

定向集指标非交换鞅的几种收敛性

张 艳, 侯友良

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 本文研究了定向集指标非交换鞅的几种收敛性. 利用非交换鞅的理论, 得到了如下结果: 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一个定向集指标的非交换鞅. 则 $\{x_\alpha\}$ 依 L^1 范数收敛 (或弱收敛) 的充要条件是 $\{x_\alpha\}$ 一致可积且满足条件 (B): 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在投影 $e \in \mathcal{M}$, 使得对任意的 $y \in \mathcal{M}$, $\|y\| \leq 1$ 及任意的 $\alpha \in I$, 有 $|\tau(ex_\alpha ey)| < \varepsilon$. 当 $1 < p < \infty$ 时, $\{x_\alpha\}$ 依 L^p 范数收敛 (或弱收敛) 的充要条件是 $\{x_\alpha\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中依 L^p 范数有界. 这也等价于存在一个 $x_\infty \in L^p(\mathcal{M})$, 使得 $x_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(x_\infty)(\alpha \in I)$. 推广了交换情形中的相应结果.

关键词: 定向集; 非交换鞅; 收敛性; 一致可积

MR(2010) 主题分类号: 46L53; 46L52; 60G44

中图分类号: O177.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)05-1159-07

1 引言

近年来随着量子概率理论的发展, 非交换鞅的研究也取得了非常大的进展. 利用泛函分析的方法, 许多经典的鞅不等式及收敛性定理等都已经推广到非交换的情形. 例如, Pisier 和 Xu^[1] 证明了非交换的 Burkholder-Gundy 不等式; Junge^[2] 证明了非交换的 Doob 极大不等式. 把关于经典的鞅的一些结果扩展到非交换鞅的情形, 在大多数情况下绝不是一件容易的工作. 这是因为在经典鞅理论中一些常用的方法, 例如极大函数, 停时方法等等, 不适用于非交换鞅的情形, 这常常需要新的方法. 非交换鞅与数学的很多领域, 比如算子代数理论, 算子空间理论, 量子概率和非交换调和和分析等都有密切的联系. 非交换鞅理论仍在继续发展中.

早在二十世纪七、八十年代, Dang-Ngoc^[3], Cuculescu^[4], 以及 Barnett^[5] 已经研究了非交换鞅的点态收敛性; Goldstein^[6] 研究了非交换鞅的依范数收敛性. 他们研究的主要是离散指标的情形. 然而, 定向集指标与离散指标这两种情形是有差别的. 在经典的情况, Lester^[7] 研究了定向集指标鞅的收敛性问题. 设 (Ω, \mathcal{B}, P) 是一个概率空间, \mathcal{B}_α 是 \mathcal{B} 的一族单调增加的子 σ -代数. 他证明了鞅 $\{x_\alpha, \mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 按范数收敛 (或弱收敛) 的充要条件是: 当 $1 < p < \infty$ 时, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{B})$ 中依范数有界; 当 $p = 1$ 时, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积. 本文把上述结果推广到非交换鞅的情形. Lester^[7] 在他的证明中用到这样一个事实: L^1 空间中的一个子集 K 一致可积的充要条件是 K 在 L^1 中是相对弱紧的. 然而这在非交换的情形是不成立的. 在非交换空间 $L^1(\mathcal{M})$ 中, 一个子集 K 是相对弱紧的并不等价于 K 的一致可积性, 还需要下面提到的条件 (B). 本文的主要结果是, 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 鞅, 则如下四条性质等价:

*收稿日期: 2014-06-28 接收日期: 2014-09-15

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271293).

作者简介: 张艳 (1990-), 女, 河南焦作, 硕士, 主要研究方向: H_p 鞅空间.

(P1) 当 $1 < p < \infty$ 时, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中依范数有界; 当 $p = 1$ 时, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积且满足条件

(B) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在投影 $e \in \mathcal{M}$, 使得对任意的 $y \in \mathcal{M}$, $\|y\| \leq 1$ 及任意的 $\alpha \in I$, 有 $|\tau(ex_\alpha ey)| < \varepsilon$.

(P2) 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中弱收敛.

(P3) 存在 $x_\infty \in L^p(\mathcal{M})$, 使得网 $\{x_\alpha, \alpha \in I_\infty\}$ 是一个鞅, 即对任意的 $\alpha \in I$ 有 $x_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(x_\infty)$.

(P4) 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中按范数收敛.

上述结果是 Lester [7] 中的主要结果的非交换类比.

2 预备知识

设 \mathcal{M} 是定义在 Hilbert 空间 H 上的 von Neumann 代数. τ 是 \mathcal{M} 上正规、忠实、有限的迹, 满足 $\tau(1) = 1$. 设 $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ 是由满足

$$\tau(|x|^p) = \|x\|_p^p < \infty$$

的可测算子组成的空间, 则 $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 Banach 空间. 下面把 $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ 简记为 $L^p(\mathcal{M})$. 约定 $L^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. 熟知 $L^p(\mathcal{M})$ 的对偶空间是 $L^q(\mathcal{M})$, 其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$. 设 \mathcal{N} 是 \mathcal{M} 的一个子 von Neumann 代数, 则存在一个 \mathcal{M} 到 \mathcal{N} 的正的收缩的投影 \mathcal{E} , 满足

(i) $\mathcal{E}(axb) = a\mathcal{E}(x)b$, $x \in \mathcal{M}, a, b \in \mathcal{N}$;

(ii) $\tau(\mathcal{E}(x)) = \tau(x)$, $x \in \mathcal{M}$,

称 \mathcal{E} 为 \mathcal{M} 到 \mathcal{N} 的条件期望, 记为 $\mathcal{E}(\cdot|\mathcal{N})$. \mathcal{E} 可以延拓为 $L^p(\mathcal{M})$ 到 $L^p(\mathcal{N})$ 的正的收缩投影, 仍然记为 \mathcal{E} . 关于非交换 L^p 空间的更详细内容参见文 [8].

设 (I, \geq) 是一个半序集. 如果 (I, \geq) 进一步满足如下条件: 对任意的 $\alpha, \beta \in I$, 都存在 $\gamma \in I$, 使得 $\gamma \geq \alpha$ 并且 $\gamma \geq \beta$, 则称偶 (I, \geq) 是一个定向集. 为了方便, 将元 “ ∞ ” 加到集合 I 中, 令 $I_\infty = I \cup \{\infty\}$, 并且规定: 对任意的 $\alpha \in I$, 都有 $\infty \geq \alpha$.

设 (I, \geq) 是一个定向集. 称集合 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 为 $L^p(\mathcal{M})$ 中的一个网, 若对每个 $\alpha \in I$, 有 $x_\alpha \in L^p(\mathcal{M})$. 若 (J, \succ) 是另一个定向集, 并且映射 $g: J \rightarrow I$ 满足: 对任意的 $\alpha \in I$, 都存在 $\beta' \in J$, 使得对任意的 β 满足 $\beta \succ \beta'$, 都有 $g(\beta) \geq \alpha$, 则称网 $\{x_{g(\beta)}, \beta \in J\}$ 是 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 的一个子网.

设 \mathcal{M} 是一个 von Neumann 代数. 以下总是设 $\{\mathcal{M}_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 \mathcal{M} 的一族单调增加的子 von Neumann 代数, 即当 $\alpha \geq \beta$ 时, $\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{M}_\beta$. 记 $\mathcal{M}_I = \bigvee_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 是包含 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 的最小 von Neumann 代数. 熟知按照弱拓扑 (σ -弱拓扑, 强拓扑, σ -强拓扑) $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 在 \mathcal{M}_I 中是稠密的.

以下把 x 关于 \mathcal{M}_α 和 \mathcal{M}_I 的条件期望分别记为 $\mathcal{E}_\alpha(x)$ 和 $\mathcal{E}_I(x)$.

设 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 $L^1(\mathcal{M})$ 中的网. 如果满足对任意 $\beta \geq \alpha$ 有 $\mathcal{E}_\alpha(x_\beta) = x_\alpha$, 则称 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 为关于 $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in I}$ 的鞅, 记为 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$. 在不至于引起混淆的情况下, 可以简记为 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$. 若对任意的 $\alpha \in I$ 有 $x_\alpha \in L^p(\mathcal{M})$, 则称 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 为 $L^p(\mathcal{M})$ 鞅, 其中 $p \geq 1$. 此时令 $\|x\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|_p$. 若 $\|x\|_p < \infty$, 则称 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 为 L^p -有界鞅.

3 主要结果

这节我们要证明引言中提到的关于定向集指标非交换鞅的按范数收敛(或弱收敛)的等价条件, 即证明命题 (P1)–(P4) 的等价性. 为了叙述的方便, 我们先列出在证明过程中要用到两个引理.

引理 3.1 [8] 设 $1 \leq p < \infty$, \mathcal{A} 是 \mathcal{M} 的一个 w^* 稠密对合子代数且满足 $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, 则 \mathcal{A} 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中稠密.

注 在引理 3.1 中, $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{M} : \tau(s(x)) < \infty\}$, 称 \mathcal{S} 中的元是支撑迹有限的. 因为本文中定义的迹是有限的, 所以 $\mathcal{S} = \mathcal{M}$.

引理 3.2 [5] 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 鞅, 其中 $p \geq 1$. 则以下两个陈述等价:

(i) 存在 $x \in L^p(\mathcal{M})$, 使得 $x_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(x)$ 并且 $x_\alpha \xrightarrow{L^p} x$.

(ii) $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中是相对弱紧的.

下面用 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 表示 \mathcal{M} 中的投影全体组成的集合. 用 $S(\mathcal{M})$ 表示 \mathcal{M} 中投影的有限线性组合所组成的空间.

引理 3.3 设 $S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 是 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 中投影的有限线性组合所组成的空间. 则 $S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 在 $L^p(\mathcal{M}_I)$ 中稠密, 其中 $1 \leq p < \infty$.

证 显然 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 是 \mathcal{M}_I 的一个对合子代数. 因为按照 σ -弱拓扑 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 在 \mathcal{M}_I 中是稠密的, 而任何一个 von Neumann 代数上的 w^* 拓扑和 σ -w 拓扑是一致的, 所以 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 在 \mathcal{M}_I 中是 w^* 稠密的. 由引理 3.1 知道 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 依 p 范数在 $L^p(\mathcal{M}_I)$ 中稠密. 另一方面, 对任意的 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$, 存在 $\alpha \in I$, 使得 $x \in \mathcal{M}_\alpha$. 因为 $S(\mathcal{M}_\alpha)$ 在 \mathcal{M}_α 中依算子范数稠密, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in S(\mathcal{M}_\alpha) \subset S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$, 使得

$$\|x - y\|_p \leq \|x - y\| < \varepsilon.$$

这说明依 p 范数 $S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 在 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 中稠密. 于是 $S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 在 $L^p(\mathcal{M}_I)$ 中稠密. 引理证毕.

仿照文献 [4] 中关于离散指标非交换鞅一致可积性的定义, 我们给出定向集指标非交换鞅的一致可积的定义.

定义 3.4 一个鞅 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 称为一致可积的, 若 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 L^1 有界的并且

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\tau(yx_\alpha) : \alpha \in I, y \in \mathcal{M}_I, \|y\| \leq 1, \|y\|_1 < \varepsilon\} = 0.$$

引理 3.5 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^1(\mathcal{M})$ 鞅, 并且 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积. 若 $y \in S(\mathcal{M}_I)$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha_0 \in I$, 使得当 $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ 时, 有 $|\tau(y(x_\beta - x_\alpha))| < \varepsilon$.

证 只需对 $y \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_I)$ 证明即可. 由于 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $z \in \mathcal{M}_I$ 并且满足 $\|z\| \leq 1$ 及 $\|z\|_1 < \delta$ 时, 对任意的 $\alpha \in I$ 有 $|\tau(zx_\alpha)| < \varepsilon/2$. 由引理 3.3 知道, 对上述的 $\delta > 0$, 存在 $y_0 \in S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$, 使得 $\|y - y_0\|_1 < \delta$. 因此

$$\begin{aligned} |\tau(y(x_\beta - x_\alpha))| &\leq |\tau((y - y_0)x_\beta)| + |\tau((y - y_0)x_\alpha)| + |\tau(y_0(x_\beta - x_\alpha))| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |\tau(y_0(x_\beta - x_\alpha))|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

因为 $y_0 \in S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$, 故存在 $\alpha_0 \in I$ 使得 $y_0 \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$. 由于 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是鞅, 因此当 $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ 时,

$$|\tau(y_0(x_\beta - x_\alpha))| = |\tau \mathcal{E}_{\alpha_0}(y_0(x_\beta - x_\alpha))| = |\tau(y_0(\mathcal{E}_{\alpha_0}(x_\beta - x_\alpha)))| = 0.$$

再由 (3.1) 式得到 $|\tau(y(x_\beta - x_\alpha))| < \varepsilon$. 引理证毕.

引理 3.6 设 $1 < p < \infty$, $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 鞅. 则对任意 $y \in S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$, 存在 $\alpha_0 \in I$, 使得当 $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ 时, $\tau(y(x_\beta - x_\alpha)) = 0$.

证 只需对 $y \in \mathcal{P}(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 证明即可. 因为 $y \in \mathcal{P}(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$, 所以存在 $\alpha_0 \in I$ 使得 $y \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$. 由于 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是鞅, 因此当 $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ 时,

$$\tau(y(x_\beta - x_\alpha)) = \tau \mathcal{E}_\alpha(y(x_\beta - x_\alpha)) = \tau(y \mathcal{E}_\alpha(x_\beta - x_\alpha)) = 0.$$

引理证毕.

下面的引理 3.7 虽然没有直接涉及到鞅, 但是它在证明 (P1) \Rightarrow (P2) 的过程中起着非常重要的作用.

引理 3.7 设 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 中的网, $1 \leq p < \infty$.

(i) 若 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积且满足条件 (B), 则 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中有一个弱聚点.

(ii) 若 $1 < p < \infty$, $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 中依范数有界的子集. 则 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中有一个弱聚点.

证 (i) 令 $E = \{x_\alpha, \alpha \in I\}$. 根据 [9, 引理 2.14], E 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中相对弱紧的充要条件是 E 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中一致可积且满足条件 (B). 故由题设条件知道 E 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中相对弱紧. 于是 E 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中有一个弱收敛子列, 即 E 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中有一个弱聚点.

(ii) 当 $1 < p < \infty$ 时, $L^p(\mathcal{M})$ 是 $L^q(\mathcal{M})$ 的对偶空间, 这里 $p^{-1} + q^{-1} = 1$. 既然 E 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中是有界的, 故它在 $L^p(\mathcal{M})$ 中是相对弱紧的, 因此 E 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中有一个弱聚点. 引理证毕.

从下面的定理 3.8 和定理 3.9 可以得到 (P1) \Rightarrow (P2).

定理 3.8 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^1(\mathcal{M})$ 鞅. 如果 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中一致可积且满足条件 (B), 则网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中弱收敛.

证 要证明的是存在 $x \in L^1(\mathcal{M})$, 使得对任意的 $z \in \mathcal{M}$, 有

$$\lim_{\alpha \in I} \tau(zx_\alpha) = \tau(zx). \quad (3.2)$$

我们分三步证明.

(i) 首先证明存在 $x \in L^1(\mathcal{M})$, 对任意的 $z \in S(\mathcal{M}_I)$, (3.2) 式成立. 由定理的条件和引理 3.7 知道, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 有一个弱聚点 $x \in L^1(\mathcal{M})$. 故存在 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 的子网 $\{x_{g(\beta)}, \beta \in J\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中弱收敛到 x , 于是对任意的 $z \in S(\mathcal{M}_I)$ 有

$$\lim_{\beta \in J} \tau(zx_{g(\beta)}) = \tau(zx). \quad (3.3)$$

根据引理 3.5 知道, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha_0 \in I$, 使得当 $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ 时有

$$|\tau(z(x_\beta - x_\alpha))| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.4)$$

又由子网的定义知道, 存在 $\beta' \in J$, 使得当 $\beta \succ \beta'$ 时有 $g(\beta) \geq \alpha_0$. 由 (3.3) 式知道存在 $\beta_0 \in J$ (不妨设 $\beta_0 \succ \beta'$), 使得当 $\beta \succ \beta_0$ 时,

$$|\tau(zx_{g(\beta)}) - \tau(zx)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.5)$$

对任意的 $\alpha \in I$, 当 $\alpha \geq g(\beta_0)$ 时, 由 (3.4)、(3.5) 两式得到

$$|\tau(zx_\alpha) - \tau(zx)| \leq |\tau(z(x_\alpha - x_{g(\beta_0)}))| + |\tau(z(x_{g(\beta_0)} - x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.6)$$

因此对任意的 $z \in S(\mathcal{M}_I)$, (3.2) 式成立.

(ii) 再证明对任意的 $z \in \mathcal{M}_I$ 有 (3.2) 式成立. 由于 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中一致可积, 所以 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中按范数有界. 设 $\sup_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|_1 = k < \infty$. 由于 $S(\mathcal{M}_I)$ 在 \mathcal{M}_I 中依范数稠密, 所以对 $z \in \mathcal{M}_I$, 存在 $z_\varepsilon \in S(\mathcal{M}_I)$, 使得

$$\|z - z_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2(k + \|x\|_1)}. \quad (3.7)$$

由第一步已经证明的结论知道, 存在 $\alpha_\varepsilon \in I$, 使得当 $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ 时有

$$|\tau(z_\varepsilon(x_\alpha - x))| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.8)$$

由 (3.7)、(3.8) 两式得到

$$\begin{aligned} |\tau(zx_\alpha) - \tau(zx)| &\leq |\tau((z - z_\varepsilon)x_\alpha)| + |\tau(z_\varepsilon(x_\alpha - x))| + |\tau((z - z_\varepsilon)x)| \\ &< \|z - z_\varepsilon\|(\|x_\alpha\|_1 + \|x\|_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即对任意的 $z \in \mathcal{M}_I$, (3.2) 式成立.

(iii) 最后考虑 $z \in \mathcal{M}$ 的情形. 由于 $\mathcal{E}_I(z) \in \mathcal{M}_I$, 由第二步已经证明的结果, 我们有

$$\lim_{\alpha \in I} \tau(\mathcal{E}_I(z)x_\alpha) = \tau(\mathcal{E}_I(z)x).$$

因为 $x_\alpha \in L^1(\mathcal{M}_I)$ ($\alpha \in I$), 所以 $x \in L^1(\mathcal{M}_I)$. 由条件期望算子的保迹性, 根据上式得到

$$\lim_{\alpha \in I} \tau(zx_\alpha) = \lim_{\alpha \in I} \tau(\mathcal{E}_I(zx_\alpha)) = \lim_{\alpha \in I} \tau(\mathcal{E}_I(z)x_\alpha) = \tau(\mathcal{E}_I(z)x) = \tau(zx).$$

即对任意的 $z \in \mathcal{M}$, (3.2) 式成立. 定理证毕.

定理 3.9 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 鞅 ($1 < p < \infty$), 并且集 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 按范数有界, 则网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中弱收敛.

证 要证明的是存在 $x \in L^p(\mathcal{M})$, 使得对任意的 $z \in L^q(\mathcal{M})$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$), 有 (3.2) 式成立. 首先说明对任意的 $z \in S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 有 (3.2) 式成立. 由引理 3.7 知道, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 有一个弱聚点 $x \in L^p(\mathcal{M})$. 故存在子网 $\{x_{g(\beta)}, \beta \in J\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中弱收敛到 x . 于是对任意的 $z \in S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$, 有 (3.3) 式成立. 根据引理 3.6, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha_\varepsilon \in I$, 使得当 $\beta \geq \alpha \geq \alpha_\varepsilon$ 时有 $|\tau(z(x_\beta - x_\alpha))| = 0$.

与定理 3.8 证明的第一步类似, 可以证明对任意的 $z \in S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 有 (3.2) 式成立. 余下的证明过程与定理 3.8 的第二步, 第三步类似, 只不过第二步要用到 $S(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha)$ 在 $L^p(\mathcal{M}_I)$ 中的稠密性. 详细过程从略. 定理证毕.

从下面的定理 3.10 可以得到 (P2) \Rightarrow (P3).

定理 3.10 设 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 鞅 ($1 \leq p < \infty$). 若网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中弱收敛到 x_∞ , 则网 $\{x_\alpha, \alpha \in I_\infty\}$ 是一个鞅.

证 任取 $\alpha_0 \in I$. 由鞅的定义知道, 对任意的 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\alpha_0})$, 当 $\beta \in I, \beta \geq \alpha_0$ 时有

$$\tau(ex_\beta) = \tau\mathcal{E}_{\alpha_0}(ex_\beta) = \tau(e\mathcal{E}_{\alpha_0}(x_\beta)) = \tau(ex_{\alpha_0}).$$

由于 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中弱收敛到 x_∞ , 利用上式得到

$$\tau(ex_{\alpha_0}) = \lim_{\beta \in I} \tau(ex_\beta) = \tau(ex_\infty) = \tau(e\mathcal{E}_{\alpha_0}(x_\infty)). \quad (3.9)$$

令 $y = (x_{\alpha_0} - \mathcal{E}_{\alpha_0}(x_\infty))^*$, 则 $y \in L^p(\mathcal{M}_{\alpha_0})$. 由于 \mathcal{M}_{α_0} 依 p 范数在 $L^p(\mathcal{M}_{\alpha_0})$ 中稠密, 又因为 $S(\mathcal{M}_{\alpha_0})$ 依 p 范数在 \mathcal{M}_{α_0} 中稠密, 故存在 $y_n \in S(\mathcal{M}_{\alpha_0})$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $y_n \xrightarrow{L^p} y$, 由此推出 $y_n \xrightarrow{w} y (n \rightarrow \infty)$. 利用 (3.9) 式得到

$$\tau(|y|^2) = \tau(y^*y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(y_n^*y_n) = 0.$$

由 τ 的忠实性得到 $y = 0$. 这就证明了对任意的 $\alpha_0 \in I$ 有 $x_{\alpha_0} = \mathcal{E}_{\alpha_0}(x_\infty)$. 因此网 $\{x_\alpha, \alpha \in I_\infty\}$ 是一个鞅. 定理证毕.

从下面的定理 3.11 可以得到 (P3) \Rightarrow (P4).

定理 3.11 若 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I_\infty}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 中的鞅 ($1 \leq p < \infty$). 则网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中收敛到 $\mathcal{E}_I(x_\infty)$.

证 由于对任意的 $\alpha \in I$, 有 $x_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(x_\infty) = \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{E}_I(x_\infty))$. 因此 x_∞ 可以用 $\mathcal{E}_I(x_\infty)$ 代替, 即可设 x_∞ 关于 \mathcal{M}_I 可测. 由于 $x_\infty \in L^p(\mathcal{M}_I)$, 并且由引理 3.3 的证明过程知道 $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ 在 $L^p(\mathcal{M}_I)$ 中稠密, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$, 使得 $\|x_\infty - y\|_p < \varepsilon/2$. 所以对任意的 $\alpha \in I$ 有

$$\begin{aligned} \|x_\infty - x_\alpha\|_p &= \|x_\infty - \mathcal{E}_\alpha(x_\infty)\|_p \leq \|x_\infty - y\|_p + \|y - \mathcal{E}_\alpha(y)\|_p + \|\mathcal{E}_\alpha(x_\infty - y)\|_p \\ &\leq 2\|x_\infty - y\|_p + \|y - \mathcal{E}_\alpha(y)\|_p < \varepsilon + \|y - \mathcal{E}_\alpha(y)\|_p. \end{aligned} \quad (3.10)$$

由于 $y \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$, 故存在 $\alpha_0 \in I$ 使得 $y \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$. 故当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时有 $y = \mathcal{E}_\alpha(y)$. 因此 (3.10) 式表明对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha_0 \in I$ 使得当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, $\|x_\infty - x_\alpha\|_p < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{\alpha \in I} \|x_\alpha - x_\infty\|_p = 0.$$

定理证毕.

由于在 $L^p(\mathcal{M})$ 中依范数收敛可以推出弱收敛, 所以 (P4) \Rightarrow (P2). 再结合定理 3.10 和定理 3.11 得到 (P2) - (P4) 是等价的. 所以要证明 (P4) \Rightarrow (P1), 只需证明 (P3) \Rightarrow (P1) 即可. 下面的定理 3.12 说明 (P3) \Rightarrow (P1).

定理 3.12 设 $1 \leq p < \infty$, $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I_\infty}$ 是 $L^p(\mathcal{M})$ 中的鞅. 则网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中依范数有界. 并且当 $p = 1$ 时, 网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积且满足条件 (B).

证 由于 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I_\infty}$ 是鞅, 故存在 $x_\infty \in L^p(\mathcal{M})$, 使得对任意的 $\alpha \in I$, 有 $\mathcal{E}_\alpha(x_\infty) = x_\alpha$. 因此得到

$$\|x_\alpha\|_p = \|\mathcal{E}_\alpha(x_\infty)\|_p \leq \|x_\infty\|_p.$$

于是网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^p(\mathcal{M})$ 中依范数有界.

当 $p = 1$ 时, 因为 $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I_\infty}$ 是鞅, 所以由定理 3.11 知道网 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中收敛到 x_∞ . 结合引理 3.2 知道 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中是相对弱紧的. 再由文 [9, 引理 2.14] 得到 $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ 一致可积且满足条件 (B). 定理证毕.

参 考 文 献

- [1] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative martingale inequalities[J]. *Comm. Math. Phys.*, 1997, 189: 667–698.
- [2] Junge M. Doob's inequality for non-commutative martingales[J]. *J. Reine Angew. Math.*, 2002, 549: 149–190.
- [3] Dang-Ngoc N. Pointwise convergence of martingale in von Neumann algebra[J]. *Israel J. Math.*, 1979, 34: 273–280.
- [4] Cuculescu I. Martingale on von Neumann algebras[J]. *J. Multivariate Anal.*, 1971, 1: 17–27.
- [5] Barnett C. Supermartingales on semi-finite von Neumann algebras[J]. *J. London Math. Soc.*, 1981, 24(2): 175–181.
- [6] Goldstein S. Norm convergence of martingales in L^p -space over von Neumann algebras[J]. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1987, 32: 531–541.
- [7] Helms Lester L. Mean convergence of martingales[J]. *Transac. American Math. Society*, 1958, 87(2): 439–446.
- [8] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative L^p -spaces[M]. Vol. II, Holland: Elsevier, 2003.
- [9] Barnett C. Non abelian stochastic processes[M]. UK: Hull University, 1980.
- [10] Zhang Chao, Hou Youliang. Convergence of weighted averages of martingales[J]. *Sci. China Math.*, 2013, 56: 823–830.
- [11] Zhang Chao, Hou Youliang. Convergence of weighted averages of martingales in noncommutative Banach function spaces[J]. *Acta Math. Scientia*, 2012, 32B(2): 735–744.

CONVERGENCE OF NONCOMMUTATIVE MARTINGALES INDEXED BY DIRECTED SETS

ZHANG Yan , HOU You-liang

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, we discuss the convergence of noncommutative martingales indexed by directed sets. According to the theory of noncommutative martingales, we come to the following conclusions: Let $\{x_\alpha, \mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ be a noncommutative martingale with a directed index set. Then $\{x_\alpha\}$ converges in L^1 -norm(or weakly) if and only if $\{x_\alpha\}$ is uniformly integrable and satisfies the condition (B): for each $\varepsilon > 0$ there is a projection $e \in \mathcal{M}$ such that $|\tau(ex_\alpha ey)| < \varepsilon$ for any $y \in \mathcal{M}$, $\|y\| \leq 1$ and any $\alpha \in I$. When $1 < p < \infty$, $\{x_\alpha\}$ converges in L^p -norm(or weakly) if and only if $\{x_\alpha\}$ is L^p -bounded in $L^p(\mathcal{M})$. It is also equivalent to that there exists an $x_\infty \in L^p(\mathcal{M})$ such that $x_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(x_\infty)(\alpha \in I)$. It generalizes the corresponding conclusions in the commutative condition.

Keywords: directed set; noncommutative martingale; convergence; uniform integrability

2010 MR Subject Classification: 46L53; 46L52; 60G44