

Euclid 域中 Diophantus 方程的整数解

邬毅, 龙兰

(重庆科技学院数理学院, 重庆 401331)

摘要: 本文研究了两个典型 Diophantus 方程的整数解的问题. 利用二次域中的重要理论和二次代数整数环中算术基本定理, 获得了两个典型 Diophantus 方程在 Euclid 域中的所有整数解, 推广了文献 [6] 的结果.

关键词: 整数解; Diophantus 方程; Euclid 域

MR(2010) 主题分类号: 11D45; 11D75

中图分类号: O156.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)04-1012-05

1 引言

作为代数数论中的重要组成部分, 二次域及二次域中的算术对研究 Diophantus 方程有着重要作用. 对某些 D , 其二次域 $Q(\sqrt{D})$ 是 Euclid 域, 因此在这些二次代数整数环 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 中算术基本定理成立, 我们可以建立和 Z 中同样的整除理论去求解某些 Diophantus 方程. 关于用代数数论知识解答 Diophantus 方程 $x^2 + D = 4p^n$ ($D > 0$) 已经有不少研究工作, 特别是通过研究虚二次域类数的可除性来研究 Diophantus 方程 $x^2 + D = 4p^n$ (D 是适合 $p \nmid D$ 的正奇数, 且 $D \neq 4p^r - 1$, 其中 r 是正整数) 的解数. 为了利用二次域中的重要理论、二次代数整数环 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 中算术基本定理来研究 Diophantus 方程, 我们先引入 $Z[i]$ 中的整除理论, 它是在唯一分解整环中的性质的一个直接推广.

定义 1.1 [1] 设 $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{Q}(\sqrt{D})$ 是 $Q(\sqrt{D})$ 的一组基, 如果任意的 $\theta \in \tilde{Q}(\sqrt{D})$ 必可表为 $\theta = u\omega_1 + v\omega_2$, 其中 $u, v \in Z$, 则称 ω_1, ω_2 是 $Q(\sqrt{D})$ 的一组整基, 它也称为是 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 的一组基.

定义 1.2 [1] 设 $\alpha, \beta \in M$, 若存在 ε 使 $\beta = \varepsilon \odot \alpha$, 则称 β 是 α 的相伴数, 记作 $\beta \sim \alpha$.

定理 1.1 [1] 在二次域 $Q(\sqrt{D})$ 中的单位数是:

- (1) 当 $D = -2$ 或 $D \geq -5$ 时, 仅有 ± 1 ;
- (2) 当 $D = -1$ 时, 有 $\pm 1, \pm i$;
- (3) 当 $D = -3$ 时, 有 $\pm 1, \pm 1/2 \pm \sqrt{-3}/2$;
- (4) 当 $D > 1, D \equiv 2, 3 \pmod{4}$ 时, 有

$$\pm(m_0 + n_0\omega)^k = \pm(m_0 + n_0\sqrt{D})^k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 $\omega = \sqrt{D}$, m_0, n_0 是 Pell 方程 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ 的最小正解;

*收稿日期: 2014-01-22

接收日期: 2014-06-20

基金项目: 重庆科技学院优秀中青年骨干教师公派出国(境)深造项目(2012).

作者简介: 邬毅(1982-), 男, 重庆, 讲师, 主要研究方向: 数论.

(5) 当 $D > 1$, $D \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 有

$$\pm(m_0 + n_0\omega)^k = \pm((m_0 - n_0/2) + n_0\sqrt{D}/2)^k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 $\omega = -1/2 + \sqrt{D}/2$, $2m_0 - n_0, n_0$ 是 Pell 方程 $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ 的最小正解. $m_0 + n_0\omega$ 称为实二次域 $Q(\sqrt{D})$ 的基本单位数.

定理 1.2 ^[2] (算术基本定理) 任一大于 1 的整数能表成质数的乘积, 即任一大于 1 的整数

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n, \quad p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n,$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_n 是质数, 并且若

$$a = q_1 q_2 \cdots q_m, \quad q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_m,$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_m 是质数, 则

$$m = n, \quad q_i = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

定理 1.3 ^[1] 设 M 是唯一分解环, 正整数 $k > 2$, 以及 $\alpha, \beta \in M$, $(\alpha, \beta) = \bar{1}$, 那么, 若 $\alpha\beta = \gamma^k$, $\gamma \in M$, 则有 $\alpha = \varepsilon_1\mu^k$, $\beta = \varepsilon_2\nu^k$, $\mu, \nu \in M$, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 M 中的单位, 且 $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon^k$, ε 为单位.

2 主要结果的证明

利用二次域中的重要理论和二次代数整数环 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 中算术基本定理, 以下给出两个典型的 Diophantus 方程

$$x^2 + D = 4y^5,$$

其中 $D = 7, -5$ 时的所有整数解.

结论 I 当 $D = 7$ 时, Diophantus 方程

$$x^2 + 7 = 4y^5, \quad x, y \in Z \tag{2.1}$$

仅有整数解 $(\pm 11, 2)$.

证 Diophantus 方程 (2.1) 可以化为

$$\left(\frac{x + \sqrt{-7}}{2}\right) \left(\frac{x - \sqrt{-7}}{2}\right) = y^5. \tag{2.2}$$

由于 $Q(\sqrt{-7})$ 为 Euclid 域 ^[3], 我们则可以在 $\tilde{Q}(\sqrt{-7})$ 中来讨论 Diophantus 方程 (2.2).

由定理 1.1 和定义 1.1 得, 在二次域 $Q(\sqrt{-7})$ 中仅有单位数 ± 1 , 且 1 和 $(-1 + \sqrt{-7})/2$ 是一组整基. 设

$$\delta = \left(\frac{x + \sqrt{-7}}{2}, \frac{x - \sqrt{-7}}{2}\right),$$

显然 $\delta | x$, $\delta | \sqrt{-7}$, 因为 $\sqrt{-7}$ 是素数, 所以必有 $\delta = 1$ 或 $\sqrt{-7}$. 但 $\delta = \sqrt{-7}$ 不可能, 因为此时必有 $7 | x$, 而这样的 x 显然不是解, 所以 $\delta = 1$, 即 $(x + \sqrt{-7})/2$ 与 $(x - \sqrt{-7})/2$ 互素. 由定理 1.3 及单位数的形式知

$$\frac{x + \sqrt{-7}}{2} = \left(\frac{a + b\sqrt{-7}}{2}\right)^5,$$

即

$$2^4(x + \sqrt{-7}) = (a + b\sqrt{-7})^5,$$

从而有

$$2^4(x + \sqrt{-7}) = a^5 + 5a^4b\sqrt{-7} - 70a^3b^2 - 70a^2b^3\sqrt{-7} + 245ab^4 + 49b^5\sqrt{-7}.$$

由此得到

$$2^4x = a^5 - 70a^3b^2 + 245ab^4 = a(a^4 - 70a^2b^2 + 245b^4),$$

即

$$2^4 = 5a^4b - 70a^2b^3 + 49b^5 = b(5a^4 - 70a^2b^2 + 49b^4),$$

于是必有 $a = \pm 1, b = -1$, 进而有 $(x, y) = (\pm 11, 2)$, 证毕.

结论 II 当 $D = -5$ 时, Diophantus 方程

$$x^2 - 5 = 4y^5, \quad x, y \in Z \quad (2.3)$$

仅有整数解 $(\pm 1, -1)$ 和 $(\pm 3, 1)$.

证 Diophantus 方程 (2.3) 可以化为

$$\left(\frac{x + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{x - \sqrt{5}}{2}\right) = y^5. \quad (2.4)$$

由于 $Q(\sqrt{5})$ 为 Euclid 域^[3], 我们则可以在 $\tilde{Q}(\sqrt{5})$ 中来讨论不 Diophantus 方程 (2.4).

由定理 1.1 和定义 1.1 得, 在二次域 $Q(\sqrt{5})$ 中 1 和 $\omega = (-1 + \sqrt{5})/2$ 是一组整基, 单位数有无穷多个 $\pm(1 + \omega)^n$. 设

$$\delta = \left(\frac{x + \sqrt{5}}{2}, \frac{x - \sqrt{5}}{2}\right),$$

显然 $\delta|x, \delta|\sqrt{5}$, 因为 $\sqrt{5}$ 是素数, 所以必有 $\delta = 1$ 或 $\sqrt{5}$. 但 $\delta = \sqrt{5}$ 不可能, 因为此时必有 $5|x$, 而这样的 x 显然不是解, 所以 $\delta = 1$, 即 $(x + \sqrt{5})/2$ 与 $(x - \sqrt{5})/2$ 互素. 又因 $5 \equiv 1 \pmod{4}$, 由其单位数的形式, 不妨令 $y = (a + b\sqrt{5})/2$, 又因为 $Q(\sqrt{5})$ 是实二次域, 则 Diophantus 方程 (2.3) 可以分为以下两种情形讨论:

情形 (1)

$$\frac{x + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{a + b\sqrt{5}}{2}\right)^5. \quad (2.5)$$

情形 (2)

$$\frac{x + \sqrt{5}}{2} = \pm(1 + \omega)^n \left(\frac{a + b\sqrt{5}}{2}\right)^5, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6)$$

若 (2.5) 式成立, 则有

$$2^4(x + \sqrt{5}) = (a + b\sqrt{5})^5,$$

故有

$$2^4(x + \sqrt{5}) = a^5 + 5a^4b\sqrt{5} + 50a^3b^2 + 50a^2b^3\sqrt{5} + 125ab^4 + 25b^5\sqrt{5}.$$

由此得到

$$2^4x = a^5 + 50a^3b^2 + 125ab^4 = a(a^4 + 50a^2b^2 + 125b^4),$$

即

$$2^4 = 5a^4b + 50a^2b^3 + 25b^5 = b(5a^4 + 50a^2b^2 + 25b^4).$$

这是不可能的;

若 (2.6) 式成立, 当 $n = 1$ 时有

$$\frac{x + \sqrt{5}}{2} = \pm(1 + \omega) \left(\frac{a + b\sqrt{5}}{2} \right)^5,$$

由此得到

$$2^5(x + \sqrt{5}) = \pm(1 + \sqrt{5})(a + b\sqrt{5})^5.$$

故有

$$a^5 + 50a^3b^2 + 125ab^4 + 25a^4b + 250a^2b^3 + 125b^5 = \pm 2^5x,$$

即

$$5a^4b + 50a^2b^3 + 25b^5 + a^5 + 50a^3b^2 + 125ab^4 = \pm 2^5,$$

从而有 $a = \pm 2, b = 0$, 进而有 $(x, y) = (\pm 1, -1)$.

当 $n = 2$ 时有

$$\frac{x + \sqrt{5}}{2} = \pm(1 + \omega)^2 \left(\frac{a + b\sqrt{5}}{2} \right)^5,$$

由此得到

$$2^6(x + \sqrt{5}) = \pm(1 + \sqrt{5})^2(a + b\sqrt{5})^5.$$

故有

$$6a^5 + 300a^3b^2 + 750ab^4 + 50a^4b + 500a^2b^3 + 250b^5 = \pm 2^6x,$$

即

$$30a^4b + 300a^2b^3 + 150b^5 + 2a^5 + 100a^3b^2 + 250ab^4 = \pm 2^6,$$

从而有 $a = \pm 2, b = 0$, 进而有 $(x, y) = (\pm 3, 1)$.

当 n 取不等于 1 和 2 的其他整数的时候, 对于 (2.6) 式, 要么 (a, b) 无整数解, 要么往复地取 $(\pm 2, 0)$, 使得 (x, y) 往复地取 $(\pm 1, -1)$ 和 $(\pm 3, 1)$, 故 Diophantus 方程 (2.3) 仅有整数解 $(\pm 1, -1)$ 和 $(\pm 3, 1)$, 证毕.

参 考 文 献

- [1] 潘承洞, 潘承彪. 代数数论 (第二版)[M]. 济南: 山东大学出版社, 2001.
- [2] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论 (第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.
- [3] 华罗庚. 数论导引 (第一版)[M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [4] 郭毅. 关于不定方程 $x^2 + 11 = 4y^5$ 的唯一正整数解 [J]. 高师理科学刊, 2006, 26(2): 7-8.
- [5] 张丽平. 关于不定方程 $x^2 + 7 = 4y^3$ [J]. 长春工程学院学报 (自然科学版), 2007, 8(1): 84-85.

- [6] 李小燕, 张慧. 关于 Diophantine 方程 $x^2 + D = 4y^3$ [J]. 合肥师范学院学报, 2009, 27(3): 24–25.
- [7] 王振, 李小燕. 关于不定方程 $x^2 + 11 = 4y^3$ [J]. 重庆工商大学学报 (自然科学版), 2009, 26(6): 551–552.
- [8] 拓小泉, 王彩宁, 郭金保. 关于不定方程 $x^2 + 1 = Dy^3 (D \in N)$ 解的存在性讨论 [J]. 延安大学学报 (自然科学版), 2012, 31(4): 7–8.

THE INTEGER SOLUTIONS OF DIOPHANTINE EQUATION ON THE EUCLIDEAN FIELD

WU Yi, LONG Lan

(*College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing
401331, China*)

Abstract: In this paper, we study the integer solutions of two typical Diophantine equations with some important theories in quadratic fields and the fundamental theorem of arithmetic in the ring of quadratic algebraic integers. We prove all the integer solutions of these two Diophantine equations and generalize some results of reference [6].

Keywords: integer solution; Diophantine equation; Euclidean field

2010 MR Subject Classification: 11D45; 11D75