 $n(x,y)$ 表示同时包含 x,y 的基本区间的最高阶数. 定义 X 上的度量如下:

$$\rho(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{若 } x=y,\\ \delta_{n(x,y)}, & \text{若 } x\neq y.\end{cases}$$

首先证明, (ρ,X) 是紧度量空间.

设 $d(x,y)$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上的通常度量. 由于 (d,X) 是紧度量空间, 故由引理 2.1 的必要性知对任意 X 中的序列 $\{x_n\}$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $x_0\in X$, 使得 $d(x_{n_k},x_0)\to 0$. 对充分大 $m\in\mathbb{N}_+$, 存在 $k_m\in\mathbb{N}_+$, 使得 $x_{n_{k_m}}$ 与 x_0 同属于某 m 阶基本区间, 从而 $n(x_{n_{k_m}},x_0)\ge m$, 故 $\rho(x_{n_{k_m}},x_0)\le\delta_m$. 令 $m\to+\infty$ 得 $\rho(x_{n_{k_m}},x_0)\to 0$, 再由引理 2.1 的充分性知 (ρ,X) 是紧度量空间.

其次证明, 在度量 ρ 下, 对 $\forall K\subseteq X$, 有 $H^{\rho,g}(K)=H^{\rho,h}(K)$. 假定 $\cup U_i\supseteq K$ 且满足 $0<|U_i|_\rho<\delta_0$. 对任一固定 i, 取 n_i 为满足 $\delta_{n_i}\le|U_i|_\rho<\delta_{n_i-1}$ 的唯一正整数, 由 ρ 的定义可知 $|U_i|_\rho=\delta_{n_i}$. 再由 $\forall n\in\mathbb{N}_+, g(\delta_n)=h(\delta_n)$ 可得

$$H^{\rho,g}(K)=\lim_{\delta\to 0}\inf\sum_i g(|U_i|_\rho)=\lim_{\delta\to 0}\inf\sum_i h(|U_i|_\rho)=H^{\rho,h}(K).$$

故 $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对于紧度量空间 (ρ,X) 等价.

注 1 在反例 3.1 中, 我们有 $0<H^{\rho,g}(X)=H^{\rho,h}(X)<+\infty$.

设 $n\ge 1$, I 是一 n 阶基本区间, 则对 $\forall x,y\in I, n(x,y)\ge n$, 当 x,y 分别为 I 的两端点时等号成立, 从而 $|I|_\rho=\delta_n$, 故所有的 n 阶基本区间构成 X 关于度量 ρ 的一个 δ_n 覆盖. 由 (3.1) 式可知

$$H^{\rho,g}_{\delta_n}(X)\le k_1k_2\cdots k_n g(\delta_n)=k_1k_2\cdots k_n\delta_n\le\delta_0.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$H^{\rho,g}(X)\le\delta_0<\infty. \tag{3.3}$$

另一方面, 设 μ 是 X 上满足对任一 n 阶基本区间 $I_n, \mu(I_n)=\frac{1}{k_1k_2\cdots k_n}$ 的唯一 Borel 概率测度. 设 $U\subseteq X$ 且满足 $0<|U|_\rho<\delta_0$. 取 n 为满足 $\delta_n\le|U|_\rho<\delta_{n-1}$ 的唯一正整数. 由 ρ 的定义可知 $|U|_\rho=\delta_n$, 因此存在一个 n 阶基本区间 I_n 使得 $U\subseteq I_n$. 由 (3.2) 式得

$$\mu(U)\le\mu(I_n)=\frac{1}{k_1k_2\cdots k_n}\le\frac{g(|U|_\rho)}{\lambda\delta_0}.$$

由 Frostman 引理, 可知 $0<\lambda\delta_0\le H^{\rho,g}(X)$, 联系 (3.3) 式知

$$0<\lambda\delta_0\le H^{\rho,g}(X)\le\delta_0<+\infty.$$

事实上, 在反例 3.1 的基础上稍作修改, 可以得到另一反例, 满足 $H^{\rho,g}(X)=H^{\rho,h}(X)=0$.

取 g,h,X 同反例 3.1, 定义 $\rho(x,y)=\begin{cases} 0, & 若\ x=y, \\ \delta_{n(x,y)+1}, & 若\ x\neq y, \end{cases}$ 同注 1 可知所有 n 阶基本区间构成 X 关于度量 ρ 的一个 δ_{n+1} 覆盖, 从而由 (3.1) 式

$$H^{\rho,g}_{\delta_{n+1}}(X)\leq k_1k_2\cdots k_n g(\delta_{n+1})\leq \frac{\delta_0}{\delta_n}g(\delta_{n+1})=\frac{\delta_0}{\delta_n}\delta_{n+1}\leq \delta_0(1-a_{n+1})\to 0(n\to\infty).$$

再由反例 3.1 的证明知 $H^{\rho,g}(X)=H^{\rho,h}(X)=0$.

注 2 反例 3.1 中的 g 不满足加倍条件, 因为由

$$\delta_{n+1}\leq(1-a_{n+1})\delta_n<\frac{\delta_n}{2},$$

知

$$\frac{g(\delta_n)}{g(\delta_n/2)}=\frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}\geq\frac{1}{1-a_{n+1}}\to+\infty\ \ (n\to\infty).$$

注 3 从反例 3.1 的证明可以看出: 若存在 $0<c_1\leq c_2<+\infty$ 和单调递减趋于 0 的数列 δ_n 满足 $c_1g(\delta_n)\leq h(\delta_n)\leq c_2g(\delta_n)$, 则可构造紧度量空间 (ρ,X), 使得 $H^{\rho,g}$ 与 $H^{\rho,h}$ 对 (ρ,X) 等价.

反例 3.2 存在满足加倍条件的纲函数 g 和两不等价度量空间 (ρ_1,X) 与 (ρ_2,X), 使得 $H^{\rho_1,g}$ 与 $H^{\rho_2,g}$ 等价.

构造: 定义 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的函数

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2^n}x^{\frac{1}{2^n}}, & \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\leq x<\frac{1}{2^{2^n}}, n\in\mathbb{N}_+\cup\{0\}, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

易知 $g(x)$ 是连续纲函数且 $g(x)$ 满足

$$当\ x<\frac{1}{4}\ 时,\ g(\sqrt{x})=2g(x). \tag{3.4}$$

以下验证 $g(x)$ 满足加倍条件:

(1) 若对某 $n\in\mathbb{N}_+$,

$$\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\leq x<\frac{1}{2^{2^n+1}},$$

则

$$\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}\leq 2x<\frac{1}{2^{2^n}},$$

故

$$g(2x)=\frac{1}{2^n}(2x)^{\frac{1}{2^n}}<\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2}{2^{n+2}}\leq 2g(x).$$

(2) 若对某 $n\in\mathbb{N}_+$,

$$\frac{1}{2^{2^n+1}}\leq x<\frac{1}{2^{2^n}},$$

则

$$\frac{1}{2^{2^n}} \le 2x < \frac{1}{2^{2^n-1}},$$

故

$$g(2x) = \frac{1}{2^{n-1}}(2x)^{\frac{1}{2^{n-1}}} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} \le 4g(x).$$

综合 (1) (2) 知, $g(x)$ 满足加倍条件.

设 $\rho_1(x,y)$ 为 $[0,1]$ 上的通常欧氏度量. 令 $\rho_2(x,y)=\sqrt{\rho_1(x,y)}$, 易证 $\rho_2(x,y)$ 也为 $[0,1]$ 上的度量.

由于当 $\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}} \le x < \dfrac{1}{2^{2^n}}$ 时,

$$g(x) = \frac{1}{2^n}x^{\frac{1}{2^n}} \ge \frac{1}{2^{n+2}},$$

从而

$$\frac{g(x)}{x} \ge \frac{1/2^{n+2}}{1/2^{2^n}} = 2^{2^n-n-2} \to +\infty \ \ (n\to\infty).$$

故 $\forall M>0, \exists \delta_0>0, \forall 0<x<\delta_0$, 有 $g(x)>Mx$, 从而

$$H^{\rho_1,g}([0,\frac{1}{2}]) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{\substack{\cup U_i \supseteq [0,\frac{1}{2}] \\ |U_i| \le \delta}} \sum g(|U_i|) \ge M \lim_{\delta\to 0} \inf_{\substack{\cup U_i \supseteq [0,\frac{1}{2}] \\ |U_i| \le \delta}} \sum |U_i| = MH^1([0,\frac{1}{2}]) = \frac{M}{2},$$

故 $H^{\rho_1,g}([0,\frac{1}{2}])=+\infty$.

由引理 2.2, 存在 $[0,\frac{1}{2}]$ 的紧子集 X, 满足 $0<H^{\rho_1,g}(X)<+\infty$. 由 X 紧知 X 有至多有限个孤立点. 由于去掉这些点不影响测度和紧性, 可假设 X 无孤立点.

显然, $(\rho_1,X),(\rho_2,X)$ 均为紧度量空间, 下证 ρ_1 与 ρ_2 不等价. 若 ρ_1,ρ_2 等价, 则存在 $c>0$, 使得 $\forall x,y\in X, \rho_2(x,y)\le c\rho_1(x,y)$. 由于 X 无孤立点, 故对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 可选取 $x_n,y_n\in X\ \ (x_n\ne y_n)$ 使得 $\rho_1(x_n,y_n)\to 0$, 从而 $c\ge 1/\sqrt{\rho_1(x_n,y_n)}$, 令 $n\to+\infty$, 矛盾.

以下证明: $\forall K\subseteq X$, 有 $H^{\rho_2,g}(K)=2H^{\rho_1,g}(K)$.

$\forall U\subseteq X$, 当 $|U|_{\rho_1}$ 充分小时, 由 ρ_1,ρ_2 的定义和 (3.4) 式可知

$$g(|U|_{\rho_2}) = g(\sqrt{|U|_{\rho_1}}) = 2g(|U|_{\rho_1}),$$

从而对任意充分小 $\delta>0, \{U_i\}$ 是 K 关于 ρ_2 的一个 δ 覆盖等价于 $\{U_i\}$ 是 K 关于 ρ_1 的一个 δ^2 覆盖, 故

$$H^{\rho_2,g}(K) = \lim_{\delta\to 0}\inf \sum_{0<|U_i|_{\rho_2}\le\delta} g(|U_i|_{\rho_2}) = 2\lim_{\delta\to 0}\inf \sum_{0<|U_i|_{\rho_1}\le\delta^2} g(|U_i|_{\rho_1}) = 2H^{\rho_1,g}(K),$$

从而 $H^{\rho_1,g}$ 与 $H^{\rho_2,g}$ 等价.

参 考 文 献

[1] Falconer K J. Techniques in fractal geometry[M]. Chichester: John Wiley and Sons Inc, 1997.

[2] Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[3] Rogers C A. Hausdorff measures[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[4] 文胜友, 文志英. 纲函数, 度量和 Hausdorff 测度的关系 [J]. 自然科学进展, 2003, 13(3): 305–308.

[5] Kelley J L. 一般拓扑学 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

TWO COUNTEREXAMPLES ABOUT HAUSDORFF MEASURE WITH RESPECT TO METRIC AND GAUGE FUNCTION

YAO Yuan-yuan

(*Department of Math., East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the relationship among Hausdorff measure, metric and gauge function. By using some properties in topology and Hausdorff measure theory, we construct two counterexamples to illustrate problems such as whether there exist two inequivalent gauge functions g, h and a compact metric space (ρ, X) such that $H^{\rho,g}$ and $H^{\rho,h}$ are equivalent with respect to (ρ, X). These counterexamples can help us to understand the main results in Wen Shenyou and Wen Zhiying [4] better.

Keywords: metric; gange function; Hansdorff measure; equivalence

2010 MR Subject Classification: 28A80; 28A78