Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

用 Choi-Saigo-Srivastava 算子定义的解析函数新子类

李书海 [1]，布仁满都拉 [1]，杨静宇 [1,2]

(1. 赤峰学院数学与统计学院, 内蒙古 赤峰 024000)

(2. 大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 本文研究了用 Choi-Saigo-Srivastava 算子定义的一类解析函数. 利用分析的方法和算子理论得到类中函数的积分表达式, 偏差定理, 卷积性质和半径问题. 所得结果推广一些作者的相关结果.

关键词: Choi-Saigo-Srivatava 算子; 解析函数; 卷积

MR(2010) **主题分类号**: 30C45; 30C50; 30C75 **中图分类号**: O174.51

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)05-1187-10

1 引言

设 H_k $(k=1,2,\cdots)$ 表示在单位圆盘 $U=\{z:|z|<1\}$ 内解析函数 $f(z)=z+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots$ 的全体构成的类; 以 $P_k(\tau)(0\leq\tau<1)$ 表示 U 内解析并满足条件 $\mathrm{Re}p(z)>\tau$ 的所有正实部函数 $p(z)=1+p_kz^k+\cdots$ 的全体; 用 $S_k^*(\tau)$ 和 $K_k(\tau)$ 分别表示 H_k 中的 τ 级星象函数类和 τ 级凸象函数类. 若存在 $g(z)\in S_k^*(\tau)$, 使得 $\frac{zf'(z)}{g(z)}\in P_k(\tau)$ 则称 $f(z)$ 为 τ 级近于凸函数, 其全体记为 $C_k(\tau)$.

以 $\bar{P}_k(\beta)$ $(\beta>1)$ 表示 U 内解析并满足 $\mathrm{Re}p(z)<\beta$ 的所有函数 $p(z)=1+p_kz^k+\cdots$ 的全体. 若函数 $f(z)\in H_k$ 满足条件 $\frac{zf'(z)}{f(z)}\in\bar{P}_k(\beta)$, 则称 $f(z)$ 属于类函数 $M_k(\beta)$; 若函数 $f(z)\in H_k$ 满足条件 $\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\in\bar{P}_k(\beta)$, 则称 $f(z)$ 属于函数类 $N_k(\beta)$; 用 $\bar{C}M_k(\beta)$ 和 $\bar{C}N_k(\beta)$ 分别定义 H_k 中两个子类:

$$\bar{C}M_k(\beta)=\{f\in H_k:\exists g\in M_k(\beta),\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{g(z)}<\beta,z\in U\},$$

$$\bar{C}N_k(\beta)=\{f\in H_k:\exists g\in N_k(\beta),\mathrm{Re}\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}<\beta,z\in U\}.$$

显然 $f(z)\in N_k(\beta)\Leftrightarrow zf'(z)\in M_k(\beta), f(z)\in\bar{C}N_k(\beta)\Leftrightarrow zf'(z)\in\bar{C}M_k(\beta)$.

文 [1–3] 中讨论了函数类 $\bar{K}_1(\beta)$ 和 $\bar{S}_1^*(\beta)$ 的性质.

设

$$g(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}b_{k+n}z^{k+n}\in H_k\ ,\ f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{k+n}z^{k+n}\in H_k,$$

则用 $(f*g)(z)$ 表示 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 Hadamard 卷

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{k+n}b_{k+n}z^{k+n}.$$

*收稿日期: 2013-01-19 接收日期: 2013-04-18
基金项目: 内蒙古自然科学基金基金资助 (2009MS0113).
作者简介: 李书海 (1966–), 男，蒙古族, 内蒙古通辽, 教授, 主要研究方向: 复分析及应用.

Carlson 和 Shaffer 在文 [4] 中引进比 D^{λ} 更为广泛的线性算子 $L(a,c)$. 设

$$\begin{aligned}&\phi(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}z^{n+1}, z\in U, c\neq 0,-1,-2,\cdots,\\&L(a,c)f(z)=\phi(a,c;z)*f(z), f(z)\in H_k,\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中 $(\xi)_n=\frac{\Gamma(\xi+n)}{\Gamma(\xi)}$. 由文 [4] 知 $L(a,c)$ 是 H_k 到自身 H_k 的连续映射, 还容易得到

$$\varphi(2(\beta-1),1;z)=\frac{z}{(1-z)^{2(\beta-1)}}.\tag{1.2}$$

另外, 对 $c>a>0, L(a,c)f(z)$ 有积分表达式

$$L(a,c)f(z)=\int_0^1 u^{a-1}f(uz)d\eta(a,c-a)(u),\tag{1.3}$$

其中 η 是 B 分布 $d\eta(a,c-a)(u)=[u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}/B(a,c-a)]du$. 如果 $a\neq 0,-1,-2,\cdots$, 则 $L(a,c)$ 存在连续逆映射 $L(c,a)$, 从而 $L(a,c)$ 是 H_k 到自身 H_k 的双方单值映射, 显然

$$L(a,c)=L(a,b)L(b,c)=L(b,c)L(a,b), b,c\neq -1,-2,\cdots.$$

设 $F(a,b;c;z)$ 为超几何分布函数:

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^{n+1}}{k!}, z\in U; a,b,c\neq 0,-1,-2,\cdots,$$

显然有

$$\frac{z}{(1-z)^{2(\beta-1)}}=\varphi(2(\beta-1),1;z)=F(2(\beta-1),1;1;z).\tag{1.4}$$

令

$$f_{\lambda}(z)=\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}(\lambda>-1).$$

Choi 等人在文献 [5] 中引进 Choi-Saigo-Srivastava 算子 $L_{\lambda,\mu}: H_k\to H_k$,

$$L_{\lambda,\mu}f(z)=(f_{\lambda,\mu}*f)(z)\ \ (f(z)\in H_k;\lambda>-1;\mu>0),\tag{1.5}$$

其中函数 $f_{\lambda,\mu}$ 满足条件

$$(f_{\lambda}*f_{\lambda,\mu})(z)=\frac{z}{(1-z)^{\mu}},(f(z)\in H_k,\lambda>-1;\mu>0).\tag{1.6}$$

特别地, $L_{0,2}=zf', L_{1,2}f=f$. 从 (1.1) 式和 (1.5) 式得到 [6]

$$L_{\lambda,\mu}f(z)=L(\mu,\lambda+1)f(z)\ \ (\lambda>-1;\mu>0),\tag{1.7}$$

由 (1.7) 式得到 [6]

$$f(z)=L(\lambda+1,\mu)L_{\lambda,\mu}f(z)\ \ (\lambda>-1;\mu>0).\tag{1.8}$$

文 [6, 8] 中分别用 $L_{\lambda,\mu}$ 算子引进函数类:

定义 A [6] 若函数 $f(z)\in H_k$ 满足条件

$$\operatorname{Re}\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)}{L(\mu,\lambda+1)f(z)}>\tau\ (\tau<1,z\in U),$$

则称 $f(z)$ 属于 $K(\lambda,\mu)(\tau)$ 中.

定义 B [8] 若函数 $f(z)\in H_k$ 满足条件

$$\operatorname{Re}\{(1-\alpha)\frac{L(\lambda+1,1)f(z)}{z}+\alpha\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{z}\}>\tau\ \ (0\le\alpha,0\le\tau<1,z\in U),$$

则称 $f(z)$ 属于 $V_{k,\lambda}(\alpha,\tau)$ 中.

定义 C [8] 设函数 $f(z)\in H_k$, 若存在函数 $g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\tau)$, 使得

$$\operatorname{Re}\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\eta\ \ (0\le\eta<1,z\in U),$$

则称 $f(z)$ 属于 $Q_{k,\lambda}(\alpha,\tau,\eta)$ 中.

文 [6] 中利用算子 $L_{\lambda,\mu}$ 研究函数类 $K(\lambda,\mu)(\tau)$ 的性质, 得到类中函数的包含关系、偏差定理, 给出了类中函数的系数不等式和 Hadamard 乘积性质；作者在文 [7] 中引进并讨论函数类

$$Q_{1,\lambda}\Big(\alpha,(\lambda+\tau)/(\lambda+1),(\lambda+\eta)/(\lambda+1)\Big)$$

的性质, 在文 [8] 中进一步推广文献 [7] 中函数类, 利用算子理论研究函数类的 $Q_{k,\lambda}(\alpha,\tau,\eta)$ 性质, 得到类中函数的积分表达式, 偏差定理, 给出了类中函数的近于凸半径和卷积性质.

本文中利用算子 $L_{\lambda,\mu}$ 引进如下函数类：

定义 1 若函数 $f(z)\in H_k$ 满足条件

$$\operatorname{Re}\Big\{(1-\alpha)\frac{L_{\lambda,\mu}f(z)}{z}+\alpha(L_{\lambda,\mu}f(z))'\Big\}<\beta\ \ (\alpha\ge0,\beta>1,z\in U),\tag{1.9}$$

则称 $f(z)$ 属于 $\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$ 中.

定义 2 设函数 $f(z)\in H_k$, 若存在函数 $g(z)\in\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$, 使得

$$\operatorname{Re}\frac{z(L_{\lambda,\mu}f(z))'}{L_{\lambda,\mu}g(z)}<\rho\ \ (\rho>1,z\in U),\tag{1.10}$$

则称 $f(z)$ 属于 $\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$ 中. 显然

$$\bar{Q}_{k,0,2}(\alpha,\beta,\rho)=\Big\{f(z)\in H_k:\exists g(z)\in\bar{V}_{k,0,2}(\alpha,\beta),\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{g(z)}<\rho,z\in U\Big\},$$

$$\bar{Q}_{k,1,2}(\alpha,\beta,\rho)=\Big\{f(z)\in H_k:\exists g(z)\in\bar{V}_{k,1,2}(\alpha,\beta),\operatorname{Re}\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}<\rho,z\in U\Big\}.$$

本文研究函数类 $\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$, 导出类中函数的积分表达式；借助算子理论建立该类中函数的偏差定理, 讨论类中函数的卷积性质和近于凸半径.

利用算子 (1.7) 式, 可将 (1.8) 是和 (1.9) 式写成

$$\mathrm{Re}\Big\{(1-\alpha)\frac{L(\mu,\lambda+1)f(z)}{z}+\alpha\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{z}\Big\}<\beta,(\alpha\geq 0,\beta>1,z\in U) \quad (1.11)$$

和

$$\mathrm{Re}\,\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)}{L(\mu,\lambda+1)g(z)}<\rho,\ z\in U. \quad (1.12)$$

2 积分表达式

引理 2.1 设 $p(z)\in\bar{P}_k(\beta)$ $(\beta>1)$, 则存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上连续的概率测度 $\mu(x)$, 使得

$$p(z)=\int_{|x|=1}\frac{1-(2\rho-1)xz}{1-xz}d\mu(x). \quad (2.1)$$

证 由 $p(z)\in\bar{P}_k(\beta)$ 可知, $\mathrm{Re}\Big(\frac{\beta-p(z)}{\beta-1}\Big)>0$, 利用正实部函数的 Herglots 表示公式 [9] 得

$$\frac{\beta-p(z)}{\beta-1}=\int_{|x|=1}\frac{1+xz}{1-xz}d\mu(x).$$

由此推出 (2.1) 式成立.

利用引理 2.1, 结合算子 $L_{\lambda,\mu}$ 的可逆性, 用文 [8] 中相同的方法不难证明:

定理 2.1 设 $\alpha>0,\beta>1$, 若 $g(z)\in\bar{V}_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$, 则存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上连续的概率密度 $\eta(x)$, 使得

$$g(z)=L(\lambda+1,\mu)\Big\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\Big[\int_{|x|=1}\frac{1-(2\beta-1)tx}{1-tx}d\eta(x)\Big]dt\Big\} \quad (2.2)$$

或存在 $p(z)\in\bar{P}_k(\beta)$, 使得 $g(z)=L(\lambda+1,\mu)\Big\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}p(t)dt\Big\}$. 对于固定的 λ,α,β, 函数类 $\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$ 与 X 上左连续的概率测度连续点 $\eta(x)$ 以上述关系构成一一对应.

定理 2.2 函数 $f(z)\in\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$ 当且仅当存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上左连续的概率测度 $\eta(x)$, $\mu(x)$, 使得

$$\begin{aligned}f(z) &= L(\lambda+1,\mu)L(1,2)\Big\{\Big[\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\Big(\int_{|x|=1}\frac{1-(2\beta-1)tx}{1-tx}d\eta(x)\Big)dt\Big]\\ &\quad \Big[\int_{|x|=1}\frac{1-(2\rho-1)xt}{1-xt}d\eta(x)\Big]\Big\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

当 $\lambda=0,\mu=1$ 时,

$$\begin{aligned}f(z) &= L(1,2)\Big\{\Big[\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\Big(\int_{|x|=1}\frac{1-(2\beta-1)tx}{1-tx}d\eta(x)\Big)dt\Big]\\ &\quad \Big[\int_{|x|=1}\frac{1-(2\rho-1)tx}{1-tx}d\mu(x)\Big]\Big\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

对于固定的 λ,α,μ,ρ, 函数类 $\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$ 与 X 上左连续的概率测度点 $\Big\{\Big(\eta(x),\mu(x)\Big)\Big\}$ 以上述关系式 (2.3) 构成一一对应.

证 设 $f(z)\in\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$, 则存在 $g(z)\in\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$, 使得

$$\mathrm{Re}\,\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)}{L(\mu,\lambda+1)g(z)}<\rho, z\in U.$$

由定理 1, 可得

$$g(z)=L(\lambda+1,\mu)\Big\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\Big[\int_{|x|=1}\frac{1-(2\beta-1)tx}{1-tx}d\eta(x)\Big]dt\Big\},\tag{2.5}$$

其中 $\eta(x)$ 为 X 上左连续的概率测度.

由引理 2.1 得

$$\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)}{L(\mu,\lambda+1)g(z)}=\int_{|x|=1}\frac{1-(2\rho-1)xz}{1-xz}d\mu(x),\tag{2.6}$$

其中 $\mu(x)$ 为 X 上左连续的概率测度.

由 (2.5), (2.6) 两式推出

$$\begin{aligned}L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z) \quad = \quad &\Big\{\Big[\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\Big(\int_{|x|=1}\frac{1-(2\beta-1)tx}{1-tx}d\eta(x)\Big)dt\Big]\\ &\Big[\int_{|x|=1}\frac{1-(2\rho-1)zx}{1-zx}d\mu(x)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

利用 $L(\mu,\lambda+1)$ 算子的可逆性, 从上式即得 (2.3) 式, 反之亦然; 当 $\lambda=0$ 时, (2.3) 式变为 (2.4) 式. 对于固定的 $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\rho$, 因 $\big\{\big(\eta(x),\mu(x)\big)\big\}$ 与 $\bar{P}_k\times\bar{P}_k$ 之间构成一一对应, 而 $\bar{P}_k\times\bar{P}_k$ 与函数类 $\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$ 之间也是一一对应, 这表明定理的后一个结论为真.

3 偏差定理

引理 3.1 [10] 设 $p(z)=1+p_kz^k+\cdots\in P_k(0)(z\in U,k\geq 1)$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$$\frac{1-r^k}{1+r^k}\leq \mathrm{Re}\,p(z)\leq|p(z)|\leq\frac{1+r^k}{1-r^k}.$$

若 $\mathrm{Re}\,p(z)<\beta(\beta>1)$, 置 $q(z)=\frac{\beta-p(z)}{\beta-1}$, 则 $\mathrm{Re}\,q(z)>0$, 且 $p(z)=\beta-(\beta-1)q(z)$, 于是由引理 3.1 推出

引理 3.2 设 $p(z)=1+p_kz^k+\cdots\in\bar{P}_k(\beta>1,z\in U,k\geq 1)$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$$\frac{1-(2\beta-1)r^k}{1-r^k}\leq \mathrm{Re}\,p(z)\leq|p(z)|\leq\frac{1+(2\beta-1)r^k}{1+r^k}.$$

定理 3.1 设 $\alpha>0,\beta>1,\rho>1,f(z)\in\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1-(2\rho-1)r^k}{\alpha(1-r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)(rt)^k}{1-(rt)^k}dt\leq|L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)|\\ \leq\quad&\frac{1+(2\rho-1)r^k}{\alpha(1+r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1+(2\beta-1)(rt)^k}{1+(rt)^k}dt.\end{aligned}\tag{3.1}$$

证 设 $f(z)\in\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$, 则存在 $g(z)\in\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$, 使得

$$\mathrm{Re}\,\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)}{L(\mu,\lambda+1)g(z)}<\rho, z\in U.$$

令

$$\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)}{L(\mu,\lambda+1)g(z)}=q(z), z\in U,$$

则 $\mathrm{Re}\,q(z)<\rho$.

首先证明 $|L(\mu,\lambda+1)g(z)|$ 的偏差性质, 因 $g(z)\in\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$ 存在 $\mathrm{Re}\,p(z)<\beta$. 由引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}|L(\mu,\lambda+1)g(z)| &\geq \mathrm{Re}\left(L(\mu,\lambda+1)g(z)\right)=\mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)(rt)^k}{1-(rt)^k}dt\Big\}\\ &> \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)t^k}{1-t^k}dt, \qquad (3.2)\\ |L(\mu,\lambda+1)g(z)| &= \Big|\Big\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}p(t)dt\Big\}|\leq\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}|p(zt)|dt\\ &\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1+(2\beta-1)(rt)^k}{1+(rt)^k}dt. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

因为

$$L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)=q(z)L(\mu,\lambda+1)g(z), z\in U,$$

且

$$|L(2,1)L(\mu,\lambda+1)f(z)|=|q(z)L(\lambda+1,1)g(z)|, z\in U, \qquad (3.4)$$

由 (3.2), (3.3) 式和引理 3.2 以及引理 2.1, 得到

$$\begin{aligned}\frac{1-(2\rho-1)r^k}{\alpha(1-r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)(rt)^k}{1-(rt)^k}dt &\leq |q(z)\cdot L(\mu,\lambda+1)g(z)|\\ &\leq \frac{1+(2\rho-1)r^k}{\alpha(1+r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1+(2\beta-1)(rt)^k}{1+(rt)^k}dt,\end{aligned}$$

再利用 (3.4) 式即得 (3.1) 式. 证毕

对函数

$$f(z)=L(\lambda+1,\mu)L(1,2)\Big\{\frac{1-(2\rho-1)z^k}{\alpha(1-z^k)z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)t^k}{1-t^k}dt\Big\} \qquad (3.5)$$

分别取 $z=re^{i\frac{\pi}{k}}, z=r$ 时不等式 (3.1) 式的等号成立.

4 卷积

引理 4.1 [11] 设 $\varphi(z),g(z)$ 在 U 内解析, 满足 $\varphi(0)=h(0),\varphi'(0)\neq0,h'(0)\neq0$, 并且对每个适合 $|\sigma|=|\tau|=1$ 的复数 σ,τ, 有

$$\varphi(x)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}h(z)\neq0(0<|z|<1).$$

设 $F(z)$ 在 U 内解析, 且 $\operatorname{Re} F(z) > 0(0 < |z| < 1)$, 则

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi * \big(F(z)h(z)\big)}{\varphi * h(z)}\right\} > 0 \ (0 < |z| < 1).$$

定理 4.1 设 σ, τ 满足 $|\sigma| = |\tau| = 1$ 的复数,

$$f(z) \in \bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha, \beta, \rho), \phi(z) = z + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{k+1} z^{k+1}$$

在 U 内解析, 且 $\varphi(z) * \frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma} z \neq 0 \ (0 < |z| < 1)$, 则 $f * \phi(z) \in \bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha, \beta, \rho)$.

证 (i) 先证明 $g * \phi(z) \in \bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha, \beta)$. 设

$$F(z) = \beta - [(1-\alpha)\frac{L(\mu, \lambda+1)g(z)}{z} + \alpha\frac{L(2,1)L(\lambda+1, 1)g(z)}{z}], h(z) = z,$$

则 $F(z)$ 在 U 内解析, 且 $\operatorname{Re}F(z) > 0(z \in U), \varphi * h(z) = z$.

由于

$$\begin{aligned} & \varphi * Fh(z) = \varphi(z) * [\beta z - ((1-\alpha)L(\mu, \lambda+1)g(z) + \alpha L(2,1)L(\mu, \lambda+1)g(z))] \\ = \ & \beta z - [(1-\alpha)\varphi * L(\mu, \lambda+1)g(z) + \alpha\varphi * L(2,1)L(\mu, \lambda+1)g(z)] \\ = \ & \beta z - [(1-\alpha)L(\mu, \lambda+1)(\varphi * g)(z) + \alpha L(2,1)L(\mu, \lambda+1)(\varphi * g)(z)]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

利用引理 4.1, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi * \big(F(z)h(z)\big)}{\varphi * h(z)}\right\} = \beta - \operatorname{Re}\Big\{(1-\alpha)\frac{L(\mu, \lambda+1)(\phi * g)(z)}{z} \\ + \alpha\frac{L(2,1)L(\mu, \lambda+1)(\varphi * g)(z)}{z}\Big\} > 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

即

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{L(\mu, \lambda+1)(\varphi * g)(z)}{z} + \alpha\frac{L(2,1)L(\mu, \lambda+1)(\varphi * g)(z)}{z}\right\} < \beta(z \in U),$$

从而 $g * \phi(z) \in \bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha, \beta)$.

(ii) 下面要证明 $f * \varphi(z) \in \bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha, \beta, \rho)$, 设 $f(z) \in \bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha, \beta, \rho)$.

令

$$p(z) = \rho - \frac{L(2,1)L(\mu, \lambda+1)f(z)}{L(\mu, \lambda+1)g(z)}, h(z) = z,$$

则 $p(z)$ 在 U 内解析, 且 $\operatorname{Re}\,(p(z) > 0)(z \in U), \varphi * h(z) = z$. 由于

$$\phi * L(\mu, \lambda+1)g(z) \cdot p(z) = \rho\phi * L(\mu, \lambda+1)g(z) - \phi * L(2,1)L(\mu, \lambda+1)f(z), \tag{4.3}$$

注意到

$$\begin{aligned} & \phi * L(\mu, \lambda+1)g(z) = L(\mu, \lambda+1)(\phi * g)(z), \\ & \phi * L(2,1)L(\mu, \lambda+1)f(z) = L(2,1)L(\mu, \lambda+1)(\phi * f)(z). \end{aligned}$$

由 (4.3) 式得到

$$\operatorname{Re} p(z)=\operatorname{Re}\{\frac{L(2,1)L(\mu,\lambda+1)(\phi*f)(z)}{L(\mu,\lambda+1)(\phi*g)(z)}\}<\rho,$$

其中由 (i) 可知 $\phi*g(z)\in\bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$. 故 $f*\varphi(z)\in\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$.

5 半径问题

从引理 3.2 得到函数类 $\bar{P}_k(\beta)$ 与 $P_k(\tau)(0\le\tau<1)$ 的包含关系.

引理 5.1 设 $\beta>1,z\in U,k\in N,p(z)=1+p_kz^k+\cdots\in\bar{P}_k(\beta)$, 则对 $|z|=r<r_1$, 有

$$\operatorname{Re} p(z)\ge\frac{1-(2\beta-1)r^k}{1-r^k}>0\ (\text{或}\ p(z)\in P_k(0)),\tag{5.1}$$

其中

$$r_1=\inf_{k\ge1}\{\frac{1}{\sqrt[k]{2\beta-1}}\}.\tag{5.2}$$

令

$$P_{\tau,k}=\left\{p(z)=1+p_kz^k+\cdots:p(z)\text{在}U\text{内解析且}|p(z)-\frac{1}{2\tau}|\le\frac{1}{2\tau}\right\}\ (0\le\tau<1).$$

由文 [12] 给出 $P_{\tau,k}$ 和 $P_k(\tau)$ 一种关系.

若 $q(z)=\frac{1}{p(z)},p(z)\in P_{\tau,k}$, 则 $q(z)\in P_k(\tau)$ 且

$$\frac{q'(z)}{q(z)}=-\frac{p'(z)}{p(z)},\tag{5.3}$$

$$|\frac{p'(z)}{p(z)}|\le\frac{2k(1-\tau)|z|^{k-1}}{(1-|z|^k)(1+(1-2\tau)|z|^k)}\ \ (z\in U).$$

引理 5.2 [12] 设 $p(z)\in P_{\tau,k}(0\le\tau<1)$, 则

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|\le\frac{2k(1-\tau)|z|^{k-1}}{(1-|z|^k)(1+(1-2\tau)|z|^k)}\ \ (z\in U).$$

利用 (5.3) 式和引理 5.2 容易推出

引理 5.3 设 $q(z)\in P_k(\tau)(0\le\tau<1)$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$$\left|\frac{zq'(z)}{q(z)}\right|\le\frac{2k(1-\tau)r^k}{(1-r^k)(1+(1-2\tau)r^k)}\ \ (z\in U).\tag{5.4}$$

定理 5.1 设 $\alpha>0,\beta>1,\rho>1,k\ge2,f(z)\in\bar{Q}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta,\rho)$, 则函数 $L(\mu,\lambda+1)f(z)$ 在 $|z|<R=\min\{r_1,r_2\}$ 内是属于 $\bar{C}M_k(\rho)$, r_1 由 (5.2) 式确定, r_2 为方程

$$(\rho-1)-2[m(\rho-1)+k(1-m)]r^k-(\rho-1)(1-2m)r^{2k}=0\tag{5.5}$$

的最小正跟, 其中

$$m=\frac{1}{\alpha}\int_0^1t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)r^k}{1-r^k}dt\in(0,1).\tag{5.6}$$

证 设 $f(z)\in \bar{Q}_{k,\lambda,\rho}(\alpha,\beta,\mu)$, 存在函数 $g(z)\in \bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$.

下面只要证明 $L(\mu,\lambda+1)g(z)$ 在 $|z|<R$ 内属于 $M_k(\rho)$ 即可. 令

$$F(z)=\frac{L(\mu,\lambda+1)g(z)}{z}, \tag{5.7}$$

则 $F(z)$ 在 U 内解析. 若 $g(z)\in \bar{V}_{k,\lambda,\mu}(\alpha,\beta)$, 则利用定理 2.1 和引理 5.1, 存在 $p(z)\in \bar{P}_k(\beta)$, 使得

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} F(z) &= \operatorname{Re}\Big[\frac{L(\mu,\lambda+1)g(z)}{z}\Big] = \operatorname{Re}\Big\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}p(t)dt\Big\}\\ &> m=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(2\beta-1)r^k}{1-r^k}dt. \end{aligned}\tag{5.8}$$

利用 (5.7) 和 (5.8) 式和引理 5.3, 得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\Big\{\frac{z(L(\lambda+1,\mu)g(z))'}{L(\lambda+1,\mu)g(z)}\Big\}=1+\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}\leq 1+\Big|\frac{zF'(z)}{F(z)}\Big|\\ \leq\ &\frac{(1-r^k)(1+(1-2m)r^k)+2k(1-m)r^k}{(1-r^k)(1+(1-2m)r^k)}.\end{aligned}$$

若

$$\frac{(1-r^k)(1+(1-2m)r^k)+2k(1-m)r^k}{(1-r^k)(1+(1-2m)r^k)}<\rho, \tag{5.9}$$

则

$$\operatorname{Re}\Big\{\frac{z(L(\lambda+1,\mu)g(z))'}{L(\lambda+1,\mu)g(z)}\Big\}<\rho,$$

(5.8) 式等价于

$$\frac{(\rho-1)-[m(\rho-1)+k(1-m)]r^k-(\rho-1)(1-2m)r^{2k}}{(1-r^k)(1+(1-2m)r^k)}>0. \tag{5.10}$$

设 $\varphi(r)=(\rho-1)-2[m(\rho-1)+k(1-m)]r^k-(\rho-1)(1-2m)r^{2k}$, 则 $\varphi(r)$ 在 $[0,1]$ 内连续, 且 $\varphi(0)=\rho-1>0$, $\varphi(1)=-2k(1-m)<0$, 所以方程 (5.5) 的最小正根 r_2 在 $(0,1)$ 内, 取 $R=\min\{r_1,r_2\}$, 则函数 $L(\mu,\lambda+1)g(z)$ 在 $M_k(\rho)$ 内属于, 由此推出 $L(\mu,\lambda+1)f(z)$ 在 $|z|<R$ 内属于 $\bar{C}M_k(\rho)$.

注 在定理 (2.1) 至定理 (5.1) 中分别取 $\lambda=0,\lambda=1$ 时, 就得到函数类 $\bar{Q}_{k,0,2}(\alpha,\beta,\rho)$ 和 $\bar{Q}_{k,1,2}(\alpha,\beta,\rho)$ 中函数的相应的结果.

参 考 文 献

[1] Uralegaddi B A, Ganigi M D, Sarangi S M. Univalent functions with positive coefficients [J]. Tamkang J. Math., 1994, 5 (3): 225–230.

[2] Junichi Nishiwaki, Shigeyoshi Owa. Coefficient inequalities for certain analytic functions[J]. IJMMS, 2002, 29(5): 285–290.

[3] Owa S, Nishiwaki J. Coefficient estimates for certain classes of analytic functions [J]. J. Inequal. Pure Appl. Math., 2002, 3: 1–5.

[4] Carlson B C, Shaffer D B. Shaffers starlike and prestarlike hypergeometric functions [J]. SIAM J. Math. Anal., 1984, 15: 737–745.

[5] Choi J H, Saigo M, Srivastava H M. Some inclusion properties of a certain family of integral operators [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 276: 432–445.

[6] Ling Yi, Liu Fengshan. The Choi-Saigo-Srivastava integral operator and a class of analytic functions[J]. Appl. Math. Comp., 2005, 165: 613–621.

[7] 李书海, 木林. 有关近于凸函数的一族解析函数 [J]. 数学杂志, 2005, 25(4): 428–434.

[8] Li Shuhai, DaI Jinjun, Tang Huo. On a class of analytic functions defined by ruscheweyh derivatives[J]. J. Math. Research Exposition, 2009, 29(6): 1095–1101.

[9] Duren P L. Univalent functions [M]. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 259, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

[10] Macgregor T H. Functions whose derivative has a positive real part [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 104: 532–537.

[11] Ruscheweyh St, Sheil-Small. Hadamard Products of schlicht functions and the polya-shoenbehy conjecture[J]. Comment. Math. Helv., 1973, 48: 119–135.

[12] Shaffer D B. Distortion theorem for special classes of analytic functions[J]. Proc. AMS, 1973, 39(2): 281–287.

[13] Liu Mingsheng, Zhu Yucan. The extension operator in Banach speces for locally biholomorphic mappings [J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B (3): 711–720

[14] Rosihan M Ali, Naveen K, Jain V. R. Radii of starlikeness associated with the lemniscate of Bernoulli and the left-half plane[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(11): 6557–6565.

A NEW CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS DEFINED BY CHOI-SAIGO-SRIVASTAVA OPERATOR

LI Shu-hai[1], Burenmandoula [1], YANG Jing-yu[1,2]

(*1.School of Mathematics and Statistics, Chifeng University, Chifeng 024000, China;*)

(*2.School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China.*)

Abstract: In the article, we study the a new class of analytic functions defined by Choi-Saigo-Srivastava operator. By using the analytical method and operator theory, We obtain the integral representations, distortion theorem, Hadamard product and radius of problem,which generalizes the related results of some authors.

Keywords: Choi-Saigo-Srivastava operator; analytic functions; Hadamard product

2010 MR Subject Classification: 30C45; 30C50; 30C75